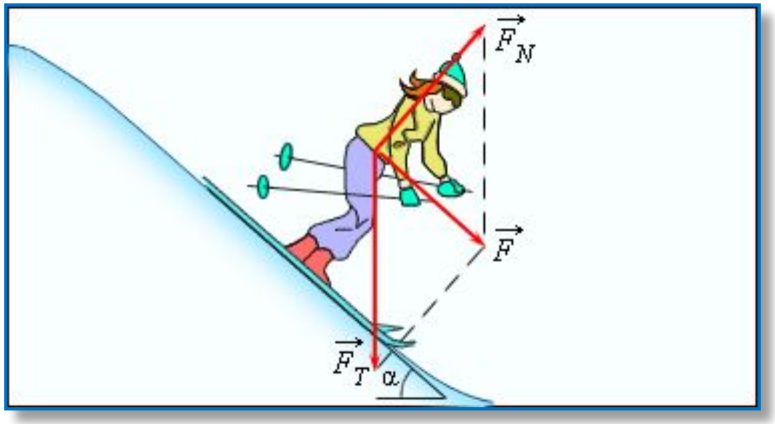
Курс физики для студентов 1-2 курса БГТУ
Заочный факультет
для специальностей ЛИД, ТДП, ТДП$_с$, МОЛК, МОЛК$_с$
Кафедра физики БГТУ
доцент Крылов Андрей Борисович

Часть I. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Лекция 2.
Динамика поступательного и вращательного движения твердого тела

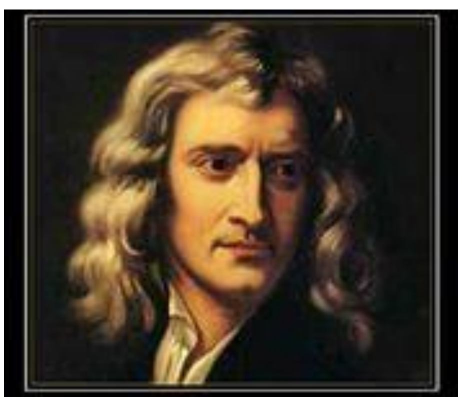


Равнодействующая сил

2015

Часть 1. Основные законы динамики

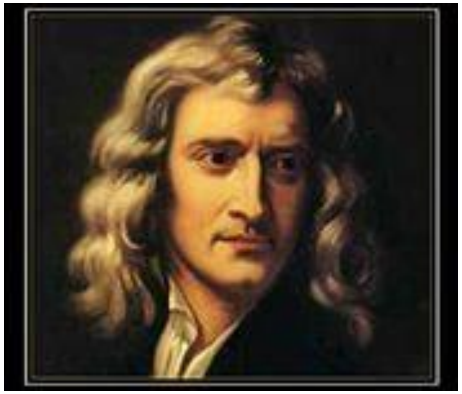
- *Динамика - раздел механики, в котором изучается движение тел под действием приложенных сил.*
- *Основная задача динамики - определение кинематического уравнения движения материальной точки, если известны:*
  - *все силы, приложенные к ней со стороны окружающих тел.*
  - *начальные условия: положение и скорость тела в начальный момент времени.*
- *Динамика рассматривает и обратную задачу – определение законов взаимодействия точки с окружающими телами, если известен кинематический закон движения.*



Ньютон (Newton) Исаак (1643–1727)

- *В основе динамики лежат три закона И. Ньютона.*
- *Область применения: движение тел описывается законами И. Ньютона, если:*
  - *скорость движения тел много меньше скорости света в вакууме:* $v \ll c = 3\cdot 10^{8}\ м/с$
  - *масса их намного больше массы атомов или молекул.* $m_{мол} \ll M\ кг$

Основные определения динамики



Ньютон (Newton) Исаак (1643–1727)

Для формулировки законов динамики необходимо дать определение следующих динамических характеристик:

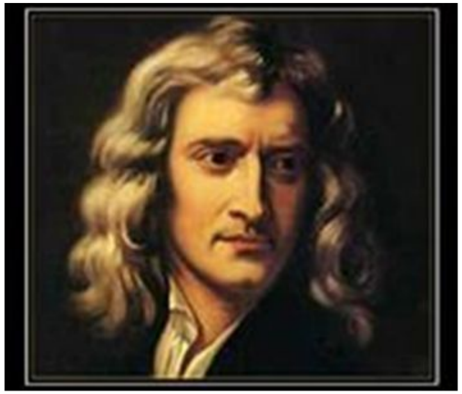
1. инертность,
2. масса m,
3. импульс тела p и
4. сила F.

- ***Инертность*** *(или* ***инерция****) -- свойство тела* ***сохранить неизменным*** *состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*
  - *Количественная мера инертности тел -* ***инертная масса****,*
  - *Количественная мера гравитационного взаимодействия* ***- гравитационная масса****.*
  - ***Экспериментально показано****, что инертная и гравитационная массы с большой степенью точности* ***совпадают****, т. е. они эквивалентны. Этот фундаментальный закон природы называется* ***принципом эквивалентности****.*
- ***Масса*** ***m****– это физическая величина, являющаяся* ***мерой*** *инерционных и гравитационных свойств тела.*
  - *Единицей массы в СИ является килограмм:* $m = [кг]$.
  - ***Масса*** *– величина* ***аддитивная****, т. е.* ***масса*** *тела равна* ***сумме масс всех частей*** *этого тела.*

Первый закон динамики

- ***Инерциальная система отсчета*** *- такая система, в которой* ***при отсутствии воздействия*** *со стороны других тел тело/ материальная точка* ***движется*** *относительно такой системы отсчета* ***прямолинейно и равномерно.***
  - *Такое движение называется* ***движением по инерции****.*
  - Инерциальных систем существует бесконечное множество.
  - Система отсчета, связанная с поездом, идущим с постоянной скоростью по прямолинейному участку пути, – тоже инерциальная система (приближенно), как и система, связанная с Землей.
  - Все инерциальные системы отсчета образуют класс систем, которые движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.
- ***1-й закон Ньютона*** *(****закон инерции****): материальная точка* ***сохраняет состояние покоя*** *или* ***равномерного прямолинейного движения*** *до тех пор,* ***пока воздействие со стороны других тел*** *не выведет ее из этого состояния.*
  - *Системы отсчета, движущиеся* ***с ускорением*** *относительно инерциальных систем, называют* ***неинерциальными****.*
  - Впервые закон инерции был сформулирован **Галилео Галилеем** (**1632 г.**).
  - Ньютон **обобщил** выводы Галилея и включил их в число основных законов движения.

