

Лекция 2

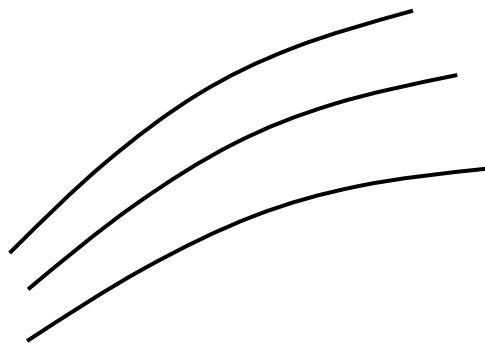
«Гидродинамика идеальной жидкости»

Содержание

1. Вихревое течение. Теорема Томсона.
2. Потенциальное течение идеальной жидкости.
3. Метод комплексного потенциала.

1. Вихревое течение. Теорема Томсона.

2 разновидности линий тока



Имеются источники и стоки

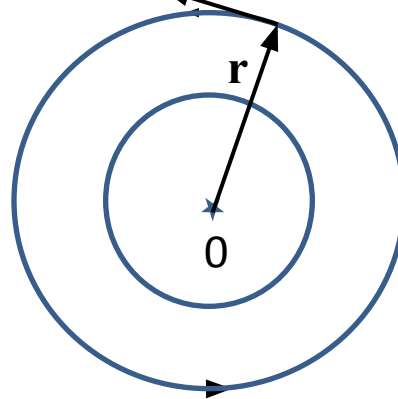
(погашение течения на ∞)
Линии тока не замкнуты

Циркуляци
я

$$\Gamma = \oint_L v dl$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Вихревое течение v



Имеется ось симметрии течения 0
с неподвижными точками течения

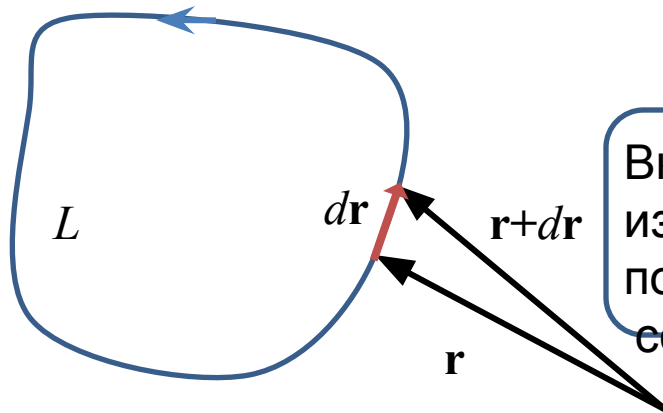
Линии тока замкнуты
На круговой линии тока $v \parallel dl$
(источники, стоки отсутствуют)

$$\Gamma = \oint_L v dl = \int_L v dl = v \int_L dl = v 2\pi r$$

Теорема Томсона:

Циркуляция по «жидкому» контуру L , - т.е. по контуру, движущемуся вместе с жидкостью, при изоэнтропическом течении не меняется со временем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{r} = \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} + \oint_L \mathbf{v} \frac{d}{dt} (d\mathbf{r})$$



Вклад в циркуляцию из-за изменения потока со временем

Вклад в циркуляцию из-за изменения контура

$$1) \quad \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = - \oint_L \nabla w d\mathbf{r} \quad \text{т.к. из уравнения Эйлера}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{\nabla p}{\rho} = - \nabla w$$

$$w - \text{энтуальпия (термодинамика): } dw = T ds + \frac{1}{\rho} dp \quad \Rightarrow \quad dw|_{s=\text{const}} = \frac{1}{\rho} dp$$

По
теореме
Стокса:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} \longrightarrow \oint_L \nabla w d\mathbf{r} = \oint_L \text{grad } w d\mathbf{r} = \int_S \underbrace{\text{rot}(\text{grad } w)}_{\equiv 0} d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = 0$$

$$2) \oint_L \mathbf{v} \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}) = \oint_L \mathbf{v} d\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{v} = \oint_L d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$$

$$\oint_L \mathbf{v} \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}) = 0$$

Подынтегральная
функция – полный
дифференциал.
Поэтому интеграл
вдоль замкнутого
контура = 0

Равенства нулю обеих интегралов дает в
итоге
теорему Томсона:
 $\Gamma = \text{const}$



$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \text{что} \\ \text{доказывает}$$

2. Потенциальное течение идеальной

ЖИДКОСТИ.

