# *Гидравлика*

## Раздел 3. Основные уравнения гидростатики

**3.1 Вывод основного уравнения гидростатики**

**3.2 Эпюры гидростатического давления**

**3.3 Пьезометрическая высота, вакуум и его измерения**

**3.4 Гидростатический напор и удельная потенциальная энергия**

Иркутск 2017 г

# 3.1 Вывод основного уравнения гидростатики

*Рассмотрим основной случай равновесия однородной жидкости, когда из массовых сил на жидкость действует лишь сила тяжести*

Обозначив через *z* координату т. *A*, через $z_o$ - координату свободной поверхности жидкости и заменив *h* на $z_o - z$ получим

Для определения величины давления внутри покоящейся жидкости, рассмотрим произвольную точку *A*, находящуюся на глубине *h*. Вблизи этой точки выделим элементарную площадку *dS*.

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma}$$

Так как точка *A* взята произвольно, то можно утверждать, что для всего объема покоящейся жидкости

Запишем уравнение сил, действующих на площадку:

$$z + \frac{p}{\gamma} = const$$

$$pdS - p_0dS - \gamma hdS = 0 \Longrightarrow \boxed{p = p_0 + h\gamma}$$

*Это другое выражение основного уравнения гидростатики.*

Это и есть **основное уравнение гидростатики**: *искомое давление складывается из давления на свободной поверхности и давления, обусловленного силой тяжести вышележащих слоев жидкости*, что позволяет вычислить давление в любой точке покоящейся жидкости. Давление в жидкости с ростом глубины увеличивается по линейному закону.

Координата *z* называется *нивелирной высотой* и по физическому смыслу является *удельной энергией положения жидкости*.

Величина $p/\gamma$ называется *пьезометрической высотой*, а по физическому смыслу является *удельной энергией давления*.

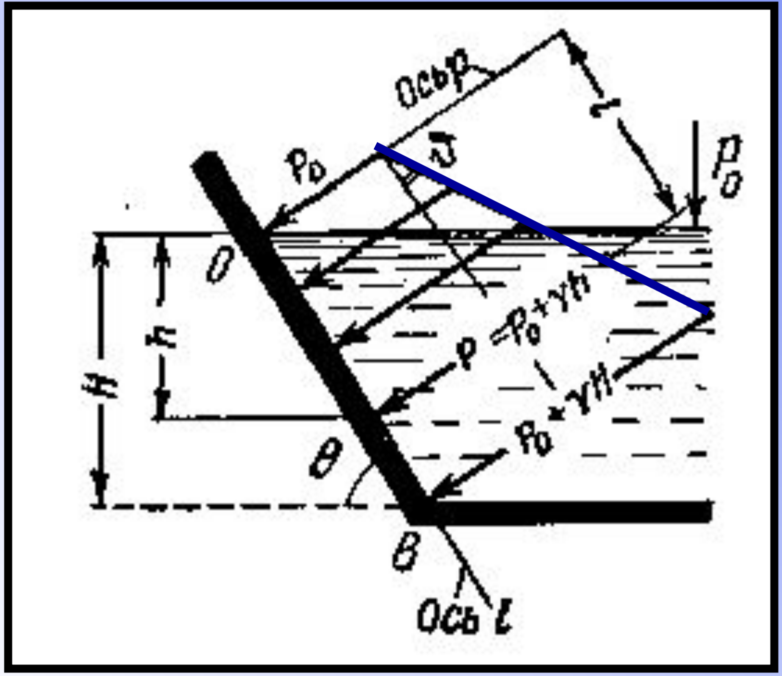
## 3.2 Эпюры гидростатического давления

Изобразим графически изменение гидростатического давления в зависимости от глубины вдоль какой-либо плоской стенки, наклонной к горизонту по углом $\theta$.

В точке, находящейся на поверхности жидкости, давление будет равно:

$$p = p_0 + \gamma h. \implies p = p_0 + \gamma \sin \theta l,$$

Для построения этой линии достаточно знать давление лишь в двух точках рассматриваемого сечения.