Основные определения динамики-2



Ньютон (Newton) Исаак
(1643–1727)

Для формулировки законов динамики необходимо дать определение следующих динамических характеристик:

1. инертность,
2. масса m,
3. импульс тела p и
4. сила F.

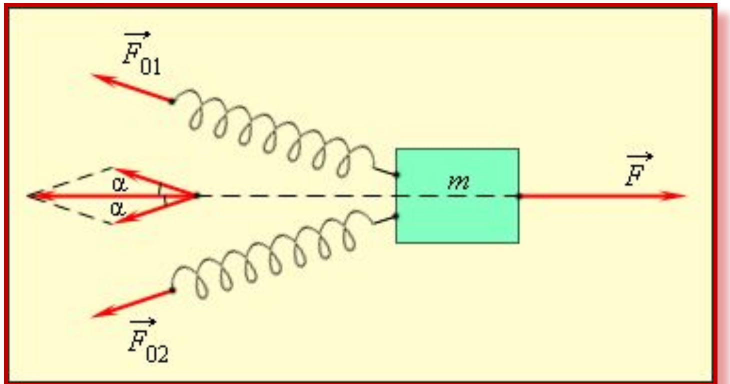
- ***Импульс тела*** *(или* ***количество движения****)* ***p*** *– это* ***векторная*** *физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:*

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

  - Единица измерения импульса в СИ – $p = [\text{кг} \cdot \text{м/с}]$

- ***Сила*** F - это **векторная** физическая величина, являющаяся **мерой механического воздействия на тело** со стороны других тел или полей, в результате, которого тело деформируется или приобретает ускорение.
  - Единица измерения силы в СИ в **Ньютонах**: $F = [\text{кг} \cdot \text{м/с}^2] = [\text{Н}]$
  - Сила, приложенная к телу, считается заданной, если указаны точка её приложения, направление действия и численное значение (модуль).

Второй закон динамики



Измерение

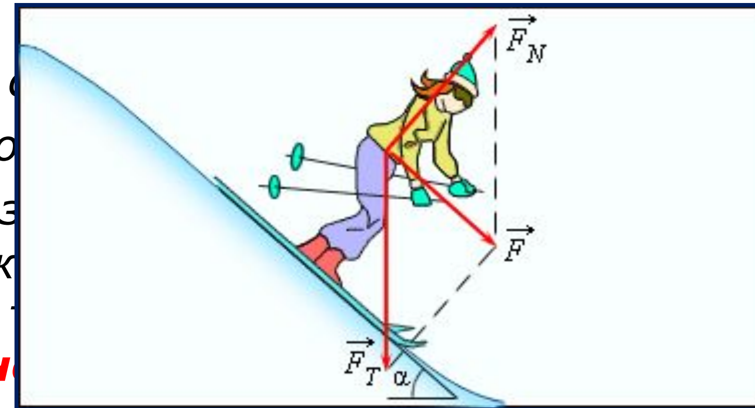
выполнено по

Таким образ

силы, прилож

той же точке

силой – ***равн***



- ***Эта равнодействующая сила*** *будет численно равна и противоположна по направлению геометрической сумме указанных двух сил, определяемой по известному правилу параллелограмма. В общем случае,* ***силы действующие на тело:***
  - *складываются по правилу сложения векторов, т. к. сила - величина векторная.*
  - ***сила****, приложенная к телу****, полностью определена****, если указаны ее численное значение (модуль), направление действия и точка приложения.*

Действие на тело ***равнодействующей*** F_p ***силы*** *такое же как суммы всех сил* $\Sigma\vec{F}_i$.

- **2-й закон Ньютона** (**основное уравнение динамики**): ускорение тела a прямо пропорционально равнодействующей всех сил F, приложенных к нему, и обратно пропорционально его массе m.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

или

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

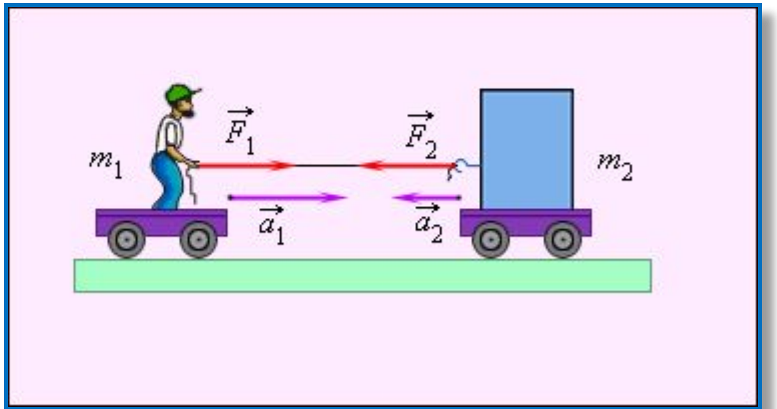
Но чаще

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

или

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Третий закон динамики



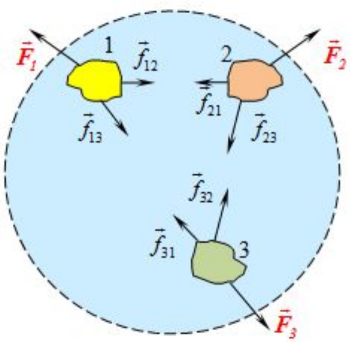
3-й закон Ньютона: *сила, с которой одно тело действует на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое.*

$$F_{12}=F_{21}$$

- *Силы, возникающие при взаимодействии тел, всегда имеют **одинаковую природу**.*
  - *Они **приложены к разным телам** и поэтому **не могут уравновешивать друг друга**.*
  - *Складывать по правилам векторного сложения можно только силы, приложенные к одному телу.*

- Силы, действующие между частями одного и того же тела, называются ***внутренними***.
  - Если тело движется как целое, то его ускорение a определяется **только внешней** силой.
  - **Внутренние силы исключаются** из второго закона Ньютона, так как их векторная сумма равна нулю.

- **Механическая система** - *совокупность материальных точек, рассматриваемых как единое целое.* Любое **абсолютно твердое тело** есть такая механическая система.
  - *Силы взаимодействия между материальными точками механической системы* называются ***внутренними***.
  - *Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела,* называются ***внешними***.
  - *Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется* ***замкнутой механической системой***.