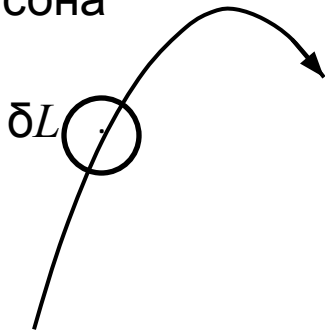
Течение жидкости, для которого $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ называется **потенциальным** или **безвихревым**. Тогда

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi$$

ϕ –
потенциал

Вместо определения векторного поля течения жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ имеем

более простую задачу определения скалярного поля
Уточнение понятия потенциальности течения на основе теоремы Томсона



δL – предельно малый контур вокруг произвольной точки на линии тока

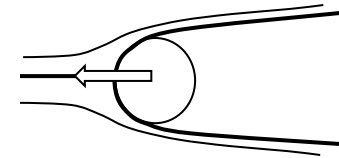
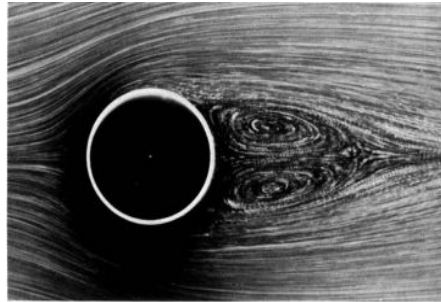
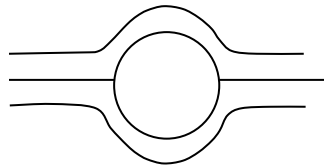
$$\Gamma = \oint_{\delta L} \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int_{\delta S} \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{S} \Rightarrow \Gamma = \text{rot } \mathbf{v} \delta S = \text{const}$$

из-за стягивающегося к точке линии тока контура величина $\text{rot } \mathbf{v}$ в пределах площади контура постоянна

Потенциальность течения $\text{rot}v=0$ – частное следствие теоремы Томсона
при $\Gamma=0$. Нулевая циркуляция должна соблюдаться для всех точек на

линиях тока. Для течения реальных жидкостей это условие выполняется не всегда.

Парадокс Даламбера (обтекание цилиндра)



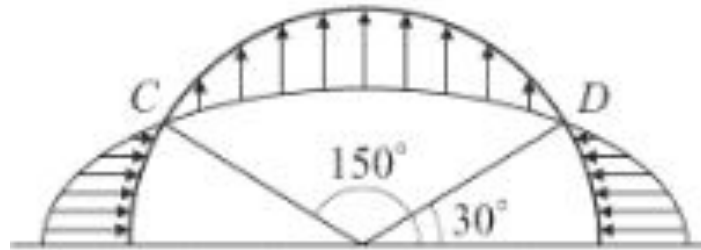
Сохранение нулевой циркуляции невозможно для линий тока, проходящих, хотя бы частично, по поверхности обтекаемого тела, т.к. на участках обтекания тела контур δL уже невозможно замкнуть, что значило бы его проникновение внутрь тела.

Примерная линия тока, вдоль которой нарушается условие нулевой циркуляции, показана на левом рис. штриховой кривой, состоящей из двух горизонтальных участков априорно с нулевой циркуляцией и замкнутого контура обтекания с точками ненулевой циркуляции.

Другой пример - картина отрывного течения жидкости на правом рис. , когда за быстро движущимся телом образуется полость (каверна). Границы полости вместе с участком обтекания тела, показанные жирной линией, представляют линию тока в точках которой не выполняется сохранение нулевой циркуляции из-за невозможности продолжения контура.

Существование наряду с "правильными" линиями тока (тонкие сплошные линии на левом и правом рисунках) линий тока с несохраняющейся циркуляцией (критические линии тока), выражает неоднозначность решений уравнений гидродинамики идеальной жидкости, вытекающей из недостаточной адекватности ее модели. Критические линии тока с участками ненулевой циркуляции оказываются источниками вихреобразования (средний рисунок).

