Динамика твёрдого тела

Составила: ОБОЛОНСКАЯ О.С.
к.ф.-м.н.

Содержание:

- 8. Момент инерции тонкого однородного стержня.
- 9. Теорема Штейнера.
- 10. Кинетическая энергия вращения.
- 11. Момент импульса и закон его сохранения.

- До сих пор мы рассматривали движение материальной точки. Далее мы будем рассматривать движение **абсолютно твёрдого тела.**
- В механике под **абсолютно твёрдым телом** понимают такую идеальную систему материальных точек, расстояние между которыми при любых движениях остаются неизменными.
- Вращательное движение вокруг оси – это такое движение твёрдого тела, при котором траектория любой его точки является окружностью. Центры всех окружностей лежат на одной прямой, названной осью вращения.

1.Момент силы

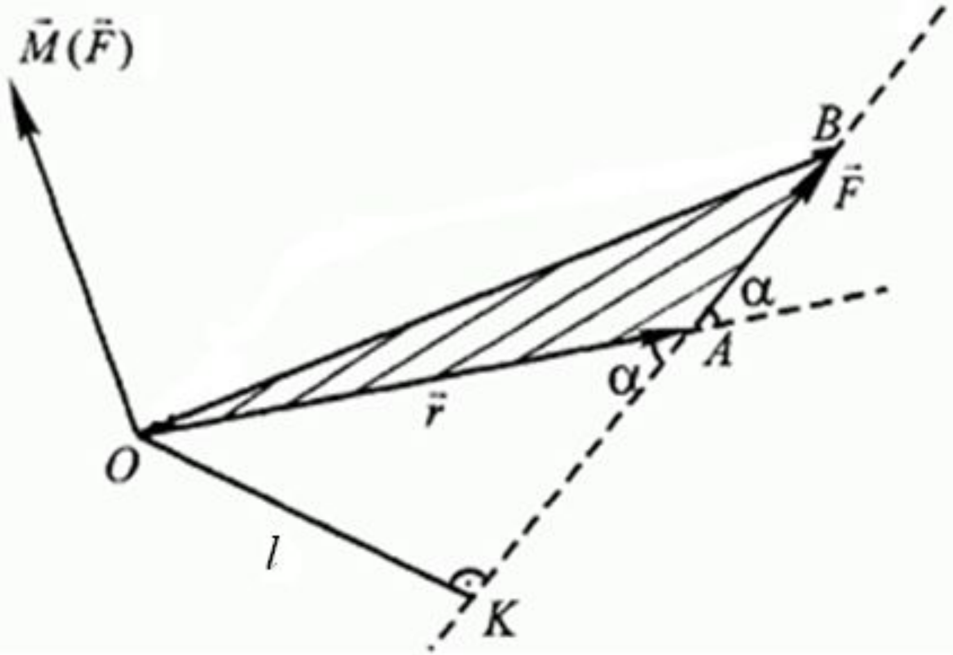
- Для того чтобы вызвать вращение тела, недостаточно просто приложить силу, необходимо создать так называемый вращательный момент или момент силы.
- Различают понятие момента силы относительно центра точки *O* и силы относительно оси.
- Моментом силы относительно центра точки O будем считать векторную физическую величину $\vec{M}$, определяемую векторным произведением радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из центра O в точку приложения силы на вектор силы $\vec{F}$.

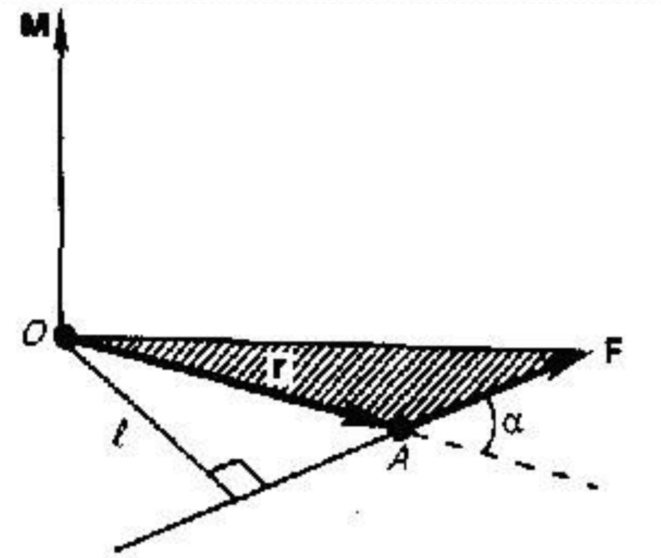
$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$$

- Направление $\vec{M}$ определяется правилом правого винта. Модуль момента силы по определению векторного произведения.

