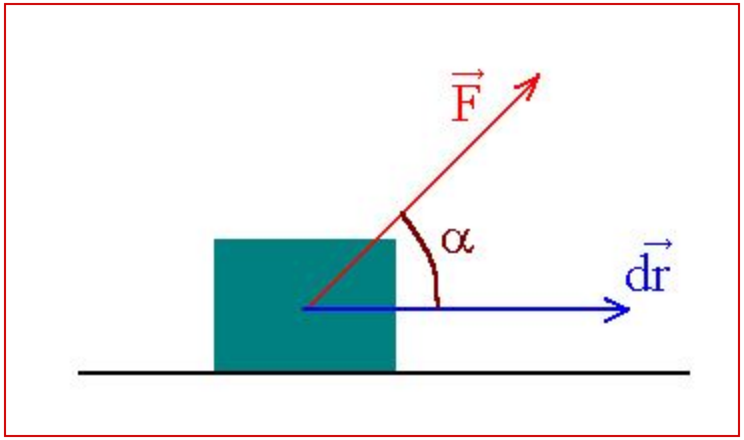
МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА

Работа - физическая величина, характеризующая процесс превращения одной формы движения в другую.



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

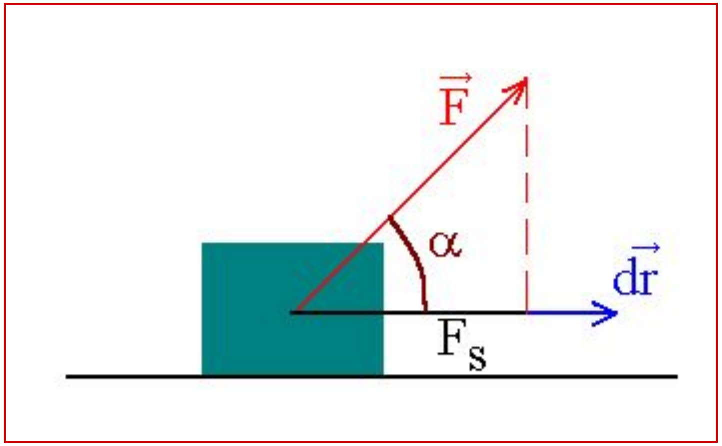
$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$[A] = 1\text{Н} \cdot \text{м} = 1\text{Дж}$$

Элементарная работа dA, совершаемая силой, равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ на элементарное перемещение точки приложения силы $d\vec{r}$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot dt \Rightarrow dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \cdot dt$$