Вследствие вихреобразования симметричная картина течения и распределения давления относительно вертикальной оси пропадает



Симметричная картина распределения давления по верхней части цилиндра обуславливает отсутствие силы сопротивления, действующей на цилиндр (парадокс Даламбера)

Л. Эйлер объяснил происхождение парадокса неадекватностью модели идеальной жидкости, не учитывающей вязкость.

3. Метод комплексного

потенциала

Общие требования

- плоские потенциальные стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости: $\rho = \text{const}$, $\partial \rho / \partial t = 0$, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$

Уравнение
неразрывности

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\rho \mathbf{v}) \Rightarrow \text{div}(\mathbf{v}) = 0$$

Уравнение Эйлера с учетом $\nabla P = 0$, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ и равенства

$$\frac{\nabla(\mathbf{v}^2)}{2} = (\mathbf{v} \times \boxed{\text{rot}(\mathbf{v})}) + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \quad \text{дополнительно к } \boxed{\text{rot}(\mathbf{v}) = 0}$$

дает закон Бернулли

Потенциал ϕ определяет скорость течения:

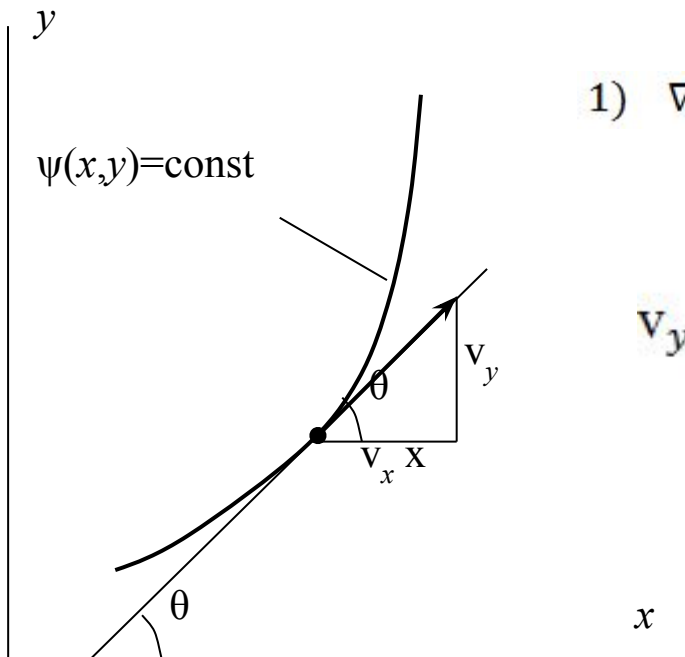
$$\mathbf{v} = \nabla \phi$$

и удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$

Линии тока: в 2-х мерном случае ψ

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \equiv 0 \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$v_x dy - v_y dx = 0$$



- 1) $\nabla^2 \psi = 0$ 2) линии тока
ортогональны линиям
равного потенциала

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

условия аналитичности Коши-Римана

Комплексный потенциал $W(z)=\phi(x,y)+i\psi$
(x,y)

$$z=x+iy$$

Отображение $z \Rightarrow W(z)$ определяет функции ϕ и ψ ,
описывающие течение идеальной жидкости

Требования к отображению $z \Rightarrow W(z)$:

- 1)аналитичность функции W
- 2)сохранение углов (ортогональность)
- 3)однолиственность

1. Течение в угловой области

Течение в угловой области с углом раскрыва $\alpha < \pi/2$

$$\alpha := \frac{\pi}{3} \quad n := \frac{\pi}{\alpha} \quad n = 3 \quad A := 1$$