- ***Импульс механической системы****, представляет собой сумму импульсов всех материальных точек, входящих в механическую систему:*

$$\vec p = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Обозначим как f_{ik} *внутреннюю силу, действующую* i*–ю на точку системы со стороны* k*–й точки , а как* F_i *- равнодействующую внешних сил, действующих на* i*–ю точку.*

Запишем второй закон Ньютона через скорость *для трех частиц:*

$$m_1 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt} = \vec f_{12} + \vec f_{13} + \vec F_1,$$

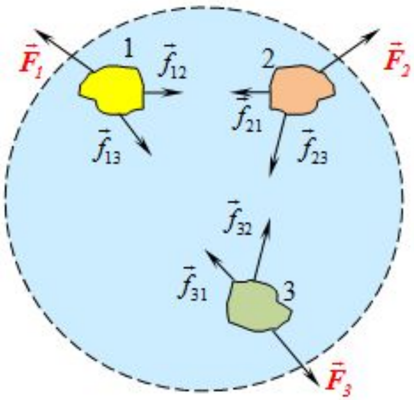
$$m_2 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt} = \vec f_{21} + \vec f_{23} + \vec F_2,$$

$$m_3 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_3}{dt} = \vec f_{31} + \vec f_{32} + \vec F_3.$$

Сложим правые и левые части этих трех уравнений, учитывая, что сумма всех внутренних сил f_{ik} *согласно 3-му закону динамики равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \vec F_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i^{\,e} \Rightarrow \frac{d\vec p}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i^{\,e}$$

Закон сохранения импульса-2



$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,e} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,e}$$

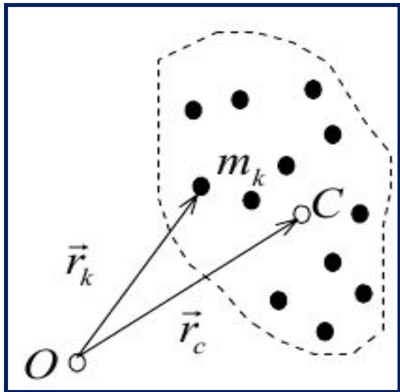
- ***Закон изменения импульса*** *механической системы*: **производная по времени** от импульса механической системы равна векторной сумме **внешних** сил, действующих на систему.

Для замкнутой механической системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i\right) = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \mathrm{const}$$

- ***Закон изменения импульса*** ***для замкнутой*** *механической системы*: импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени.
- Закон сохранения импульса носит **универсальный характер** и выполняется также в релятивистской и квантовой механике.

- **Закон сохранения импульса** – это фундаментальный закон природы. Он является следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности.
- **Под однородностью пространства** понимают одинаковость свойств пространства во всех его точках.



Центр масс абсолютно твердого тела

- *Соблазнительно **заменить** изучение совокупности материальных точек АТТ одной точкой, в которой сосредоточена вся масса тела.*
- ***Центром масс системы материальных точек** называют точку **С**, радиус – вектор которой определяется формулой:*

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

где m_i и r_i – масса и радиус-вектор i-ой точки системы

суммарная масса системы

Скорость центра масс механической системы:

$$\vec{\mathbf{v}}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Тогда **Закон сохранения импульса:**

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^e \Rightarrow m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^e \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^e$$

где p – импульс системы

$$\vec{p} = m\vec{\mathbf{v}}_C$$

*Это **теорема о движении центра масс системы**: **центр масс** любой системы материальных точек движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в*

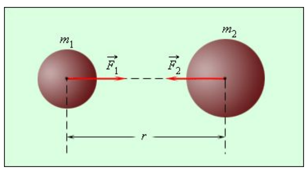
- **Движение любого твердого тела** можно рассматривать **как сумму поступательного движения его центра масс** и **вращательного движения** относительно оси, проходящей через его центр масс.

Силы в механике

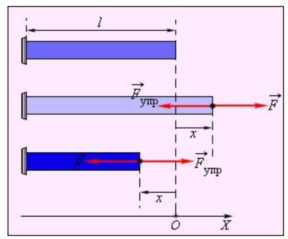
- Для сведения нахождение закона движения тела к чисто математической задаче, необходимо знать **действующую на тело силу**.

В классической механике рассматриваются силы:

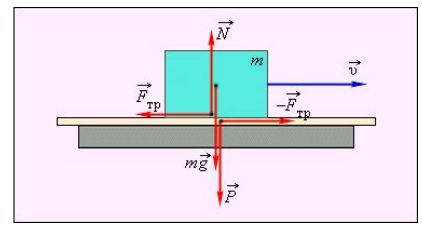
Гравитационные силы	Силы упругости	Силы трения
имеют гравитационную природу	имеют электромагнитную природу	имеют электромагнитную природу



Сила тяготения

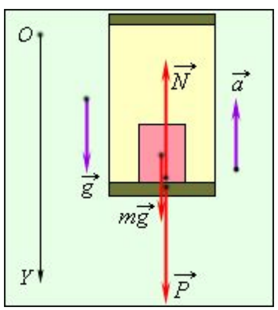


Сила упругости



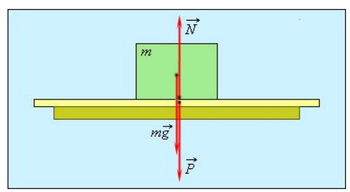
Сила трения покоя

Сила трения скольжения

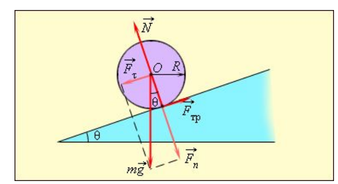


Сила тяжести

Вес тела



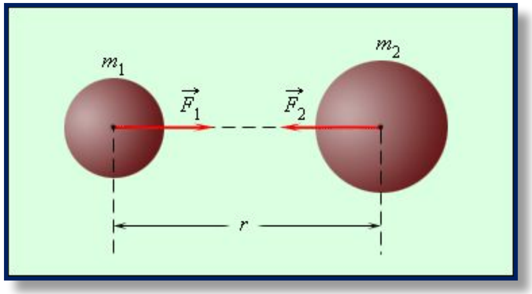
Сила реакции опоры



Сила трения качения

Сила вязкого трения

В механике рассматриваются два вида воздействия на тело со стороны других тел.
1) данное **тело** под воздействием других тел **изменяет свою скорость**, т. е. **приобретает ускорение**.
2) данное **тело** под воздействием других тел **деформируется**, т. е. **изменяет** свою форму и размеры



Гравитационные силы

Согласно **закону всемирного тяготения** сила гравитационного притяжения $F_г$ между двумя материальными точками **пропорциональна** произведению масс m_1 и m_2 точек и **обратно пропорциональна** квадрату расстояния r между ними, а направлена по прямой, соединяющей эти точки:

$$F_г = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где $G = 6{,}67^{-10}\ Н \cdot м / кг$ - гравитационная постоянная

- **Закон сформулирован для материальных точек.**
  - Но по нему можно определить силу притяжения и тел конечных размеров, если предварительно разбить их на материальные точки, а затем сложить все силы взаимодействия.
  - Формулу можно применить к однородным шарам, расстояние между центрами которых r.