*Изобразив эти давления в виде перпендикуляров в соответствующих точках и соединив концы этих перпендикуляров прямой линией, получим эпюру гидростатического давления.*

В любой промежуточной точке гидростатическое давление будет измеряться длиной перпендикуляра, восстановленного в данной точке до пересечения с прямой эпюры.

# 3.3 Пьезометрическая высота, вакуум и его измерения

**Пьезометрическая высота**, равная $p/\gamma$, представляет собой высоту столба данной жидкости, соответствующую данному давлению $p$ (абсолют. или избыт.).

Пьезометрическую высоту, соответствующую избыточному давлению, можно наблюдать в так называемом **пьезометре**, простейшем устройстве для измерения давления. Термин пьезометр ввели в начале XIX века английские физики Дж. Перкинс и И. Х. Эрстед.

Применим основное уравнение гидростатики к жидкости, заключенной в пьезометре:

$$p_{абс} = p_a + h_p\gamma$$

Отсюда высота подъема жидкости в пьезометре равна:

$$h_p = \frac{p_{абс} - p_a}{\gamma} = \frac{p_{изб}}{\gamma}$$

*Если на свободную поверхность покоящейся жидкости действует атмосферное давление, то пьезометрическая высота для любой точки рассматриваемого объема жидкости равна глубине расположения этой точки.*

Пьезометр представляет собой вертикальную стеклянную трубку, верхний конец которой открыт в атмосферу, а нижний присоединен к тому объему жидкости, где измеряется давление.

одной технической атмосфере соответствует:

$$h_1 = \frac{p}{\gamma_{вод}} = \frac{10000}{1000} = 10 \text{ м.вод.ст.}$$

$$h_2 = \frac{p}{\gamma_{рт}} = \frac{10000}{13600} = 0{,}735 \text{ м.рт.ст.}$$

# 3.3 Пьезометрическая высота, вакуум и его измерения

*Если абсолютное давление в жидкости или газе меньше атмосферного, то имеет место **разрежение или вакуум**.*

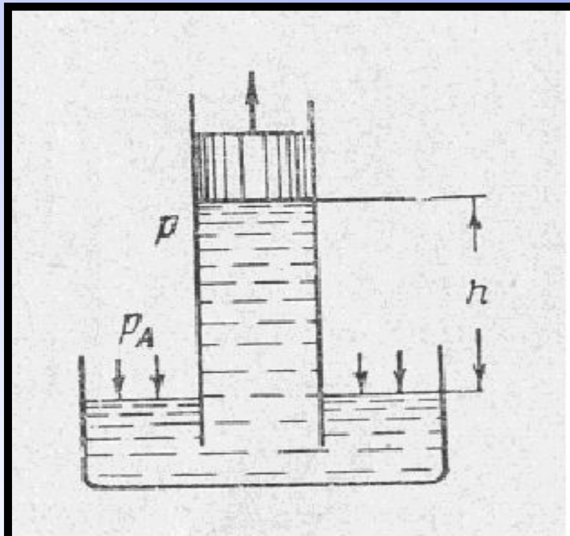
За величину разрежения принимается разность давлений

$$p_{вак} = p_A - p_{абс}$$ или $$h_{вак} = \frac{p_A - p_{абс}}{\gamma}$$

По мере подъема поршня абсолютное давление жидкости над поршнем будет уменьшаться. Нижним пределом для абсолютного давления жидкости является ноль, а максимальное значение вакуума равно атмосферному.

$$h_{мах} = \frac{p_A}{\gamma}$$

Рассмотрим трубу с плотно пригнанным к ней поршнем, с одной стороны, а с другой стороной она опущена в сосуд с жидкостью. Если постепенно поднимать поршень вверх, жидкость будет следовать за поршнем и поднимется на некоторую высоту Н от свободной поверхности с атмосферным давлением.