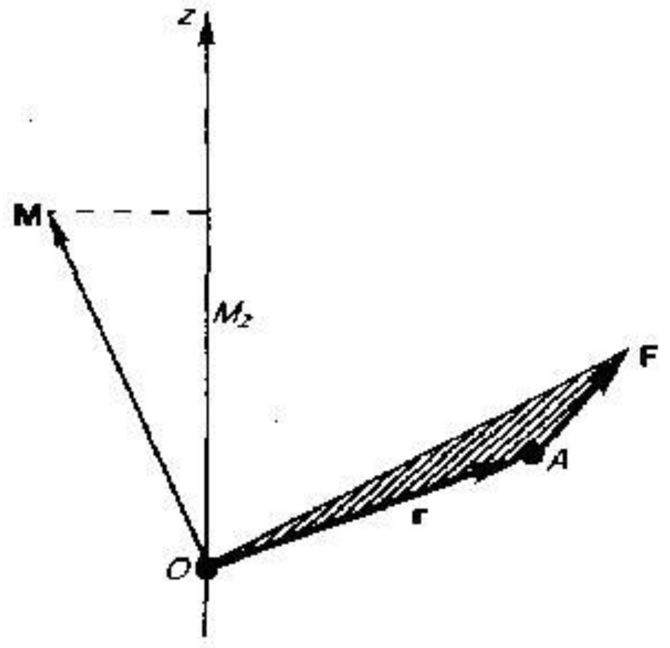
$$M = Fr\sin\alpha = Fl$$

- где $l = r\sin\alpha$ - плечо силы.
- Кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки вращения до линии действия силы называется плечом силы.



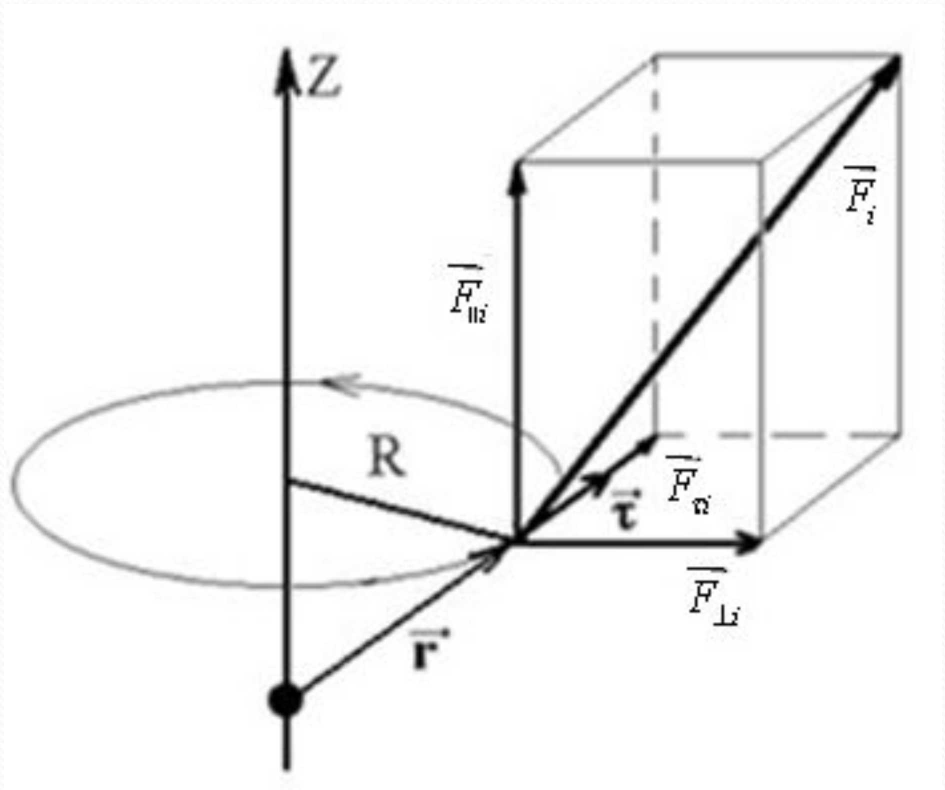


- Моментом силы относительно оси называется проекция M_z момента силы относительно точки на эту ось. M_z - величина алгебраическая, берётся со знаком «плюс» если поворот под действием $\vec{F}$ с положительным направлением оси *z* виден против часовой стрелки.