$$i := \sqrt{-1}$$

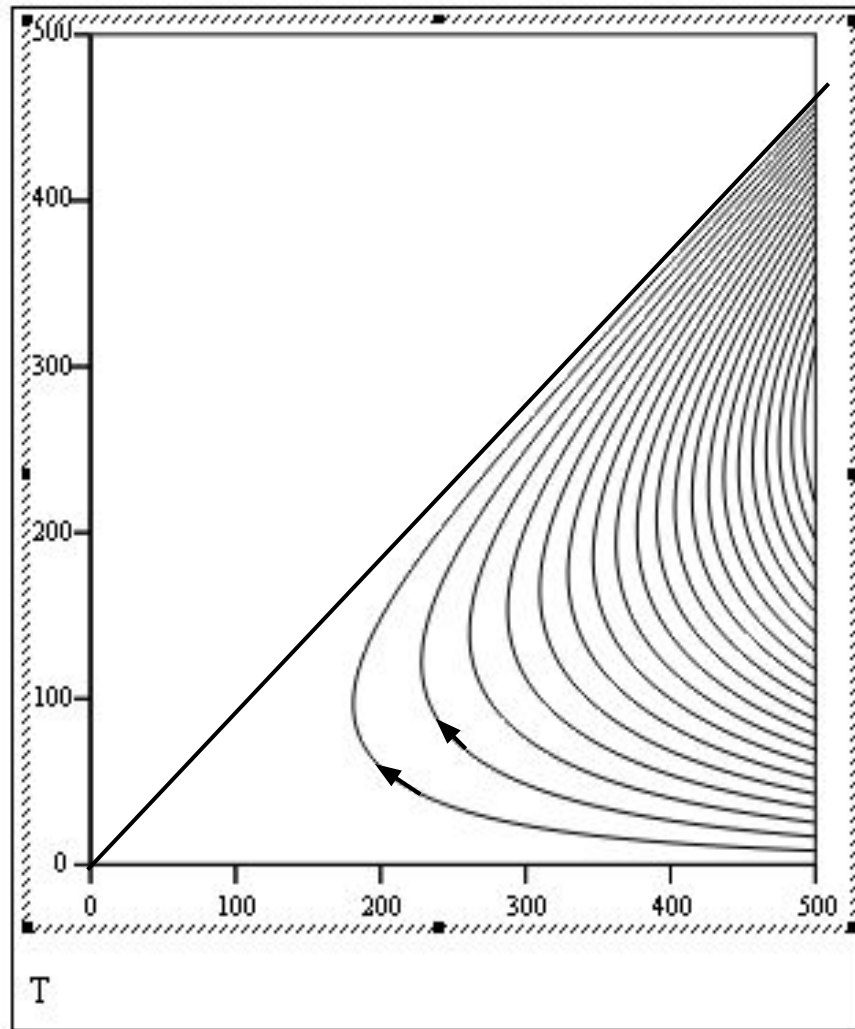
$$\Psi(x, y) := \begin{array}{|l} z \leftarrow x + i \cdot y \text{ if } y \leq \tan(\alpha) \cdot x \\ w \leftarrow A \cdot z^n \\ p \leftarrow \text{Im}(w) \\ p \end{array}$$

$$x_0 := 0 \quad x_m := 100 \quad N := 500 \quad M := 800$$

$$k := 0..N \quad x_k := x_0 + k \cdot \frac{x_m}{N}$$

$$j := 0..N \quad y_0 := 0 \quad y_m := 300 \quad y_j := y_0 + j \cdot \frac{y_m}{M}$$

$$T_{k,j} := \Psi(x_k, y_j)$$



Картина линий тока в остро-
уголовой области

Течение в области тупого угла

$$\alpha := \pi - \frac{\pi}{2.06} * \quad n := \frac{\pi}{\alpha} * \quad n = 1.943 \quad A := 1$$

$$i := \sqrt{-1} *$$

$$\Psi(x, y) := \begin{cases} z \leftarrow x + i \cdot y & \text{if } y \geq \tan(\alpha) \\ w \leftarrow A \cdot z^n \\ p \leftarrow \text{Im}(w) \\ p \end{cases}$$