абсолютное давление жидкости под поршнем

будет равно $$p = p_A - h\gamma$$

а величина вакуума $$p_{вак} = p_A - p = h\gamma$$

или

$$h_{вак} = \frac{p_A - p}{\gamma} = h$$

## 3.3 Пьезометрическая высота, вакуум и его измерения

При нормальном атмосферном давлении(1,033 кг/см2) высота $h_{max}$:

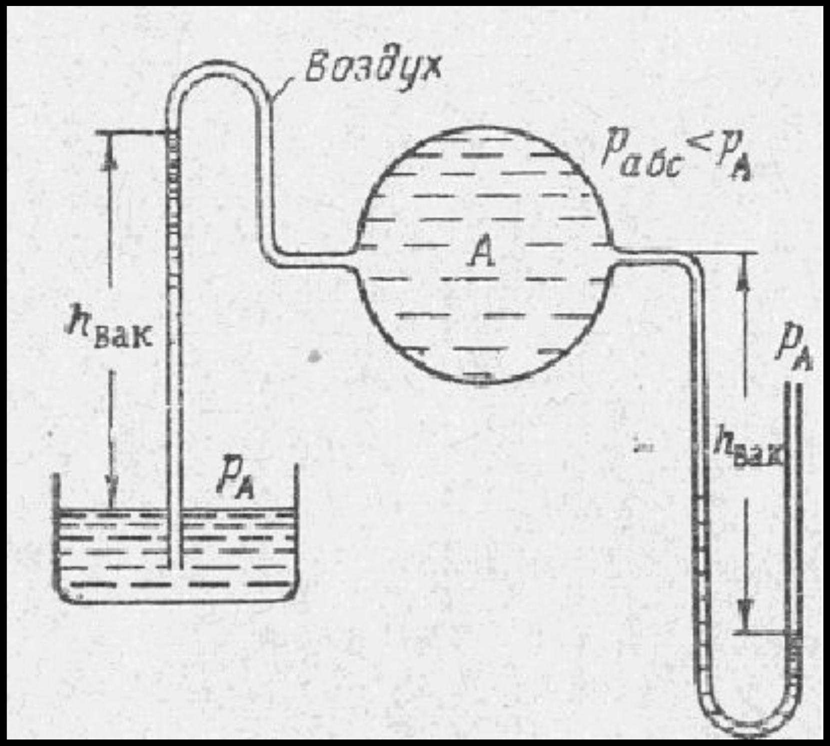
для воды 10,33 м,

для бензина 13,8 м,

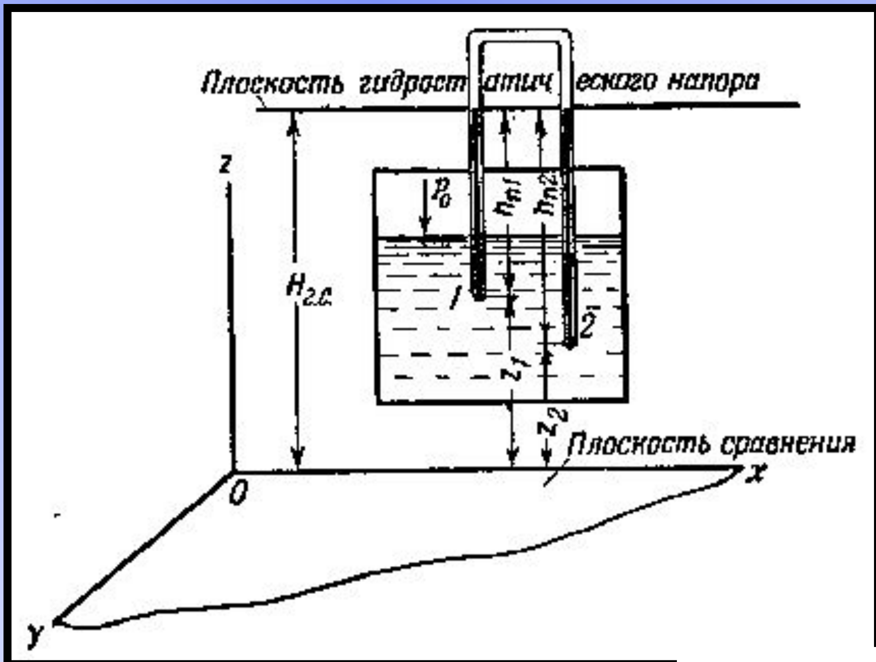
для ртути 0,76м.