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \cdot dt$$



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = F_S \cdot dr$$

$$F_S = F \cdot \cos\alpha$$

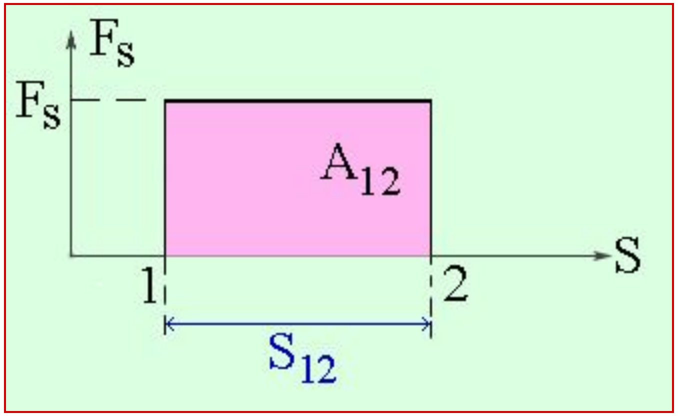
$$A_{12} = \int_{S_{12}} F_s \cdot dS$$

Если $\vec{F} = \mathrm{const}$ и движение прямолинейное,

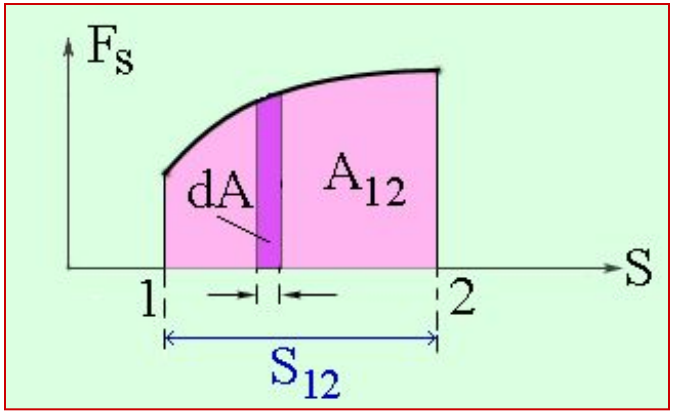
то: $A_{12} = F_s \int_{S_{12}} dS = F_s \cdot S_{12}$

Графическое представление работы

1. $F_s = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad A_{12} = F_s \cdot S_{12}$



2. $F_s \neq \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad A_{12} = \int\limits_{S_{12}} F_s \cdot dS$



Быстроту совершения работы характеризует **мощность**:

Мощность равна работе, совершаемой за единицу времени.

Средняя мощность: $$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}$$

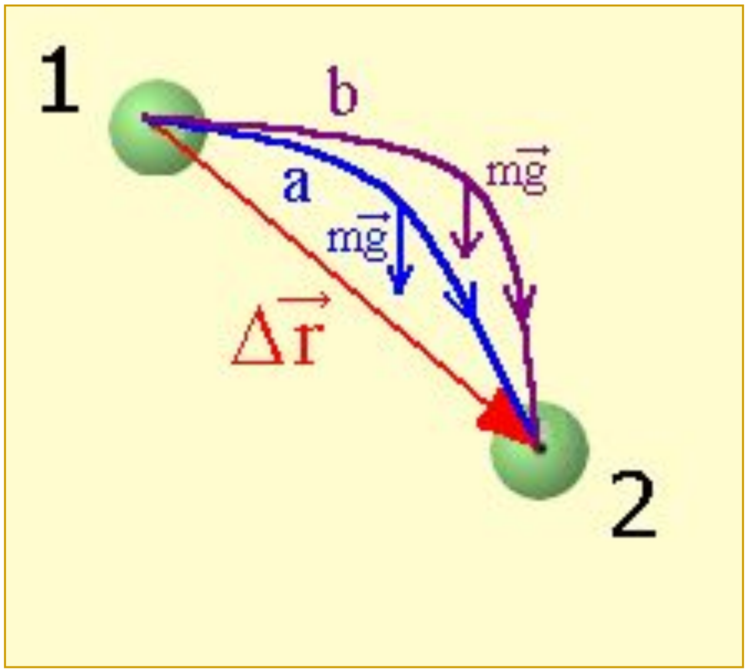
Мгновенная мощность: $$N = \frac{dA}{dt}$$

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

$$[N] = \frac{1Дж}{1c} = 1Вт$$

КОНСЕРВАТИВНЫЕ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ

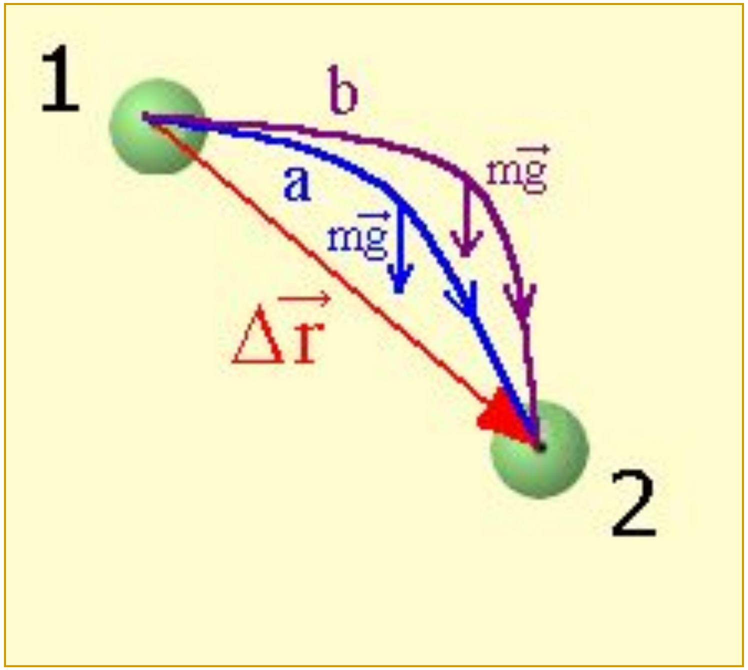
1. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ (на примере силы тяжести)