Основной закон динамики вращательного движения.

- Рассмотрим вращательное движение твёрдого тела относительно неподвижной вертикальной оси *z*.



- Пусть $\vec{F}_i$ - внешняя сила, действующая на i-ю материальную точку m_i. Направление в общем случае произвольно. Эту силу можно разложить на 3 компонента. Один из них параллелен оси вращения $\vec{F}_{\parallel i}$, другой перпендикулярен ей $\vec{F}_{\perp i}$, а также перпендикулярен траектории тела в данной точке. Третий компонент $\vec{F}_{\tau i}$ совпадает по направлению с касательной к траектории рассматриваемого элемента . Два первых компонента будут только воздействовать на ось вращения, деформируя её, а 3-й компонент, направленный по касательной, будет создавать тангенциальное ускорение ($\vec{F}_{\tau i}$) и для неё можно записать уравнение 2-го закона Ньютона

$$F_{\tau i} = m_i a_{\tau i} = m_i \varepsilon r_i$$

- т.к. $a_{\tau i} = \varepsilon r_i$.
- Умножив обе части этого уравнения на r_i :

$$r_i F_{\tau i} = m_i r_i^2 \varepsilon$$

- Аналогичные уравнения можно написать для всех остальных материальных точек, затем просуммируем их, вынося ε (т.к. оно постоянно для всех материальных точек вращающегося твёрдого тела) за знак суммы, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i F_{\tau i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

- Величина $I = m_i r_i^2$ равная произведению массы материальной точки на квадрат её расстояния до оси вращения, называется **моментом инерции точки относительно этой оси.**

- Величина $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, равная сумме моментов инерции материальной точки твёрдого тела, называется **моментом инерции тела относительно оси *z***.
- $r_i F_{\tau i} = M_{zi}$ по определению момента силы F относительно оси z.
- $M_z = \sum_{i=1}^{n} r_i F_{\tau i}$ - представляет собой полный момент внешних сил относительно оси вращения z. Он равен алгебраической сумме моментов сил, действующих на материальные точки твердого тела. Тогда используя введенные понятия момента инерции тела и момента силы, уравнение можно переписать в виде:

$$M_z = I_z \varepsilon$$

- или в векторном виде: $\vec{M}_z = I_z \vec{\varepsilon}$

- Это соотношение является основным законом динамики вращения движения или 2-ым законом Ньютона для вращения движения. Он аналогичен $\vec{F} = m\vec{a}$ 2-ому закону Ньютона поступательного движения.
- $\vec{F} \leftrightarrow \vec{M}$ - момент силы характеризует вращательный эффект силы.
- $\vec{\varepsilon} \leftrightarrow \vec{a}$ - роль линейного ускорения играет при вращении твёрдого тела угловое ускорение.
- $I \leftrightarrow m$ - момент инерции является мерой инертного вращения тела, аналогично m при поступательном движении. Кроме того, заметим, что любое тело обладает определённым моментом инерции относительно любой оси независимо от того, вращается оно или покоится, подобно тому, что тело обладает массой независимо от того движется оно или покоится.

Момент инерции твердого тела

- Момент инерции твердого тела:
- $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ - есть величина аддитивная. Это значит, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей. Судя по определению, момент инерции относительно данной оси зависит не только от массы тела, но и от распределения масс относительно оси.
- Для расчётов момент инерции однородных твёрдых тел преобразуем формулу $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ используя
- понятие плотности вещества $\rho = \frac{m_i}{\Delta V_i} \Rightarrow m_i = \rho \Delta V_i$,
- где ΔV_i - элементарный объём, получим:

$$I_z = \rho \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i r_i^2$$

- это соотношение является приближенным, причём тем больше точным, чем меньше элементарные объёмы ΔV_i. Следовательно, если перейти к пределу $\Delta V_i \to 0$, получим для момента инерции

$$I_z = \rho \int_V r^2 dV$$

Таким образом вычисляется момент инерции однородного твёрдого тела (однородным называется твёрдое тело свойства которого во всех точках одинаковые, то есть $\rho = const$ для каждой точки твёрдого тела).