Простейшим прибором для измерения вакуума может служить стеклянная трубка

Вакуум в объеме жидкости А, может измеряться либо с помощью *U-образной трубки* (показана справа), либо путем использования *перевернутой U-образной трубки*, один конец которой опущен в сосуд с жидкостью (рисунок слева).



# 3.4 Гидростатический напор и удельная потенциальная энергия




В точках *1* и *2* установлены две стеклянные трубки соединенные вверху между собой. Воздух и пары жидкости, заполняющие верхнюю часть стеклянных трубок, полностью выкачены.

Уровень $H_{гс}$ определяет горизонтальную плоскость, называется плоскостью гидростатического напора. Эта плоскость соответствует абсолютному давлению.

Высота подъема жидкости в обеих трубках будет равна [illegible]

Если бы стеклянные трубки были бы открыты, то жидкость в них поднялась бы ниже на величину

$$h_{п_1} = \frac{p_1}{\gamma} \quad \text{и} \quad \frac{p_{am}}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma}.$$

Так же на рисунке видно, что $z_1 + h_{п_1} = z_2 + h_{п_2}$, и в обеих трубках жидкость поднимается до одного и того же уровня:

$$H_{гс} = z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}.$$

полный гидростатический напор

геометрический напор (высота)

пьезометрический напор (высота)

# 3.4 Гидростатический напор и удельная потенциальная энергия

**Гидростатический напор равен удельной потенциальной энергии покоящейся жидкости**. Под удельной энергией подразумевается энергия, отнесенная к единице веса жидкости (к *1 кГ*)

***Все частицы одного и того же объема однородной покоящейся жидкости обладают одинаковой удельной потенциальной энергией.***

Численное значение потенциальной энергии некоторой частицы равно той работе, которую могут совершить силы, действующие на частицу при перемещении ее из данного положения в такое, в котором потенциальная энергия равна нулю. На частицу действует сила тяжести и давление.

Работа, которую совершит сила тяжести, будет равна:

$$A_m = \delta G z,$$

где $z$ – вертикальная координата рассматриваемой частицы;

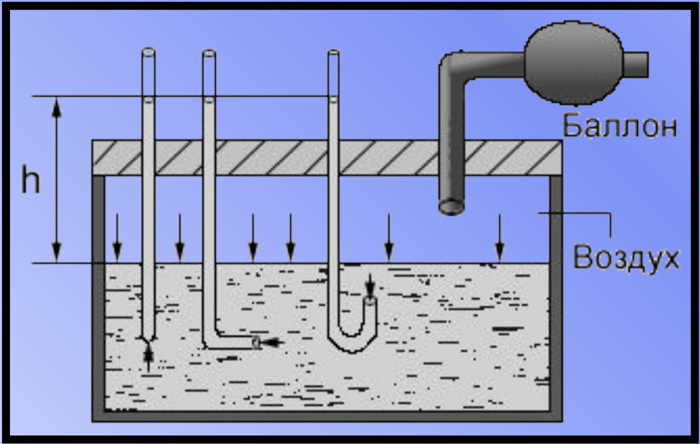
$\delta G$ – ее вес

Если отнести потенциальную энергию к единице веса, найдем удельную потенциальную энергию, которая будет равна гидростатическому напору:

$$\pi_y = z + \frac{p}{\gamma} = H_{\text{гс}}.$$

# 3.5 Закон Паскаля

**Рассмотрим следующий эксперимент**




В сосуде, закрытом пробкой, находится вода. В пробку вставлены три одинаковых по диаметру трубки и трубка не достающая до воды, к которой подсоединен баллон.

