

# Дифференциальные уравнения

Тема: ***Однородные уравнения.  
Уравнения, приводящиеся  
к однородным***

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

## §5. Однородные уравнения

Функция  $M(x, y)$  называется **однородной степени  $m$**  (или **измерения  $m$** ), если  $\forall t \neq 0$  справедливо равенство

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y).$$

ПРИМЕРЫ однородных функций:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y,$$

$$f(x, y) = \sqrt[4]{x^8 + y^8},$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2},$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy},$$

$$f(x, y) = \sin \frac{x}{y} + \ln y - \ln x.$$

*Дифференциальное уравнение первого порядка*

$$y' = f(x, y)$$

*называется **однородным** относительно  $x$  и  $y$ , если функция  $f(x, y)$  является однородной нулевой степени.*

*Дифференциальное уравнение*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*является однородным относительно  $x$  и  $y$ , если функции  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  – однородные функции одного и того же измерения.*

*Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой*

$$z(x) = \frac{y}{x}$$

**Замечание.** *Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью замены*

$$\frac{x}{y} = z(y)$$

## §6. Уравнения, приводящиеся к однородным

### 1. Уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Рассмотрим уравнение (7)  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Если  $c_1 = c_2 = 0$ , то уравнение (7) будет однородным, т.к.

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть  $c_1 \neq 0$  или  $c_2 \neq 0$ . Тогда уравнение (7) заменой переменных приводится либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному.

Это зависит от определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

а) Если  $\Delta \neq 0$ , то (7) приводится к однородному уравнению.

Действительно, если  $\Delta \neq 0$ , то система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ .

Сделаем в (7) замену переменных:  $x = t + \alpha$ ,  $y = z + \beta$ .

Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt};$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t + \alpha) + b_1(z + \beta) + c_1}{a_2(t + \alpha) + b_2(z + \beta) + c_2}\right),$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2t + b_2z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right),$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\right)}_{\text{однородное уравнение}}$$

однородное уравнение

б) Если  $\Delta = 0$ , то уравнение (7) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно, если  $\Delta = 0$ , то строки определителя  $\Delta$  пропорциональны (см. упражнение в курсе «Линейная алгебра»), т.е.  $a_2 = \lambda a_1$ ,  $b_2 = \lambda b_1$ .

Тогда

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$
$$\Rightarrow y' = \phi(a_1x + b_1y).$$

Это уравнение (6) (см. §4). Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z(x) = a_1x + b_1y.$$

## 2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение 1-го порядка называется **обобщённо однородным**, если существует такое рациональное число  $\alpha$ , что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени  $\alpha$  относительно  $x, y, y'$  (относительно  $x, y, dx, dy$ ), если считать  $x$  – величиной измерения 1,  $y$  – величиной измерения  $\alpha$ ,  $y'(dy)$  – величиной измерения  $\alpha - 1$ ,  $dx$  – величиной измерения 0.

Иначе говоря, уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  – обобщенно однородное, если  $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$  такое, что

$$P(tx, t^\alpha y)dx + Q(tx, t^\alpha y) \cdot (t^{\alpha-1} dy) = t^m \cdot [P(x, y)dx + Q(x, y)dy].$$

Обобщенно однородное уравнение приводится **к однородному уравнению** заменой  $y = z^\alpha$ .

Обобщенно однородное уравнение приводится **к уравнению с разделяющимися переменными** заменой  $y = zx^\alpha$ .