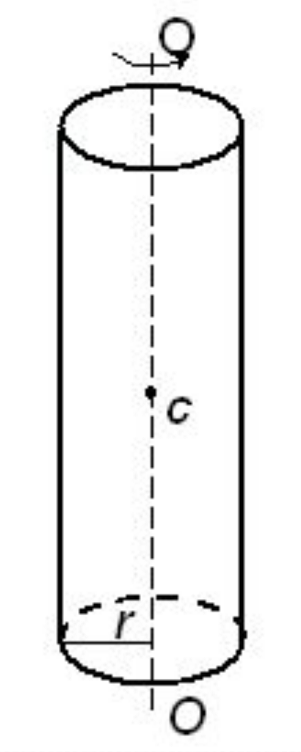
- Выведем формулы момента инерции некоторых тел правильной геометрической формы.

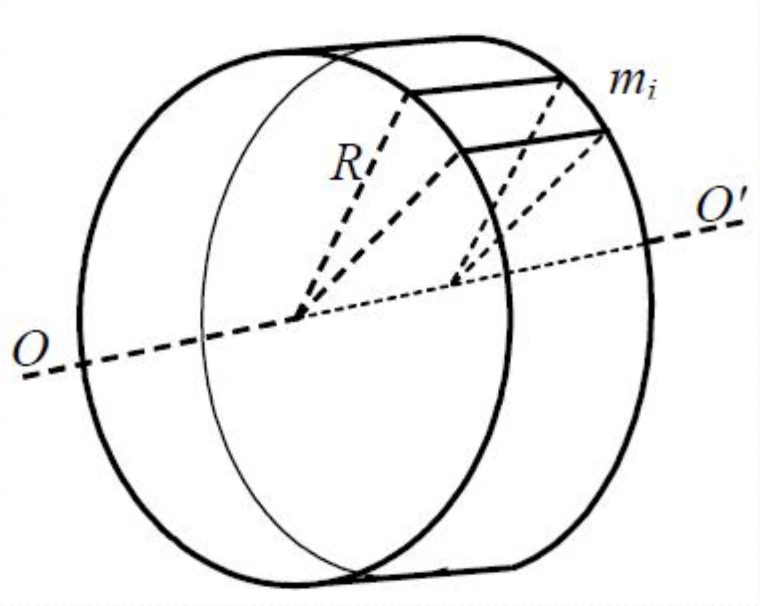
Момент инерции тонкостенного полого цилиндра (кольца)

- Относительно оси *z*, перпендикулярной плоскости цилиндра, проходящей через центр. Пусть масса цилиндра *m* равномерно распределена по ободу, радиус его *R*. Разобьем цилиндр на элементарные полоски m_i. Ввиду малой толщины стенок цилиндра можно считать, что все части такой полоски лежат на одинаковом расстоянии от оси z, равном *R*. Тогда момент инерции такой полоски $I_i = m_i R^2$
- Тогда полный момент инерции цилиндра равен ∑ моментов инерции полосок:

- $I = \sum_{i=1}^{n} m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = mR^2$, где $m = \sum_{i} m_i$ - масса цилиндра.

$$I = mR^2$$





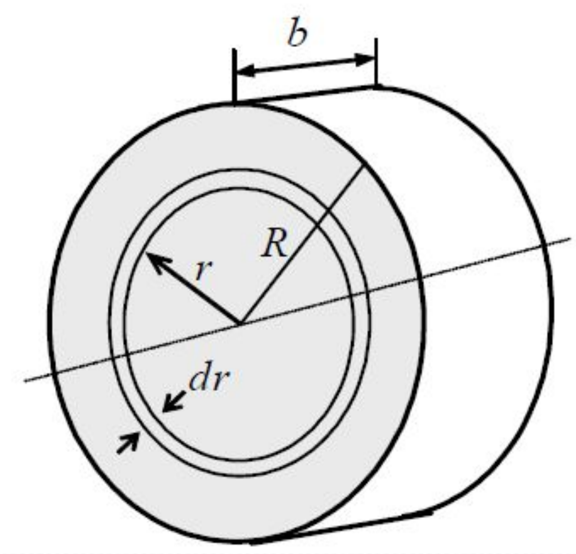
Момент инерции однородного диска (сплошного цилиндра)