Силы, работа которых не зависит от формы пути, по которому материальная точка переходит из некоторого начального положения в конечное, называются консервативными.

$$A_{1a2} = \int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2} m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$= m\vec{g} \cdot \int\limits_{\substack{1\\(a)}}^{2} d\vec{r} = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}$$

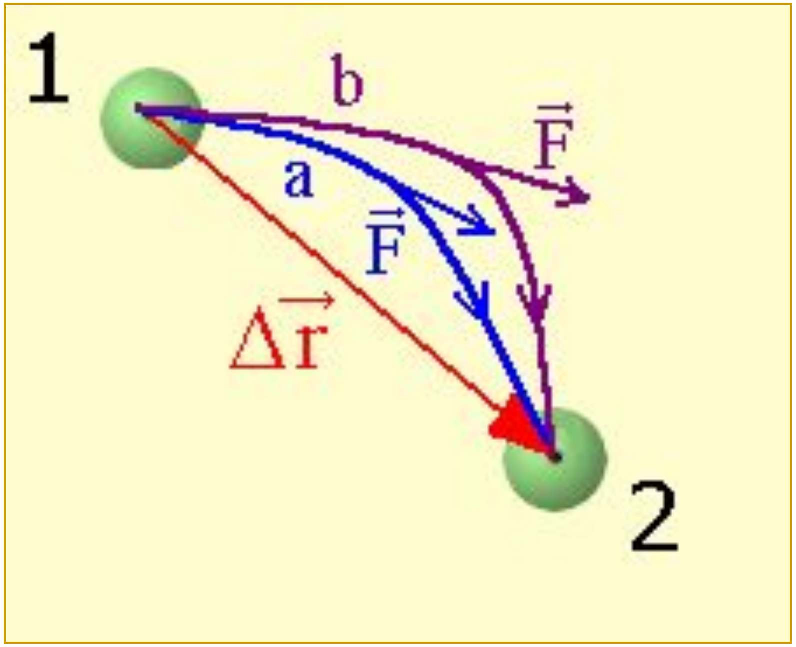


$$A_{1b2} = \int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r} =$$

$$= m\vec{g}\cdot\int\limits_{\substack{1\\(b)}}^{2} d\vec{r} = m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$\boxed{A_{1a2} = A_{1b2}}$$

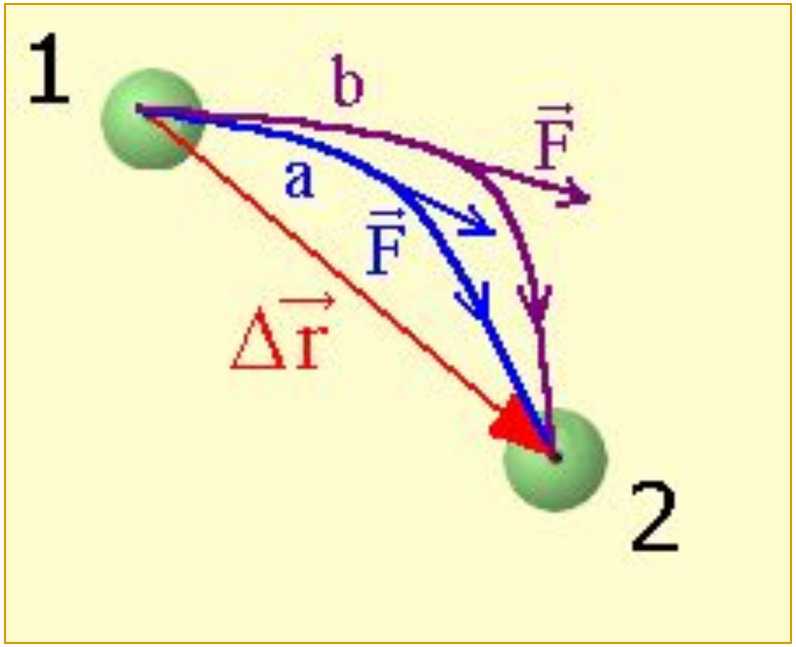
2. НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ (на примере силы тяги)