*Закачивая с помощью баллона воздух, увеличивается давление. При этом во всех трех трубках вода поднимается до одной и той же высоты.*

**Следовательно, *неподвижная жидкость, находящаяся в замкнутом сосуде, передает производимое на нее внешнее давление по всем направлениям одинаково* (т.е. без изменения).**

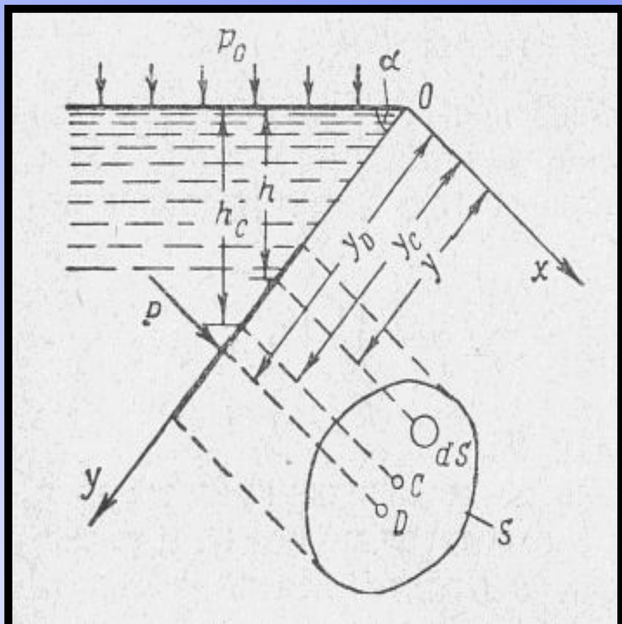
Описанная закономерность была впервые обнаружена французским ученым Паскалем и получила название **закона Паскаля**.

# 3.6 Схема давления на плоские фигуры

Вычислим силу давления $P$, действующую со стороны жидкости на который участок рассматриваемой стенки, ограниченный произвольным контуром и имеющий площадь $S$

Определим положение центра давления, т.е. координату точки пересечения силы давления жидкости на стенку с плоскостью стенки.

Интеграл $\int\limits_S ydS = y_c S$ представляет статический момент плоской фигуры $S$ относительно оси $Ox$




Элементарная сила давления, приложенная к бесконечно малой площадке $dS$, определяется как

$$dP = pdS = (p_0 + h\gamma)dS = p_0 dS + h\gamma dS$$

где $P_o$ – давление на свободной поверхности;

$h$ – глубина расположения площадки $dS$.

Тогда для определения полной силы $P$ выполним интегрирование по всей площади $S$:

$$P = p_0 \int\limits_S dS + \gamma \int\limits_S h\,dS = p_0 S + \gamma \sin\alpha \int\limits_S ydS \quad (3.1)$$

Подставляя в выражение (3.1) и учитывая, что $y_c \sin\alpha = h_c$, получим:

$$P = (p_0 + \gamma h_c)S = p_c S$$

т.е. полная сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению ее площади на величину гидростатического давления в центре тяжести этой площади.

Когда давление $p_o$ является атмосферным, то сила избыточного давления жидкости на плоскую стенку равна

$$P_{изб} = h_c \gamma S = p_{c\,изб} S$$

Для нахождения точки приложения силы избыточного давления жидкости (т.$D$) применим уравнение механики:

$$P_{изб}\, y_D = \int\limits_S y\, dP_{изб}$$

где $y_D$ – координата точки приложения силы $P_{изб}$

где $y$ – координата центра площадки dS.