- Относительно оси z, проходящей через центр и перпендикулярно диску (цилиндру). Найдём момент инерции однородного диска массой m и толщиной b, относительно оси OO'. Разобьем диск на тонкие кольцевые слои толщиной dr, все точки одного слоя находятся на одинаковом расстоянии r от оси.
- Объём такого слоя равен:

$$dV = 2\pi r b dr$$

- Тогда момент инерции всего диска:

$$I = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_0^R 2\pi r^3 b dr = \rho 2\pi b \frac{r^4}{4} \Bigg|_0^R = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 b$$



- Так как масса диска $m = \rho \pi R^2 b$, то

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

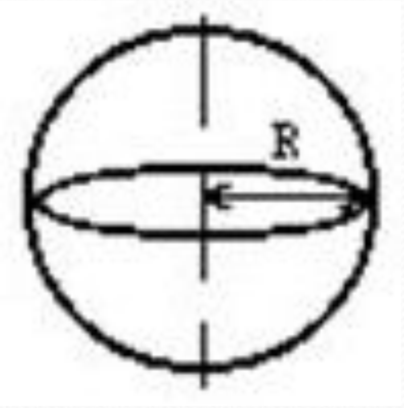
- Момент инерции толстостенного диска, радиусами R_1 и R_2, определяется интегрированием от R_1 до R_2 только надо учесть, что масса диска равна $m = \rho \pi b (R_2^2 - R_1^2)$

- Тогда $I = \rho \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r^3 b dr = \rho \pi b \frac{r^4}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{\rho \pi b}{2} (R_2^4 - R_1^4)$

Тогда $I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$ - момент инерции толстостенного диска (цилиндра).

Момент инерции шара относительно оси симметрии.

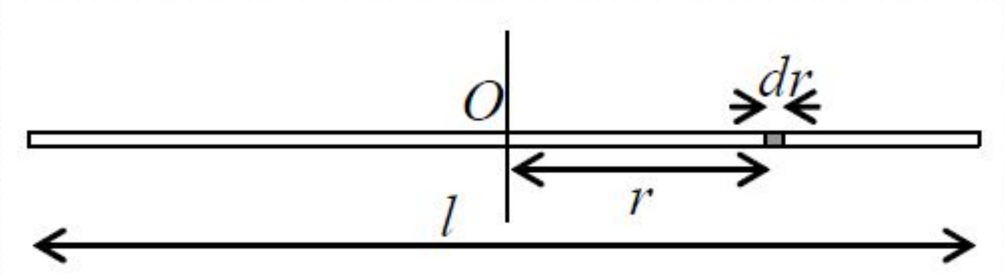
$$I = \frac{2}{5} mR^2$$



- - момент инерции шара.

Момент инерции тонкого однородного стержня

- Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину:



- Пусть масса стержня m и длины его l , площадь поперечного сечения S.
- Разобьём стержень на элементарные объёмы $dV = Sdr$, находящегося на расстоянии r от оси OO' , тогда

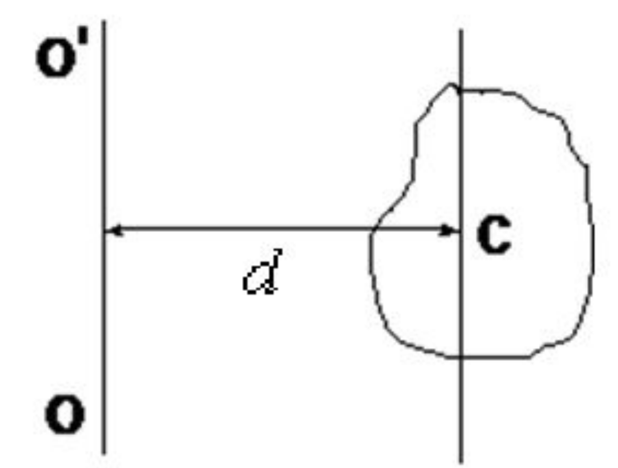
$$I = 2\int_0^{l/2} r^2 dm = 2\rho S\int_0^{l/2} r^2 dr = 2\rho S \frac{r^3}{3}\bigg|_0^{l/2} = 2\rho S\frac{l^3}{24} = \frac{ml^2}{12},$$

- $m_{cm} = \rho l S$
- $I = \dfrac{ml^2}{12}$ - момент инерции тонкого стержня.