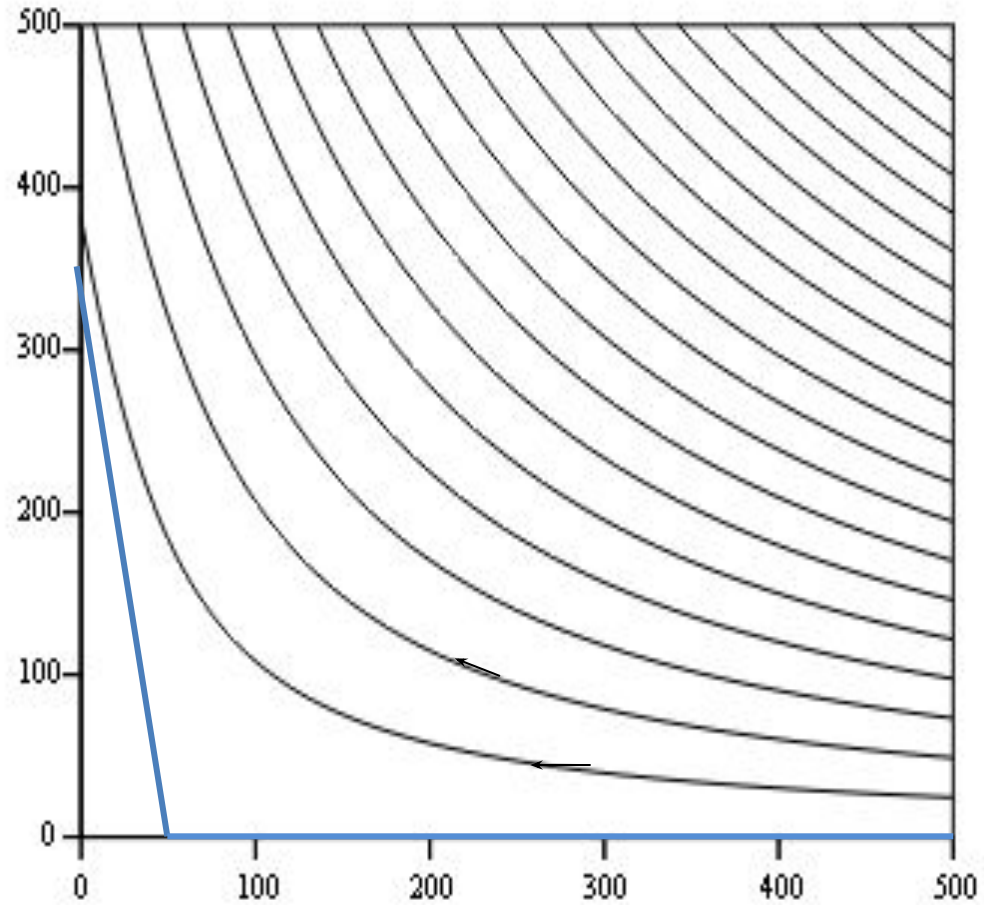
$$x0 := 0 \quad xm := 100 \quad N := 500 \quad M := 800$$

$$k := 0..N \quad x_k := x0 + k \cdot \frac{xm}{N}$$

$$j := 0..N \quad y0 := 0 \quad ym := 300 \quad y_j := y0 + j \cdot \frac{ym}{M}$$

$$T_{k,j} := \Psi(x_k, y_j)$$

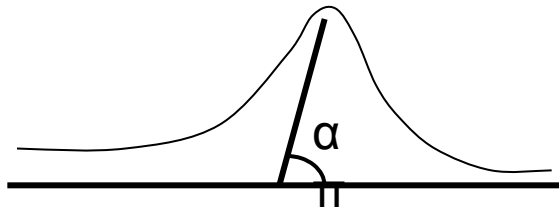
Течение в угловой области $\alpha > \pi/2$



T

2. Горизонтальное течение со стенкой

Конформное преобразование $w = (iz - 1)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} iz\right)^{1-\alpha}$



```
w(x, y, alpha) :=  
  i ← √-1  
  z ← x + i·y  
  p ← (z·i - 1)alpha ⋅ ⎛ 1 +  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$  · z·i ⎞1-alpha  
  q ← Re(p)  
  return q
```


