

# Лекция 4

## «Волны в идеальной жидкости»

### Содержание:

1. Гравитационные волны (жидкость неограниченной глубины).
2. Звуковые волны.

# 1. Гравитационные волны (жидкость неограниченной глубины)

- В современной физике волны – краеугольный камень в изучении линейных (а благодаря компьютерным технологиям и нелинейных) динамических процессов.
- Оптика, акустика, электродинамика (радиофизика) – полностью волновые разделы физики.
- Гидромеханика – волны (ударные и акустические) в атмосфере и гидросфере, волны на поверхностях и внутренних границах жидких сред (гравитационные волны, капиллярные волны, внутренние волны, волны в каналах и пр.).
- Сфера приложений: метеорология, волнозащита прибрежных сооружений, кораблестроение (волнообразование при движении кораблей), защита от акустического шума, гидролокация.

Гравитационные волны – волны на поверхности воды (рис. 1), для существования которых фундаментальную роль играет сила тяжести



Рис. 1

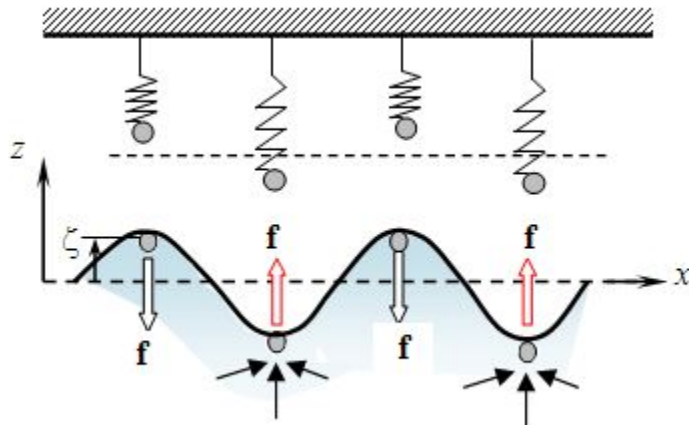


Рис. 2

(отсюда название; не путать с гравитационными волнами специальной теории относительности - предсказаны, обнаружены 2016 г. )

Возбуждаются: при ударе по поверхности жидкости, ветровом воздействии, движении кораблей.

Сила тяжести при вертикальных отклонениях поверхности жидкости – возвращающая сила.

Частицы жидкости во впадинах выдавливаются вверх. Горбы и впадины аналогичны сжатым и растянутым пружинам осцилляторов.

## Исходные допущения:

1. Жидкость неограниченно большой глубины  $-\infty < z \leq 0$
2. Отклонения поверхности  $\zeta$  настолько малы, что им сопутствуют малые скорости  $v$ , позволяющие пренебречь нелинейным членом в уравнении Эйлера и в силу условия  $|v| \ll c$  ( $c$  – скорость звука) принять жидкость несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ), а течение потенциальным ( $v = \nabla \phi$ ).

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad})v = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P \quad \Rightarrow \quad \nabla \left( \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + P \right) = 0 \quad \nabla^2 \phi = 0$$

**Основная трудность решения** заключается в формулировке граничного условия, поскольку поверхность жидкости не остается фиксированной и испытывает отклонения.

Обратимся с этой целью к уравнению, которое должно выполняться во всей области  $z \leq \zeta$ , включая и саму границу.

$$\nabla \left( \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + P \right) = 0$$

от координат  
не зависит

$$\nabla\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P\right) = 0 \implies \nabla\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho_0 g z\right) = 0 \implies \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho_0 g z = \mathbf{P}(t)$$

Производимая волной разность давлений  $\Delta P = \mathbf{P}(t) - p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_0 g z$  в точках границы  $z = \zeta$  должна отсутствовать независимо от вида возмущений (граница с вакуумом). Отсюда имеем граничное условие

$$\boxed{\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + g\zeta = 0}$$

Решение уравнения Лапласа ищем в виде  $\varphi = f(z) \exp[i(kx - \omega t)]$

Подстановка  $\Rightarrow$  к ОДУ  $\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$  что дает  $f(z) \propto \exp[\pm k(z - \zeta)]$

В области решения из-за возмущения границы волной  $z - \zeta < 0$  и по требованию ограниченности выбираем положительный знак

В итоге имеем решение вида:

$$\varphi = \varphi_0 \exp[k(z - \zeta)] \exp[i(kx - \omega t)]$$

### Вывод дисперсионного соотношения

По условиям возбуждения величины  $\varphi_0, \omega$  известны. Волновое число  $k$  еще подлежит определению.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \Rightarrow \zeta = \frac{i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\zeta}}{\omega}$$

Преобразованное граничное условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + g \zeta = 0 \quad \longrightarrow \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{z=\zeta} + g \frac{i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\zeta}}{\omega} = 0$$

Подстановка  $\varphi$  в ГУ:  $-i\omega \varphi \exp[i(kx - \omega t)] + g \frac{i}{\omega} k \varphi \exp[i(kx - \omega t)] = 0$