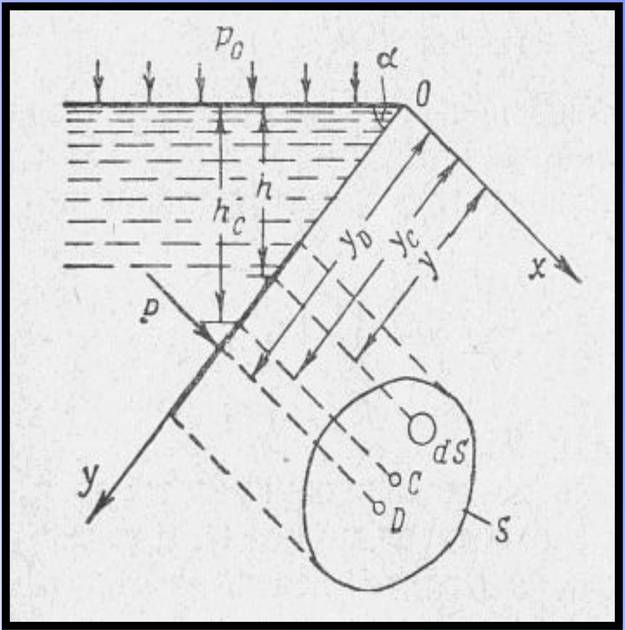
Выразив $P_{изб}$ и $dP_{изб}$ через $y_c$ и $y$ и определив $y_D$, будем иметь

$$y_D = \frac{\gamma \sin\alpha \int\limits_S y^2 dS}{\gamma \sin\alpha\, y_c S} = \frac{J_x}{y_c S}$$

где $J_x = \int\limits_S y^2 dS$ момент инерции площади $S$ относительно оси $OX$

# 3.6 Схема давления на плоские фигуры

В окончательном виде получим $y_Д = y_c + \dfrac{J_{xo}}{y_c S}$




*Таким образом, точка приложения силы $P_{изб}$ расположена ниже центра тяжести площади стенки, а расстояние между ними равно*

$$\Delta y = \frac{J_{xo}}{y_c S}$$

Если $p_o = p_{атм}$ и оно действует с обеих сторон стенки, то точка $D$ и будет центром давления.

Когда $p_o$ является повышенным, то центр давления находится по правилам механики как точка приложения равнодействующей двух сил: $h_c\,\gamma S$ и $p_o S$.

Если $p_o S > h_c\,\gamma\,S$, то центр давления будет ближе к центру тяжести площади S

# 3.7 Давление жидкости на криволинейные стенки.

Рассмотрим давление жидкости на цилиндрическую поверхность. В этом случае достаточно знать горизонтальную $P_Г$ и вертикальную составляющую $P_В$ силы $P$

Суммарное давление на элементарную площадь $dF$ – $dP = pdF$. Разложив его на горизонтальную площадь $dP_Г$ и вертикальную $dP_В$ составляющие. Получим:

$dP_Г = dP \cos\alpha$

где α – угол между направлением сил $dP$ и $dP_Г$

Принимаем во внимание только избыточное давление:

$dP_Г = \gamma\, hdF \cos\alpha$

где $h$ – расстояние по вертикали

Величина $dF \cos\alpha = dF_В$ – проекция элементарной площади $dF$ на вертикальную площадь, поэтому $dP_Г = \gamma h dF_В$, в итоге:

$$P_Г = \gamma h_c F_В \qquad (3.2)$$

где $h_c$ – расстояние от поверхности жидкости до центра тяжести фигуры $F_В$, представляющей собой вертикальную проекцию цилиндрической поверхности