- Многие явления в природе объясняются действием сил всемирного тяготения.

- Движение планет в Солнечной системе, искусственных спутников Земли, траектории полета баллистических ракет, движение тел вблизи поверхности Земли – все они находят объяснение на основе закона всемирного тяготения и законов динамики.

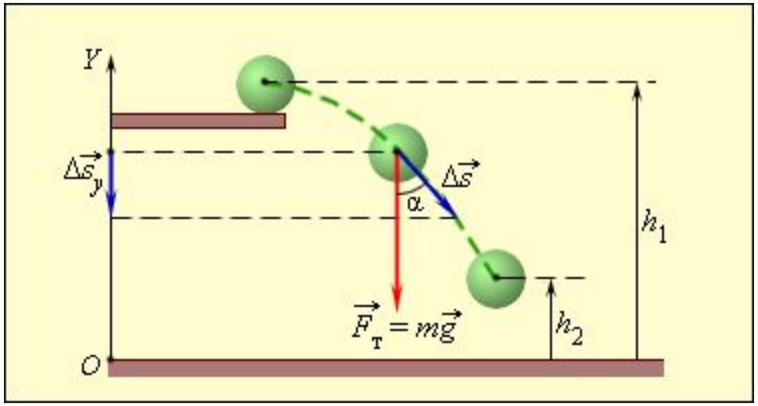
Одним из проявлений силы всемирного тяготения является ***сила тяжести***.
Так принято называть **силу притяжения тел к Земле вблизи ее поверхности**.
Если M – масса Земли, $R_З$ – ее радиус, m – масса данного тела, то сила тяжести равна:

$$F_T = G\frac{M}{R_З^2}m = mg$$

где g – ***ускорение свободного падения*** у поверхности Земли:

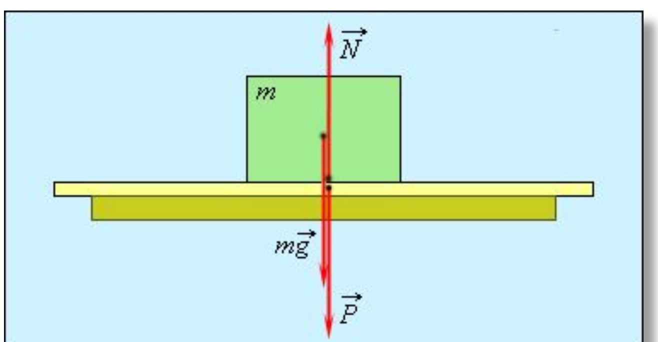
$$g = G\frac{M}{R_З^2}$$

Сила тяжести и центр тяжести тела



- Под действием **силы тяжести** $F_т$ все тела **падают** с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением $g = 9.8$ м/с^2 - ускорением свободного падения

- Сила тяжести вызывает **падение** незакрепленных тел на Землю.
- Она равна силе, с которой неподвижное относительно Земли тело давит на горизонтальную опору (или действует на вертикальный подвес) вследствие тяготения к Земле.
- Точка приложения силы тяжести тела, т.е. точка приложения равнодействующих сил тяжести всех частиц тела, называется **центром тяжести тела**.



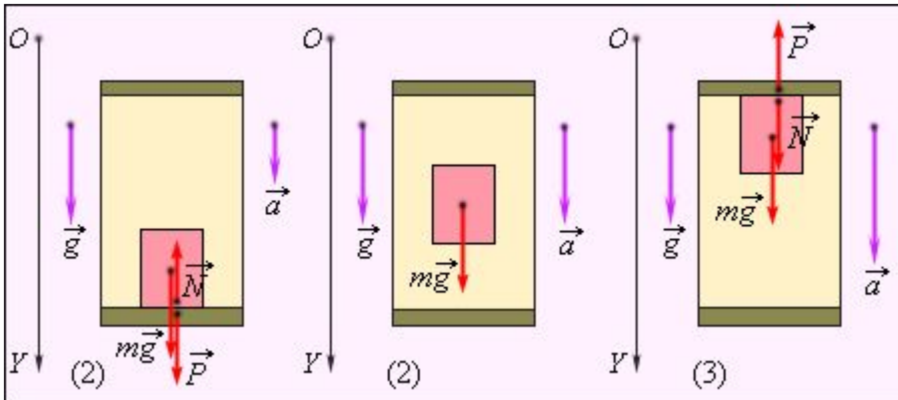
Центр тяжести тела совпадает с его центром инерции и:

- в телах **правильной** геометрической **формы** определяется как наиболее симметричная точка;
- в телах **неправильной** геометрической **формы** как **точка равновесия** (**момент сил** относительно центра тяжести при равновесии должен быть равен 0).

Вес тела

- **Вес тела** P - сила, с которой **тело действует на опору или подвес.**
- Если тело **неподвижно** относительно Земли (**v=0**), или **движется равномерно прямолинейно** в вертикальном направлении (**a=0**), то:

$$\vec{P} = \vec{F}_T = m\vec{g}$$



- Если тело и опора движутся с каким-нибудь **ускорением** относительно Земли (**оси Оу**), то в этом случае **вес тела не равен силе тяжести**:

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

При движении тела в лифте **вверх** с ускорением a (ускорение направлено вверх):

$$P = m(g + a)$$

В этом случае вес тела **больше** силы тяжести (**перегрузка**).

При движении тела в лифте вниз с ускорением a (ускорение направлено вниз):

$$P = m(g - a)$$

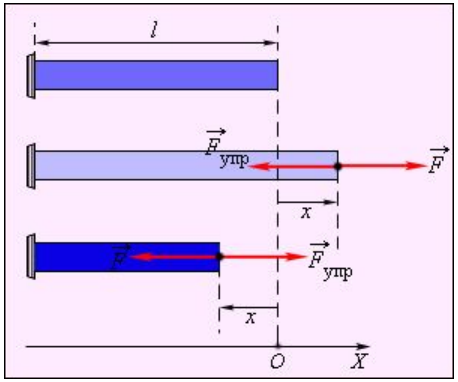
В этом случае вес тела **меньше** силы тяжести.