$$\alpha := 0.502$$

$$\psi(x, y) := w(x, y, \alpha)$$

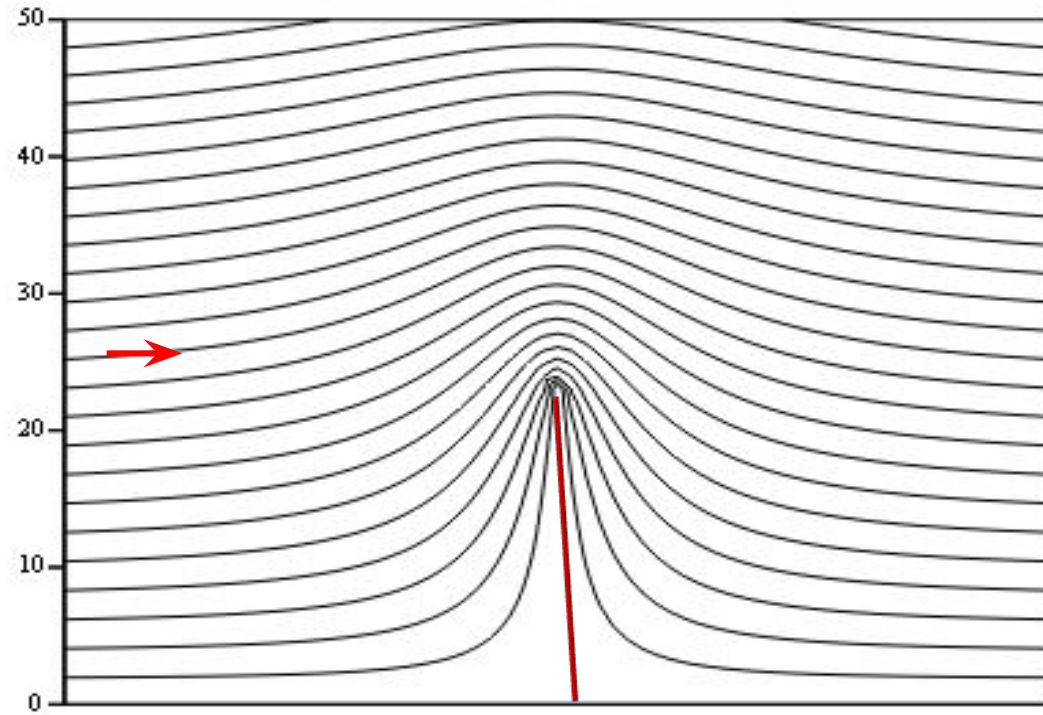
$$N := 70 \quad M := 50$$

$$x_0 := -3 \quad x_m := 3 \quad k := 0..N$$

$$y_0 := 0 \quad y_m := 3 \quad j := 0..M$$

$$x_k := x_0 + \frac{(x_m - x_0)k}{N} \quad y_j := y_0 + j \cdot \frac{y_m - y_0}{N}$$

$$T_{k,j} := \psi(x_k, y_j)$$



T

Обтекание цилиндра

Конформное преобразование: $w = z + \frac{R^2}{z}$

```
w(x, y) :=  $\left\{ \begin{array}{l} i \leftarrow \sqrt{-1} \\ z \leftarrow x + i \cdot y \\ p \leftarrow z + \frac{1}{z} \text{ if } |z| > 1 \\ q \leftarrow \text{Im}(p) \text{ if } \text{Im}(z) > 0 \\ q \leftarrow -\text{Im}(p) \text{ if } \text{Im}(z) < 0 \\ \text{return } q \end{array} \right.$ 
```