Сила называется неконсервативной, если совершаемая ею работа зависит от формы пути, по которому материальная точка переходит из начального положения в конечное.

$$A_{1a2} = \int_{\substack{1\\(a)}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{\substack{1\\(a)}}^{2} F \cdot dr = F \cdot \int_{\substack{1\\(a)}}^{2} dS = F \cdot S_{1a2}$$



$$A_{1b2} = \int_{\substack{1\\(b)}}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{\substack{1\\(b)}}^{2} F \cdot dr = F \cdot \int_{\substack{1\\(b)}}^{2} dS = F \cdot S_{1b2}$$

$$\boxed{S_{1a2} \neq S_{1b2} \quad \Rightarrow \quad A_{1a2} \neq A_{1b2}}$$

ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Энергия - мера различных форм движения материи и типов взаимодействия материальных объектов, являющаяся однозначной, непрерывной, конечной, дифференцируемой функцией состояния объекта (измеряется в Джоулях).

Функция состояния - это физическая характеристика объекта, изменение которой при переходе объекта из одного состояния в другое не зависит от траектории перехода, а определяется параметрами начального и конечного состояний.

Полная механическая энергия объекта является функцией его скорости и координат :

$$E = E_к + E_п$$

РАБОТА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Найдем работу силы $\vec{F}$, под действием которой тело массой m изменило свою скорость от $\vec{\upsilon}_1$ до $\vec{\upsilon}_2$ за время Δt.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}; \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$dA = m \frac{d\vec{\upsilon} \cdot d\vec{r}}{dt} = m \cdot \vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon} = m \cdot \upsilon \cdot d\upsilon$$

$$A = \int dA = m \cdot \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon \cdot d\upsilon = m \cdot \frac{\upsilon^2}{2}\Bigg|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

$$\boxed{E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} \quad - \quad \text{кинетическая энергия}}$$

$$\boxed{A = E_{к2} - E_{к1} = \Delta E_к}$$

Функция механического состояния, которая зависит от массы материальной точки и квадрата её скорости и приращение которой равно работе всех действующих на точку сил, называется кинетической энергией точки

РАБОТА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Представим твердое тело, имеющее ось вращения Z, как систему материальных точек.

Для i-й точки (элемента): $E_{к,i} = \dfrac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \dfrac{m_i(\omega_i R_i)^2}{2}$

$$E_{к,i} = \frac{m_i \omega_i^2 R_i^2}{2} \qquad \omega = \frac{\upsilon_1}{r_1} = \frac{\upsilon_2}{r_2} = \ldots = \frac{\upsilon_n}{r_n}$$

Для тела: $E_к = \sum\limits_{i=1}^{n} E_{к,i} = \dfrac{1}{2}\omega^2 \sum\limits_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \dfrac{I \cdot \omega^2}{2}$

$$\boxed{E_к = \frac{I \cdot \omega^2}{2}}$$

Элементарная работа силы, действующей на твердое тело при вращении его вокруг неподвижной оси равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на элементарное угловое перемещение тела.

$$dA = M_{\omega}^{\text{внешн.}} \cdot d\varphi$$

При повороте на конечный угол:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{\omega}^{\text{внешн.}} \cdot d\varphi$$

$$M_{z\,\text{внеш.}} = I\,\varepsilon_z \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}$$

$$dA = I\left(\frac{d\omega}{dt}\cdot d\varphi\right) = I\,\omega\,d\omega$$

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\,\omega\,d\omega = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}$$

Это следует и из выражения: $A = \Delta E_K$

Качение тела.