- **При свободном падении** опоры с телом **a = g**, **вес будет равен нулю** ($P=0$), т. е. наступает **состояние *невесомости*.**
- В состоянии невесомости тело **не оказывает давления** на соприкасающиеся с ними тела.

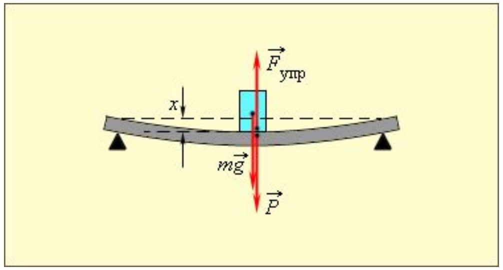
- Если **a > g**, то вес тела изменяет знак. Это означает, что **тело прижимается не** к полу кабины лифта, а **к потолку** (**«отрицательный» вес**).

+6

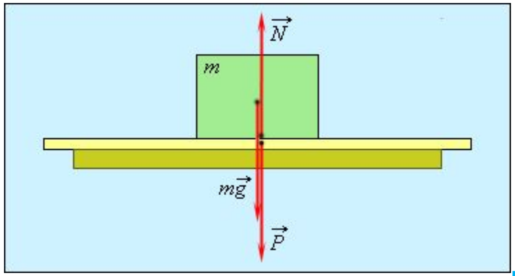
Сила упругости



деформации растяжения-сжатия



деформация изгиба



Сила реакции опоры

- Под действием приложенных к нему сил всякое реальное тело **деформируется**, т. е. изменяет свои размеры и формы.
  - Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, то деформация называется **упругой**.
  - Если деформации сохраняются после снятия нагрузки, то их называют **пластическими**.

При деформации тела возникает **сила**, которая стремится **восстановить прежние размеры и форму тела**. Эта сила возникает вследствие электромагнитного взаимодействия между атомами и молекулами вещества. Ее называют ***силой упругости***.

- Простейшими видами деформации являются **деформации растяжения-сжатия и сдвига**.
- Все остальные реально осуществимые на практике деформации, например, **кручение и изгиб**, сводятся к этим простейшим деформациям.

- **Упругую силу, действующую на тело со стороны опоры** (или подвеса), называют ***силой реакции опоры*** N или ***силой реакции подвеса*** T.
  - При соприкосновении тел сила реакции опоры направлена **перпендикулярно** поверхности соприкосновения.
  - Поэтому ее часто называют **силой нормального давления**.

Подробнее изучите самостоятельно

Силы трения

- Это силы, возникающие **при соприкосновении** поверхностей тел и **препятствующие** их относительному движению.
- Силы трения, как и упругие силы, имеют **электромагнитную** природу. Они возникают вследствие взаимодействия между атомами и молекулами соприкасающихся тел.

Различают трение двух видов:

1) **внешнее** (сухое)

2) **внутреннее** (вязкое).

- **Внешним трением** называют трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например, смазки, между ними.

1. Сила трения покоя возникает при попытке вызвать скольжение одного тела по другому. Сила трения покоя не может превышать некоторого максимального значения $(F_{тр})_{max}$.

$$F_{\text{тр. п.}}^{\max} = \mu_0 N$$

μ_0 - ***коэффициент трения покоя***, он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей

Если внешняя сила больше $(F_{тр})_{max}$, возникает относительное **проскальзывание**.

Силу трения в этом случае называют ***силой трения скольжения***. Она всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения и, вообще говоря, зависит от относительной скорости тел:

$$F_{\text{тр. ск.}} = \mu N$$

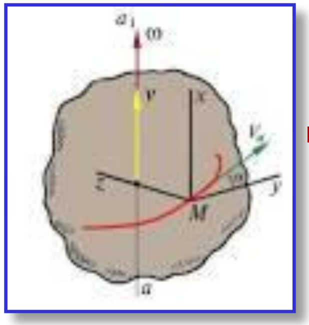
μ - ***коэффициент трения скольжения***, он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, а также от скорости относительного движения тел.

3. Сила трения качения действует со стороны опоры на катящееся по ней тело.

$$F_{\text{тр. к.}} = \frac{\mu_{\text{к}}}{r} N$$

$\mu_к$ - коэффициент трения качения,

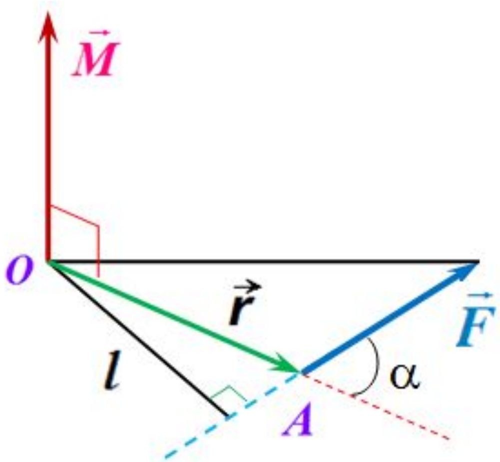
r - радиус тела



Момент силы

- Движение любого твердого тела можно рассматривать как сумму:

1. **поступательного движения** его центра масс и
2. **вращательного движения** относительно оси **O**, проходящей через его центр масс.



- **Момент силы** материальной точки относительно некоторого центра вращения **O** - векторная величина, равная **векторному произведению** радиус-вектора ***r***, проведенному из точки **O** в точку приложения силы **A**, на силу F:

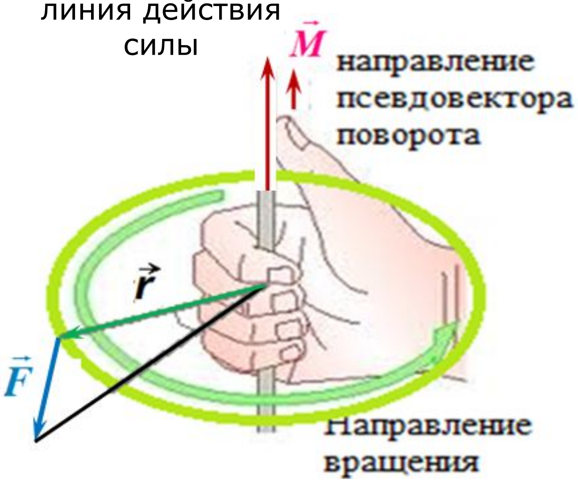
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Модуль момента силы

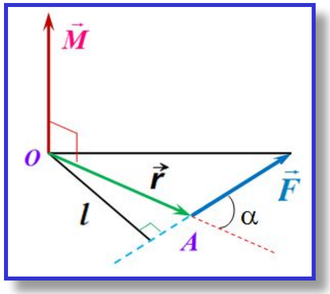
$$M = r \cdot F \cdot sin\alpha = F \cdot l$$