**Из формулы (3.2) следует: *горизонтальная составляющая суммарного давления жидкости на ее вертикальную проекцию***

Вертикальная составляющая: $dP_В = \gamma h dF \sin\alpha$

Так как $dF \sin\alpha = dF_Г$, то $dP_В = \gamma h dF_Г$

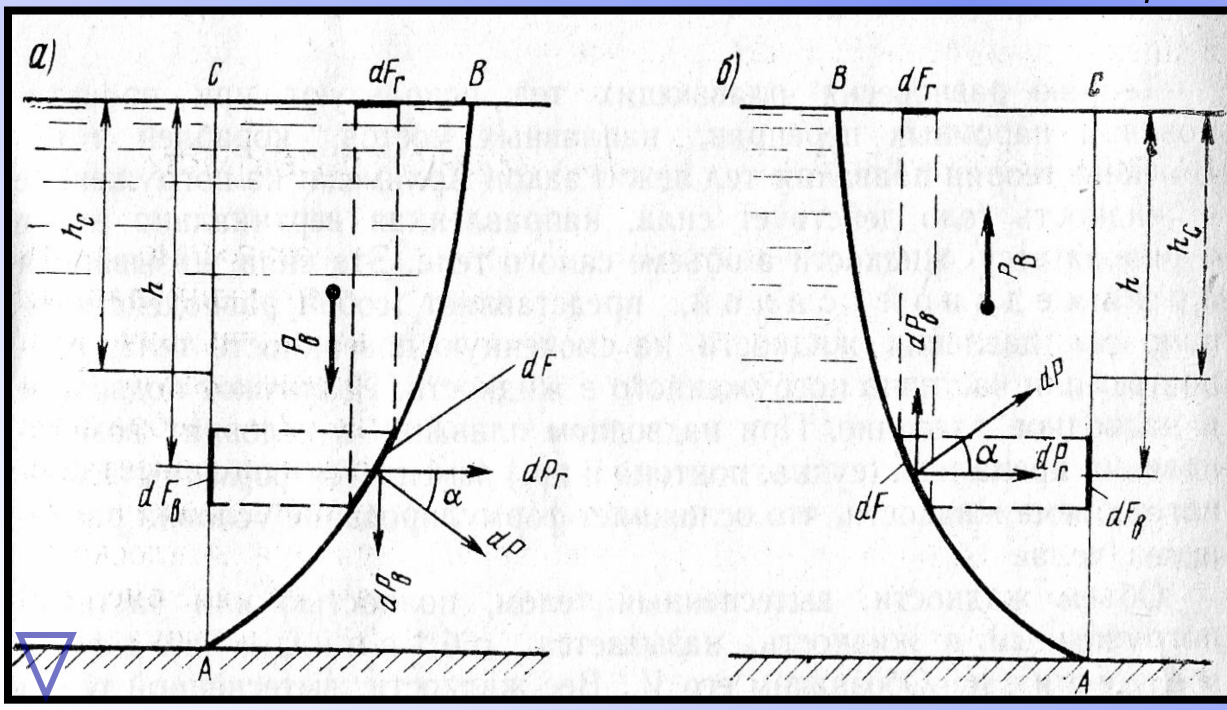
Величина $hdF_Г$ есть элементарный объем $dV$ цилиндра, имеющего высоту $h$ и основание $dF_Г$, в итоге:

$$P_В = \gamma V$$

где $V = bF_{ABC}$, $F_{ABC}$ – площадь треугольника, у которого одна сторона $AB$ криволенейная

Суммарное давление:

$$P = \sqrt{P_в^2 + P_г^2}$$



## 3.8 Давление жидкости на стенки труб и резервуара

# 3.9 Закон Архимеда. Плавание тел

*На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, называемая поддерживающей силой, направленная в верх и равная весу вытесненной им жидкости.*

Ра… …льной формы объемом $W$ погруженное в жидкость.

В… …ая силы давления жидкости на тело будет на… …весу жидкости в объеме, равном разности ук… …е. в объеме тела

$$p_A = p_{B1} - P_{B1} = G_{ABCD} = W$$

*В зависимости от соотношения силы веса тела G и архимедовой силы $P_a$ возможны три случая:*

- $G > P_a$ – тело тонет
- $G = P_a$ – тело всплывает
- $G < P_a$ – тело плавает.

**3.1 Вывод основного уравнения гидростатики**

**3.2 Эпюры гидростатического давления**

**3.3 Пьезометрическая высота, вакуум и его измерения**

**3.4 Гидростатический напор и удельная потенциальная энергия**

**3.5 Закон Паскаля**

**3.6 Схема давления на плоские фигуры**

**3.7 Давление жидкости на криволинейные стенки.**

**3.8 Давление жидкости на стенки труб и резервуара**

**3.9 Закон Архимеда. Плавание тел**