Движение может быть представлено в виде суммы двух движений: поступательного движения центра масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс и сохраняющей неизменную ориентацию в пространстве, тогда кинетическая энергия такого движения равна сумме энергий поступательного и вращательного движений:

Полная кинетическая энергия: $E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$

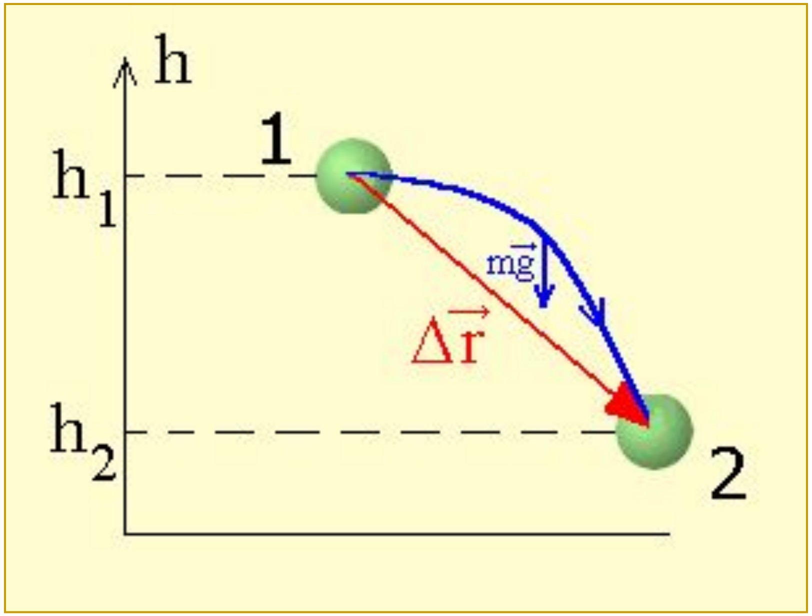
СВОЙСТВА КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ:

1. Это однозначная, конечная, непрерывная, дифференцируемая функция механического состояния объекта.

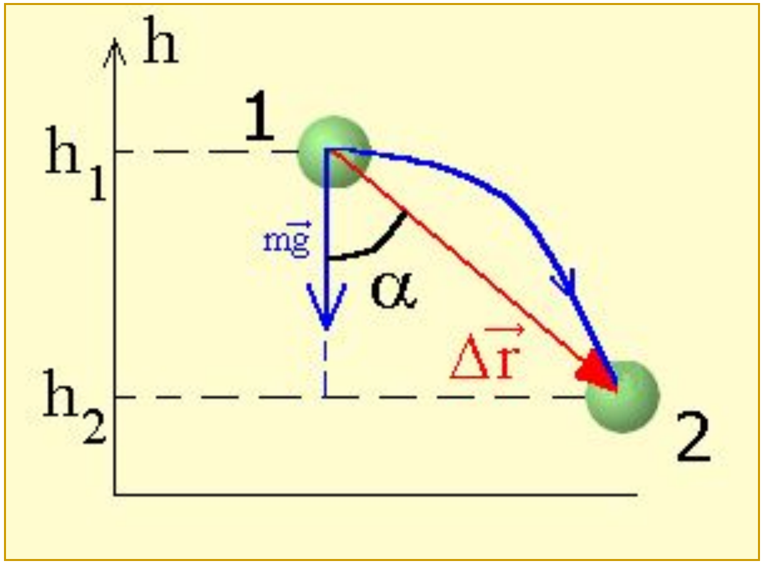
2. Она не может быть отрицательной.

3. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий отдельных тел.

РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ



$$A = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}$$



$$A = mg \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$

$$A = mg \cdot (h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2$$

$$E_п = mgh$$

$$A = E_{п1} - E_{п2} = -\Delta E_п$$

Аналогично для силы упругости: $A = E_{п1} - E_{п2} = -\Delta E_п$

$$E_п = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$$

Функция механического состояния взаимодействующих тел или их частей, зависящая от их координат, убыль которой равна работе консервативных сил, называется взаимной потенциальной энергией этих тел или их частей.

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ:

1. Это однозначная, конечная, непрерывная, дифференцируемая функция механического состояния объекта.

2. Она может быть как положительной, так и отрицательной.

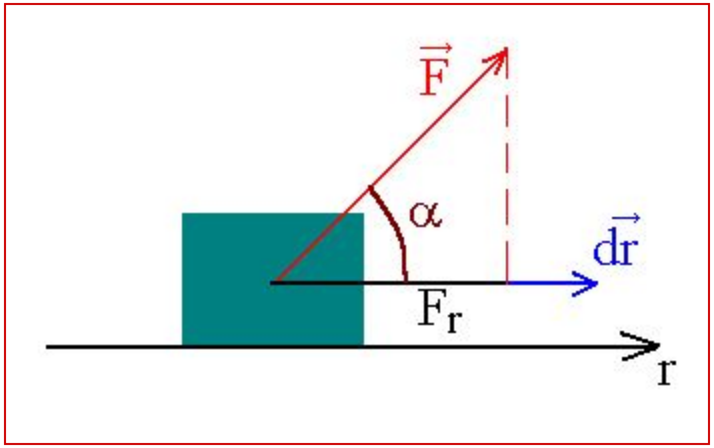
3. Потенциальная энергия характеризует оба взаимодействующих тела.

4. Числовое значение потенциальной энергии определяется с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора нулевого уровня.

СВЯЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛОЙ

Если в каждой точке пространства на материальную точку действует консервативная сила, то говорят, что точка находится в **потенциальном поле сил**.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = F_r \cdot dr \qquad (1)$$



$$A = E_{п1} - E_{п2} = -\Delta E_п$$

$$dA = -dE_п \qquad (2)$$

$$F_r \cdot dr = -dE_п$$

$$F_r = -\frac{dE_п}{dr}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \qquad \vec{F} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial z} \cdot \vec{k} \right)$$

$$\mathrm{grad}(E_п) = \frac{\partial E_п}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

Градиент потенциальной энергии – вектор, указывающий направление быстрейшего возрастания потенциальной энергии и численно равный приращению энергии, приходящейся на единицу длины этого направления.

$$\boxed{\vec{F} = -\mathrm{grad}(E_п)}$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Механическая система называется замкнутой или изолированной, если на нее не действуют внешние силы (система не обменивается с внешними телами энергией). Система называется незамкнутой, если на неё действуют нескомпенсированные внешние силы.

Механическая система называется консервативной, если на тела системы действуют только консервативные силы.

Рассмотрим механическую систему, тела которой взаимодействуют как между собой, так и с внешними телами.

$$dE_к = dA_к^{внутр.} + dA_к^{внешн.} + dA_{нк}^{внутр.} + dA_{нк}^{внешн.}$$

$$dA_к^{внутр.} + dA_к^{внешн.} = -dE_п$$

$$dA_{нк}^{внутр.} + dA_{нк}^{внешн.} = dA_{нк}$$

$$dE_к = dA_{нк} - dE_п$$

$$dE_к + dE_п = dA_{нк}$$

Приращение полной механической энергии системы: $dE = dA_{нк}$

$$\int dE = \int dA_{нк}$$

$$\boxed{\Delta E = A_{нк}}$$

Приращение механической энергии системы материальных точек равно алгебраической сумме работ всех внутренних и внешних неконсервативных сил, действующих на точки системы.