где l - плечо силы:

$$l = r \cdot sin\alpha$$

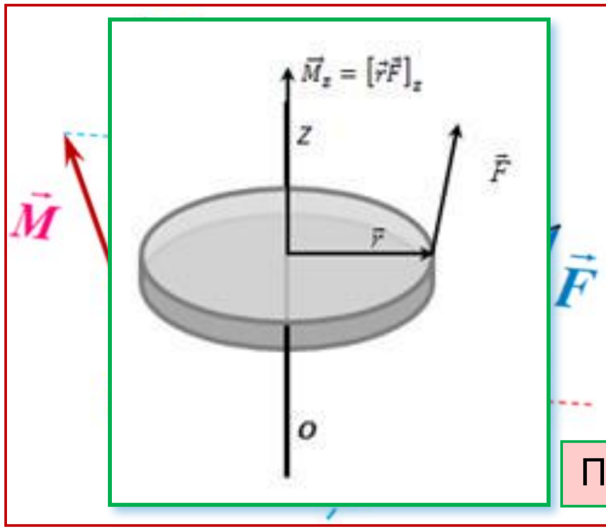


- **Направление момента силы** совпадает с осью вращения и определяется **по правилу правого винта** (буравчика, правой руки):
  - **Четыре пальца правой руки** – по направлению от первого вектора (r) ко второму (F), а согнутый большой палец укажет направление вектора M.
- Такие векторы называют **аксиальными** (**осевыми**) или **псевдовекторами**, чтобы подчеркнуть их отличие от обычных (иногда называемых **полевыми**) векторов.



Проекция **момента силы** M на произвольную ось

- **Момент силы** M характеризует **способность силы вращать тело** вокруг точки, относительно которой она берется.
- Пусть через точку **O** проходит ось **Oz**, тогда проекция вектора момента силы на эту ось M_z называется ***моментом силы относительно оси Z:***



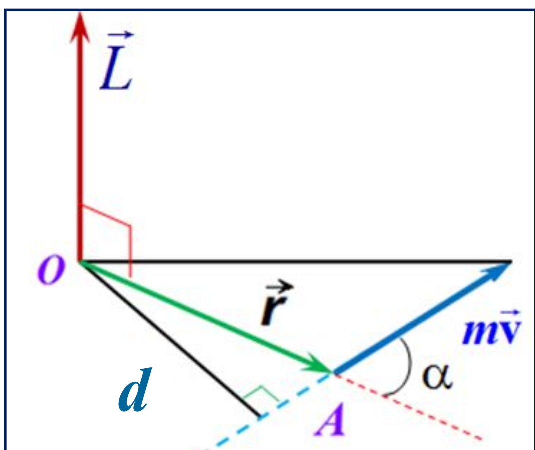
Пример

$$M_z = [\vec{r} \times \vec{F}]_z$$

Это **скалярная величина**, равная по модулю:

$$M_z = M \cdot \cos\beta$$

Она не зависит от выбора точки O на оси Oz и **характеризует способность силы** F **вращать тело вокруг этой оси**.

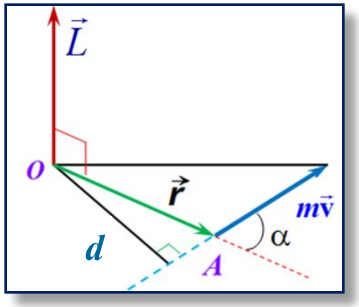


Момент импульса *материальной точки* L *относительно точки* O – это векторная величина, равная **векторному произведению** радиус-вектора r материальной точки, относительно точки **O** на ее импульс $p=mv$: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

Модуль момента импульса: где d – ***плечо импульса***:

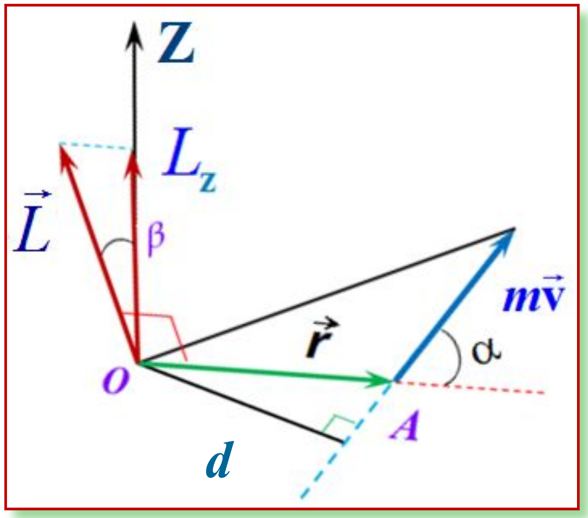
$$L = r \cdot mv \cdot \sin\alpha = mv \cdot d$$

$$d = r \cdot \sin\alpha$$



Проекция **момента импульса** L на произвольную ось

- **Момент импульса** L характеризует **способность силы изменять вращение тела** вокруг точки, относительно которой она берется.
- Пусть через точку **О** проходит ось **Oz**, тогда проекция вектора момента импульса на эту ось L_z называется ***моментом импульса относительно оси Z:***



$$L_z = [\vec{r} \times m\vec{v}]_z$$

Это **скалярная величина**, равная по модулю:

$$L_z = L \cdot \cos\beta$$

Она не зависит от выбора точки O

на оси Oz и **характеризует способность импульса** p **изменять вращение тела вокруг этой оси**.

Момент импульса L **механической системы** *относительно* некоторого центра - *точки* **О** – это векторная величина, равная **геометрической сумме моментов импульса** относительно той же точки **всех материальных точек** системы:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i \right]$$

Основное уравнение динамики вращательного движения для материальной точки

Итак, для материальной точки: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\mathbf{v}}$

Продифференцируем это уравнение по времени t:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

равно моменту силы

равно нулю

$\mathbf{v}$ - скорость материальной точки

F - сила, действующая на материальную точку

Скорость $\mathbf{v}$ и импульс $p = m\mathbf{v}$ имеют одно направление, то векторное их произведение равно нулю. Векторное же произведение r и F равно моменту силы М, действующему на тело:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Уравнение моментов: момент силы M, действующий на материальную точку, определяет изменение момента импульса L со временем.

- **Следствие:** если относительно некоторой точки ***О*** выбранной системы отсчета **момент** M всех сил, действующих на тело, **равен нулю** в течение интересующего нас промежутка времени, то **момент импульса** L тела относительно этой точки **остается постоянным** в течение этого времени.