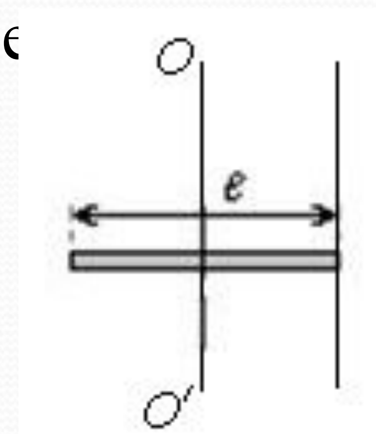
Теорема Штейнера

- Если определён момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, то очень просто определить момент инерции этого тела относительно любой параллельной ей оси. Определение момента инерции таким образом производится по теореме Штейнера:

$$I = I_0 + md^2$$

- 

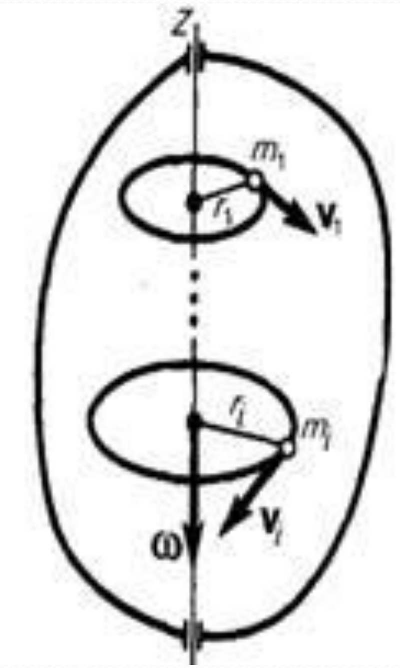
- **Момент инерции тела *I* относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.**
- Рассмотрим пример.
- Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярна стержню и проходящей через е



$$I = I_0 + md^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

Кинетическая энергия вращения

- Рассмотрим абсолютно твердое тело вращающееся около неподвижной оси *z*, проходящей через него. Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, находящиеся на расстоянии $r_1, r_2, \ldots, r_n$ от оси.



- При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами m_i опишут окружности различных радиусов r_i, и имеют различные линейные скорости . Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \ldots = \frac{v_n}{r_n}$$

- Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{вр} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

- или $$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}$$
- где I_z - момент инерции тела относительно оси z.
- m_i - элементарные массы, находящиеся на расстоянии от оси,
- v_i - линейные скорости материальной точки,
- ω – угловая скорость вращения.
- Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела $$T_{вр} = \frac{I_z \omega^2}{2} \quad (*)$$
- Из сравнения формулы (*) с выражением для кинетической энергии $T = \frac{mv^2}{2}$ тела, движущегося
- поступательно, следует, что момент инерции –

- **мера инертности тела при вращательном движении.** Формула (*) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
- В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

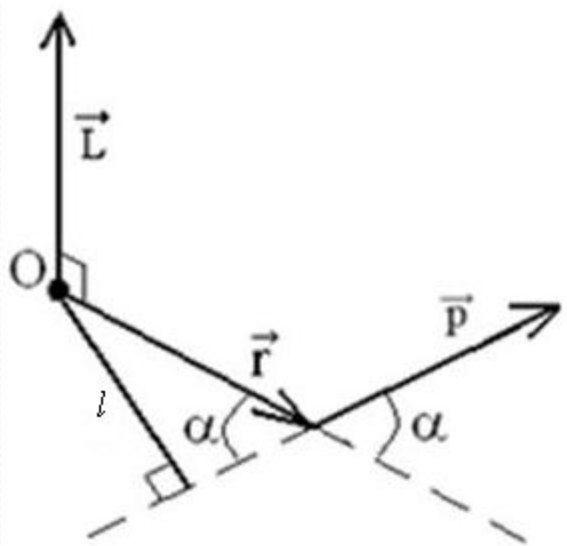
- где *m* - масса катящегося тела;
- v_c - скорость центра масс тела;
- I_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс;
- ω - угловая скорость тела.