$R=1$

$\psi(x, y) := w(x, y)$

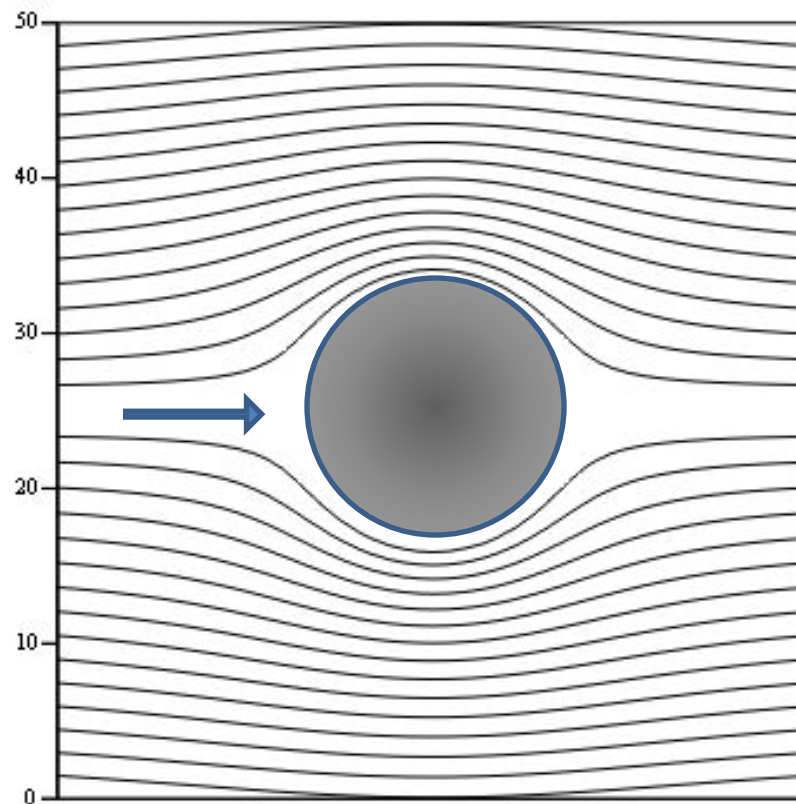
$N := 50 \quad M := 50$

$x_0 := -3 \quad x_m := 3 \quad k := 0..N$

$$y_0 := -3 \quad y_m := 3 \quad j := 0..M$$

$$x_k := x_0 + \frac{(x_m - x_0)k}{N} \quad y_j := y_0 + j \cdot \frac{y_m - y_0}{N}$$

$$T_{k,j} := \psi(x_k, y_j)$$

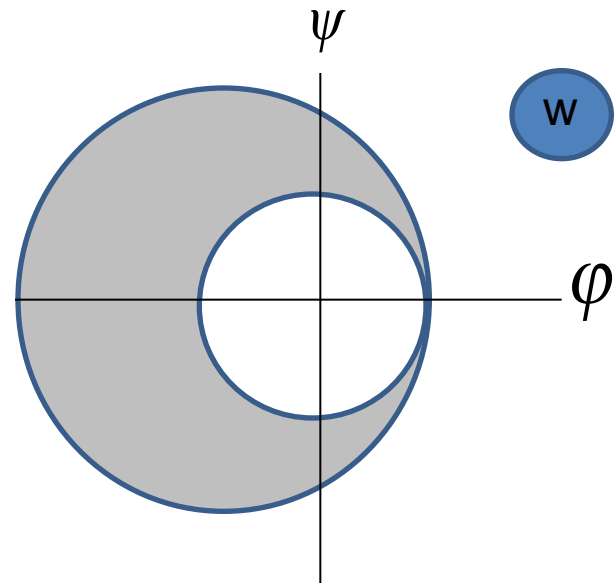
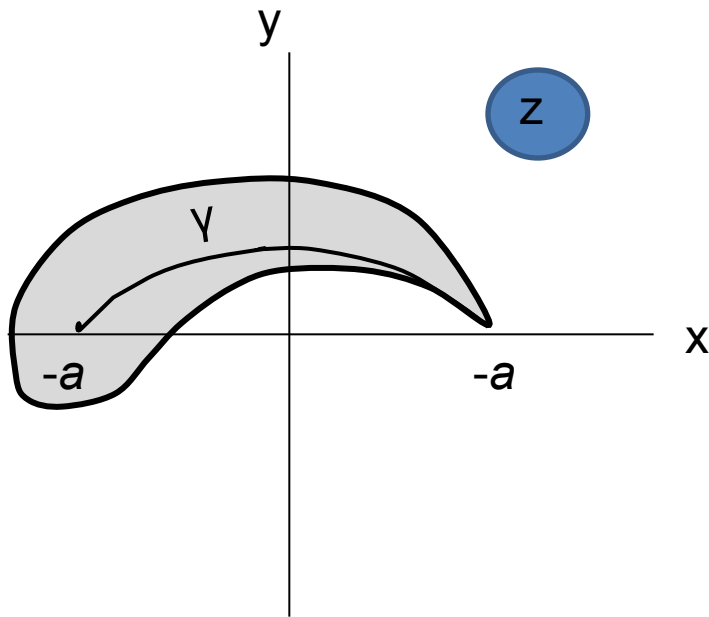


T

Обтекание крыла (задача Жуковского)