Основное уравнение динамики вращательного движения для системы материальных точек

- По ***закону изменения импульса*** *механической системы*: **производная по времени** от импульса механической системы равна векторной сумме **внешних** сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^e$$

И учитывая:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

для механической системы материальных точек **основное уравнение** динамики вращательного движения :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}^e = \sum_{i=1}^{n} M_i^e \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k^e = \vec{M}^e$$

- ***Вывод:*** изменение момента импульса L системы определяется **суммарным моментом внешних сил** M^e , действующих на систему.
- **Закон изменения момента импульса механической системы:** производная по времени от момента импульса L системы относительно точки О **равна сумме моментов внешних сил** относительно этой точки.
- Тогда приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}^e dt$$

Если **сумма моментов внешних сил** равна **нулю**, то:

$$\vec{M}^e = 0 \Rightarrow \vec{L} = \sum_{k=1}^{n} \vec{L}_k = \text{const}$$

Но: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\mathbf{v}}$

Тогда: $\vec{p} = m\vec{\mathbf{v}} = \text{const}$

Закон сохранения момента импульса

- **У незамкнутых систем** может сохраняться не сам момент импульса L, а **его проекция** на некоторую неподвижную ось L_Z.
  - Это имеет место, когда проекция суммарного момента внешних сил на данную ось равна нулю $M^e{}_Z = 0$.
  - Действительно, проектируя уравнение на ось Z, получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e = 0 \Rightarrow L_z = \sum_{k=1}^{n} L_{k_z} = \text{const}$$

- **Закон сохранения момента импульса**, как и **закон сохранения импульса**, представляет собой **фундаментальный закон природы**.
- Он является следствием определенного свойства **симметрии пространства** - его **изотропности** (одинаковость свойств пространства во всех его направлениях).

Вывод: для любой системы материальных точек справедливо уравнение движения центра масс (1) и уравнение моментов (2):

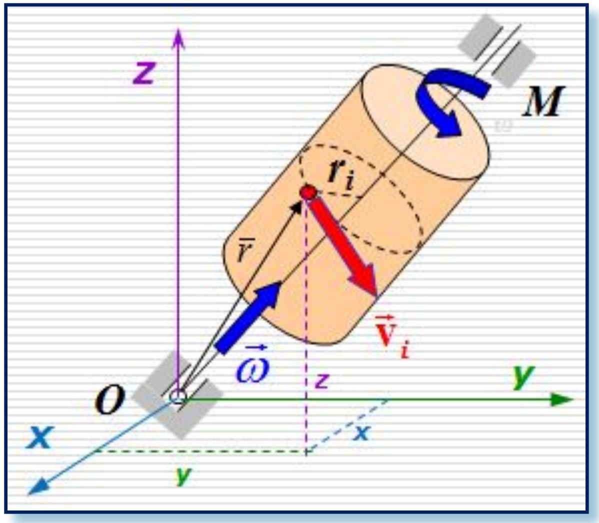
$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{F}^e \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e \quad (2)$$

Условие равновесия твердого тела: тело будет оставаться в состоянии покоя при выполнении двух условий:

1) сумма всех **внешних сил**, приложенных к телу, должна быть равна нулю $F^e = 0$;

2) суммарный **момент внешних сил** должен быть равен нулю $M^e = 0$.

+4



Момент инерции

- **Момент инерции твердого тела** относительно данной оси ***OM*** - физическая величина, являющаяся **мерой инертности тела во вращательном движении** вокруг этой оси и равная сумме произведений масс всех частиц тела m_i на квадраты их расстояний r_i^2 от той же оси ***OM***:

$$I_{OM} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Момент инерции твердого тела является **мерой инертности тела во вращательном движении** вокруг этой оси, зависит только от формы тела и расположения масс относительно оси.

Единицы измерения **момента инерции:** $I = [1\ кг \cdot м^2]$

Момент импульса точки относительно оси вращения:

$$L_{iOM} = r_i m_i \mathbf{v}_i = m_i r_i^2 \omega$$

где учтена связь линейной скорости с угловой: $\mathbf{v}_i = \omega \cdot r_i$

$$L_{OM} = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I_{OM}\omega \quad \Rightarrow \quad L_{OM} = I_{OM}\omega \quad \Leftrightarrow \quad p = m\mathbf{v}$$

$L_{OM} = I_{OM}\omega$ — для вращательного движения твердого тела

$p = m\mathbf{v}$ — для поступательного движения твердого тела

- **Понятие момента инерции** было введено при рассмотрении вращения твердого тела.
- Однако следует иметь в виду, что **каждое тело**, независимо от того, вращается оно или покоится, **обладает определенным моментом инерции** относительно любой оси.

Основное уравнение динамики вращательного движения

- **Момент инерции тела** **зависит от распределения массы** m относительно интересующей нас оси. Распределение массы тела характеризуется с помощью величины, называемой плотностью тела ρ.
- Заменим массу материальной точки m_i на массу $dm=\rho dV$ элементарного объема dV тела и перейдем от суммирования к интегрированию вдоль оси z:

$$I_z = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

где интегрирование проводится **по всему объему** тела V

Из уравнения моментов: $\frac{dL_z}{dt} = M_z^e$ где $L_z = I_z \omega$

Учтем, что угловое ускорение выражается через угловую скорость: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\Rightarrow I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = M_z^e$$

$$I_z \varepsilon = M_z^e$$

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$ma = F^e$$

Основное уравнение динамики поступательного движения (2-й закон Ньютона)

Из ***основного уравнения динамики вращательного движения*** видно, что момент инерции тела I_z является **мерой инертности тела** при вращательном движении: при одном и том же значении момента внешних сил M^e тело **с бóльшим моментом инерции** приобретает **мéньшее угловое ускорение** ε.

+6

Свойства момента инерции тела

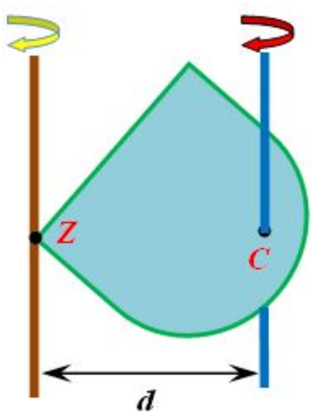
- Моменты инерции системы материальных точек и твердого тела определяются соотношениями:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \quad (1) \quad \text{или} \quad I_z = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV \quad (2)$$

- Если вычислить сумму (1) или интеграл (2), то момент инерции любого тела можно выразить через массу тела, его геометрические размеры и положение относительно оси вращения.