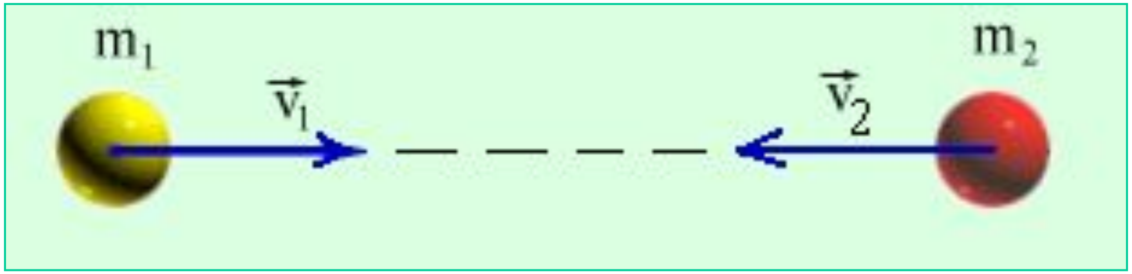
$$\boxed{\text{Если } A_{нк} = 0\text{, то } E = const}$$

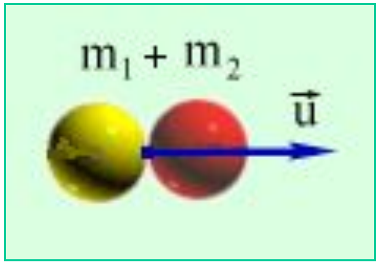
Полная механическая энергия системы сохраняется, если силы, действующие на тела системы, являются консервативными – закон сохранения механической энергии.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ

Удар называется центральным, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

1. Абсолютно неупругий удар.





Кинетическая энергия относительного движения тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации.

Абсолютно неупругий удар – столкновение тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

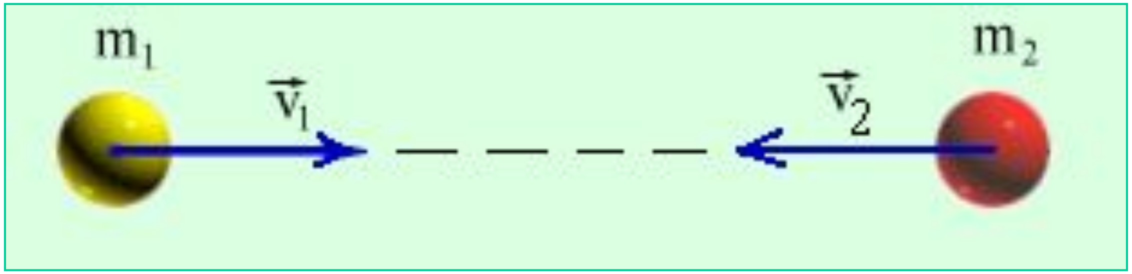
$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\cdot\vec{u}$$

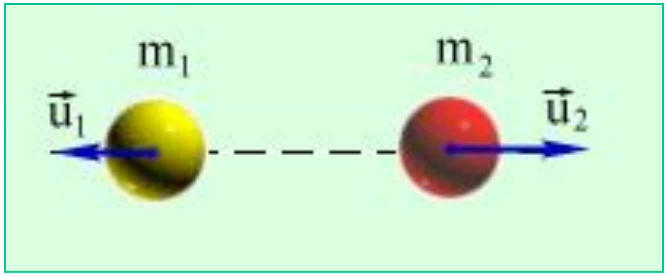
$$\boxed{\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2} + Q$$

Кинетическая энергия переходит в тепловую или другие формы энергии.

2. Абсолютно упругий удар.





Абсолютно упругий удар – столкновение тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия , которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

$$\begin{cases} m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\cdot\vec{u}_1 + m_2\cdot\vec{u}_2 \quad (1) \\[2em] \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1,x} = \dfrac{2m_2\upsilon_{2,x} + (m_1 - m_2)\cdot\upsilon_{1,x}}{m_1 + m_2} \\[2em] u_{2,x} = \dfrac{2m_1\upsilon_{1,x} + (m_2 - m_1)\cdot\upsilon_{2,x}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$