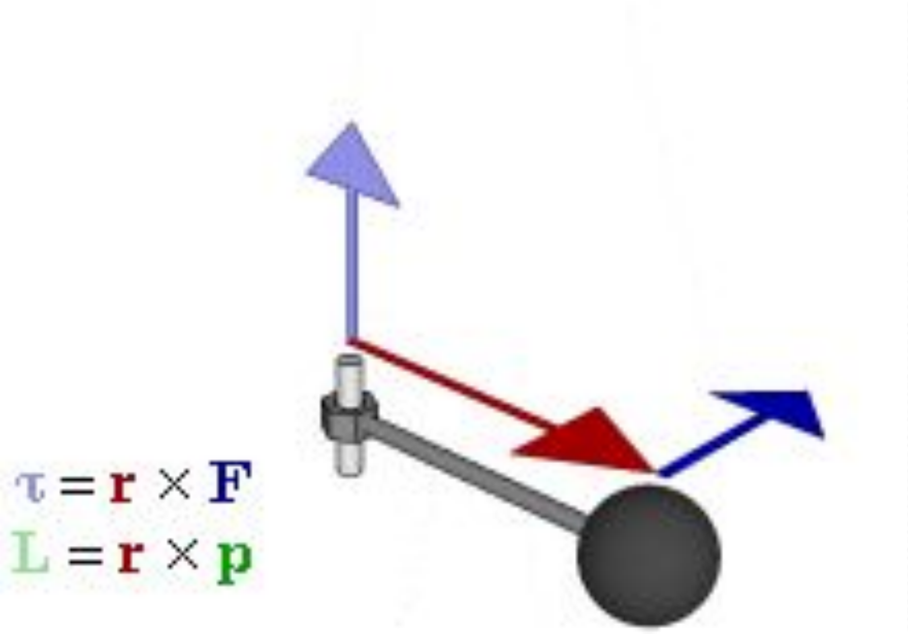
Момент импульса и закон его сохранения.

- Аналогом импульса во вращательном движении «играет» момент импульса тела относительно оси.
- **Моментом импульса (количества движения)** материальной точки А относительно неподвижной точки *O* называется физическая величина, определяемая векторным произведением:
- $$\vec{L} = \left[\vec{r}\vec{p}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right],$$
- где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый из точки *O* в точку *A*;
- $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ - импульс материальной точки.

- $\vec{L}$ - псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$.
- Модуль вектора момента импульса

$$L = rp\sin\alpha = m\upsilon r\sin\alpha = pl$$

- где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$,
- l – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O.
- 


$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

- Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки O данной оси. Момент импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z.
- При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси z каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью υ_i. Скорость υ_i и импульс $m_i\upsilon_i$ перпендикулярны этому радиусу, то есть радиус является плечом вектора $m_i\upsilon_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$L_{iz} = m_i \upsilon_i r_i$$

- и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.
- Момент импульса твёрдого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i$$

- Используя формулу $\upsilon_i = \omega r_i$, получим
- $L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I_z \omega$, то есть $L_z = I_z \omega$ (**)

Таким образом, момент импульса твёрдого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

- Продифференцируем уравнение (**) по времени:

- $\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = M_z$,
- $\frac{dL_z}{dt} = M_z$ - **уравнение динамики вращательного движения** твёрдого тела относительно неподвижной оси.
- Производная момента импульса твёрдого тела относительно оси равна моменту силы относительно той же оси.
- Имеет место векторное равенство:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

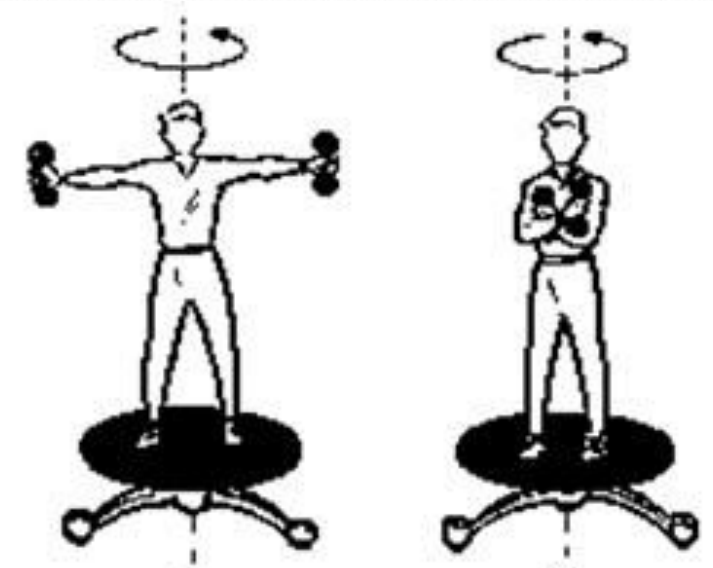
- В замкнутой системе внешних сил $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда $\vec{L} = const$ - **закон сохранения момента импульса.**

- Момент импульса замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени.

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$I_1 > I_2$$

$$\omega_1 < \omega_2$$



а б

- Аналогично, гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.

Спасибо за внимание!!!