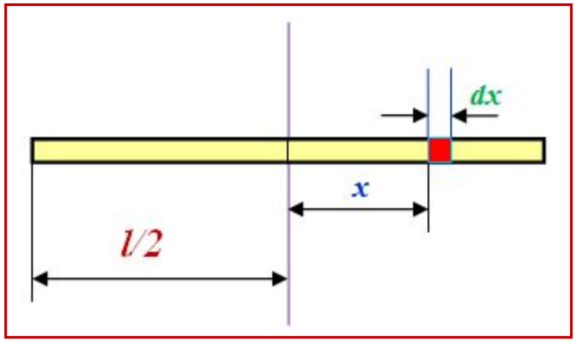
- Во многих случаях расчеты существенно упрощаются при использовании двух свойств момента инерции, которые следуют из определения этой величины.
- **Первое свойство** (***свойство аддитивности***). Момент инерции системы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции тел или всех частей системы относительно этой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad \text{или} \quad I = \int dI$$



- **Второе свойство** (***теорема Штейнера***). Момент инерции I_z тела относительно произвольной оси z равен сумме момента инерции I_{Cz} относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела C, и произведения массы m тела на квадрат расстояния d^2 между осями: $I_z = I_{cz} + md^2$
- Эта теорема сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, **проходящей через центр масс тела**.

Расчет момента инерции тонкого стержня



Длина стержня l, масса m.

Найти момент инерции относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр.

- Выделим элемент длины стержня длиной dx на расстоянии x оси вращения.
- Тогда масса этого элемента равна: $dm = \frac{m}{l} dx$

Момент инерции элемента: $dI = x^2 dm = \frac{m}{l} x^2 dx$

- Момент инерции получается посредством интегрирования по всем кольцам (с длиной x от $-l/2$ до $+l/2$):

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right) = \frac{ml^3}{3 \cdot 4l} = \frac{ml^2}{12}$$

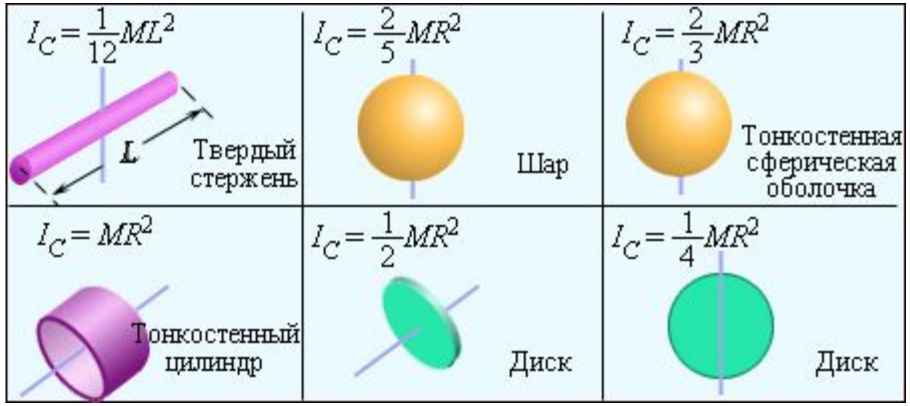
Момент инерции тонкого стержня:

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

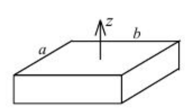
Момент инерции относительно оси, проходящей через один из его концов, находится с помощью теоремы Штейнера:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Заучите основные моменты инерции простых тел

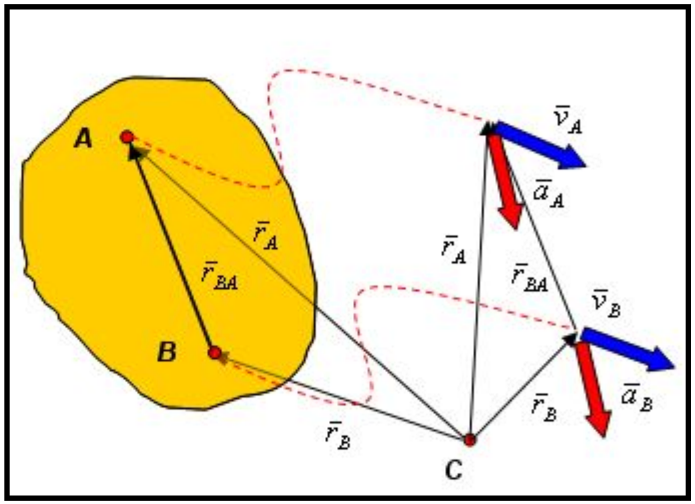


Моменты инерции однородных тел простейшей формы

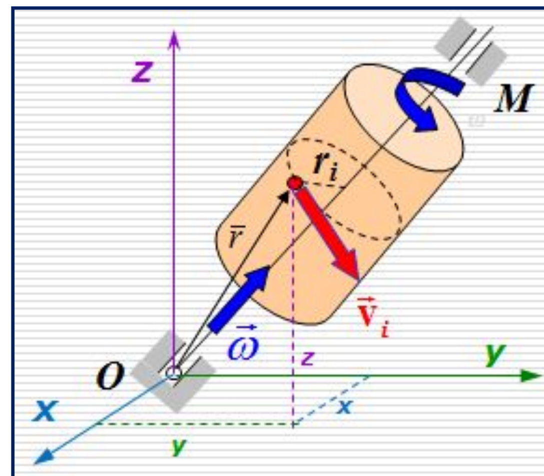
Тело	Положение оси	Момент инерции
1. Материальная точка	На расстоянии r от оси	$I_z = mr^2$
2. Полый тонкостенный цилиндр (или кольцо) радиуса R и массой m	Ось симметрии	$I_z = mR^2$
3. Диск (или цилиндр) радиуса R и массой m	Ось симметрии	$I_z = \frac{1}{2}mR^2$
4. Тонкий стержень длиной l и массой m	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$I_z = \frac{1}{3}ml^2$
5. Стержень длиной l и массой m	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$I_z = \frac{1}{12}ml^2$
6. Шар радиуса R и массой m	Ось проходит через центр шара	$I_z = \frac{2}{5}mR^2$
7. Параллелепипед		$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

Кафедра физики БГТУ
доцент Крылов Андрей Борисович

Спасибо за внимание!



Поступательное движение



Вращательное движение

Запомните, что **при вращении** существуют моменты:

1. Момент силы M. 2. Момент импульса L. 3. Момент инерции I. и их проекции на оси вращения