Конформное преобразование

$$W(z) = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{a+z} + \sqrt{a-z}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{a+z} - \sqrt{a-z}}$$



$$a := 0.2 \quad b := 0.25 \quad c := 1.0 \quad i := \sqrt{-1}$$

$$k := 0..40 \quad j := 0..3 \quad u_k := 0.1 \cdot (20 - k)$$

$$A_{j,k} := u_k + (j + 1) \cdot 0.1 \cdot i \quad n := 10..30 \quad m := 0..9 \quad r := 0..1$$

$$\text{step}(x) := 2 \cdot (\Phi(x) - 0.5) \quad \mathbb{T}(z) := z + \text{step}(\text{Re}(z)) \cdot \sqrt{z^2 - 1} \quad U := \overrightarrow{\mathbb{T}(A)}$$

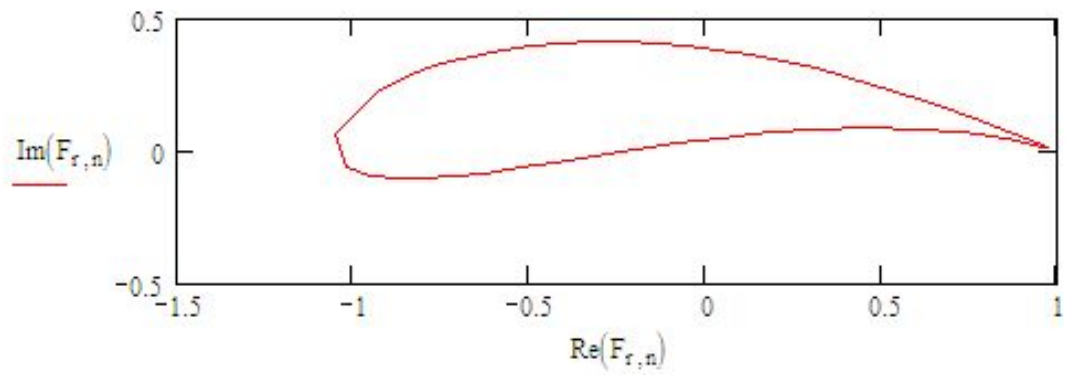
$$L := -U \quad R(z) := z + \text{step}(z + 1) \cdot \sqrt{z^2 - 1} \quad M := \overrightarrow{R(u)}$$

$$N := -M \quad W := \text{augment}(\text{augment}(\text{augment}(M, N), U^T), L^T)^T$$

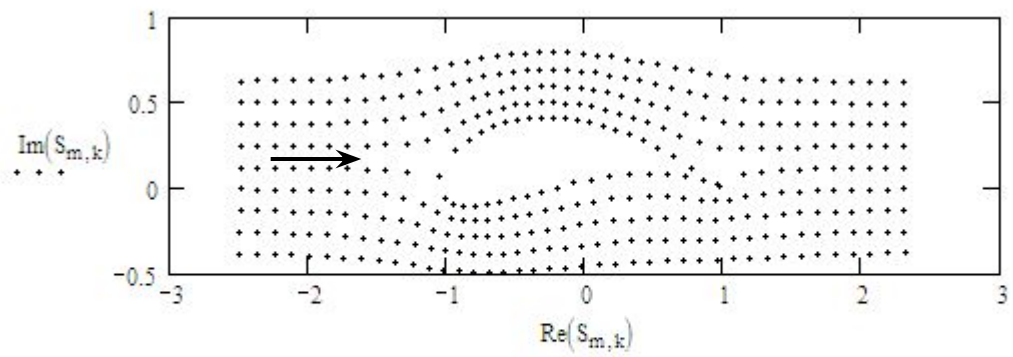
$$f := c \cdot \sqrt{(a + 1)^2 + b^2} \quad J(z) := 0.5 \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$H := f \cdot W - a + b \cdot i \quad S := \overrightarrow{J(H)} \quad \text{hi} := \max(S^{\langle 40 \rangle}) - 0.1$$

$$\text{lo} := \min(S^{\langle 0 \rangle}) + 0.1 \quad F := \text{augment} \left[(S^T)^{\langle 0 \rangle}, (S^T)^{\langle 1 \rangle} \right]^T$$



профиль обтекания



картина течения