приводит к дисперсионному соотношению

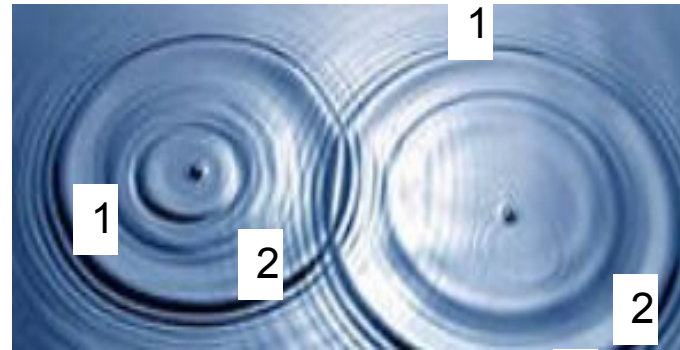
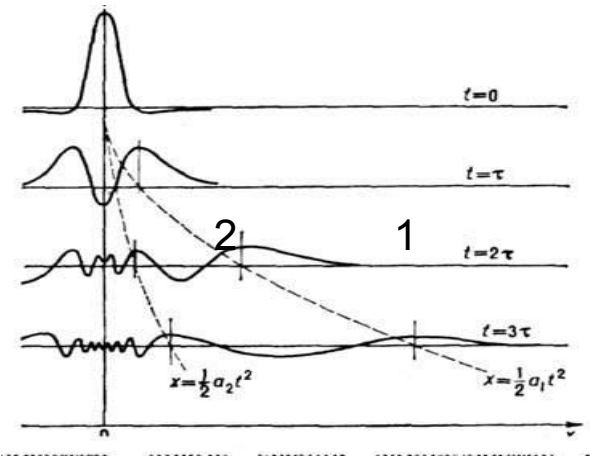
$$k = \frac{\omega^2}{g}$$

Дисперсионное соотношение дает

недостающее значение  $k$  и завершает построение решения

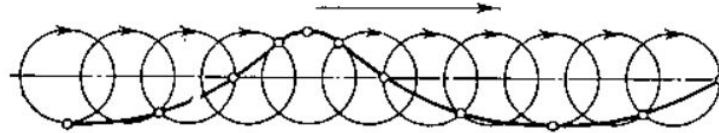
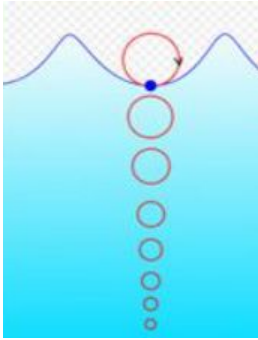
## Особенности гравитационных волн на глубокой воде

1. Частотная дисперсия:  $\omega = \omega(k)$  вида  $\omega = \sqrt{kg}$   $v = \frac{\omega}{k} = g/\omega$
2. Искажение импульсов, цугов волн



Групповая скорость  $U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{v}{2}$

## Траектории частиц



## Компоненты вектора скорости

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x} [\text{Re}(\varphi)] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi_0 e^{k(z-\zeta)} \cos(kx - \omega t) \right] = -\varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \sin(kx - \omega t)$$

$$v_z = \frac{\partial}{\partial z} [\text{Re}(\varphi)] = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varphi_0 e^{k(z-\zeta)} \cos(kx - \omega t) \right] = \varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \cos(kx - \omega t)$$

В каждой точке  $(x, z)$  области жидкости вектор скорости  $\mathbf{v}$  вращается равномерно, оставаясь неизменным по величине:  $|\mathbf{v}| = \text{const}$

В лагранжевом представлении  $(x, z)$  – координаты выделенной частицы)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \sin(kx - \omega t) \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \cos(kx - \omega t)$$



$$x(t) = \int v_x dt \Rightarrow x - x_0 = -\varphi_0 e^{k(z_0 - \zeta)} \frac{k}{\omega} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$z(t) = \int v_z dt \Rightarrow z - z_0 = -\varphi_0 e^{k(z_0 - \zeta)} \frac{k}{\omega} \sin(kx_0 - \omega t)$$

Уравнения движения частицы жидкости в параметрической форме. Показывают, что частицы жидкости в гравитационной волне описывают вокруг точек  $x_0, y_0$  окружности с радиусами, экспоненциально уменьшающимися с удалением вглубь жидкости. При совершении еще и равномерного горизонтального перемещения со скоростью волны  $v$  образующаяся при  $z_0 = \zeta \equiv 0$  кривая изображает поверхностный профиль волны.

## 2. Звуковые волны

Звуковые волны – малые возмущения сжатия. Принципиально важен учет сжимаемости среды. Уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

рассматриваются обычно с учетом адиабатической связи  $p = p(\rho)$

Адиабатическая связь  $p(\rho)$  – следствие обычно быстрого протекания акустических процессов, когда теплопередача между участками среды практически отсутствует

## Равновесное состояние и отклонения от равновесия

В отсутствие звуковой волны жидкость характеризуют равновесными значениями плотности  $\rho_0$  и давления  $p_0 = p(\rho_0)$

Под действием звуковой волны возникают отклонения

$$\rho' = \rho - \rho_0, \quad p' = p - p_0$$

Зависимость  $p=p(\rho)$  разлагают в ряд по этим отклонениям

$$p = p_0 + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Big|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s \Big|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

В линейном приближении по малым отклонениям

$$\rho' \ll \rho_0, \quad p' \ll p_0$$



$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{v} \quad \text{– волновое уравнение}$$

Так как  
 $\mathbf{v} = \nabla \phi$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cong -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad \Rightarrow \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p'$$

и благодаря связи  $p' = c^2 \rho'$

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho'$$

Предпочтение отдается записи волнового уравнения для давления (оно обычно измеряется в эксперименте)

## Плоские звуковые волны

Опуская далее штрихи у звуковых давления и плотности, имеем

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

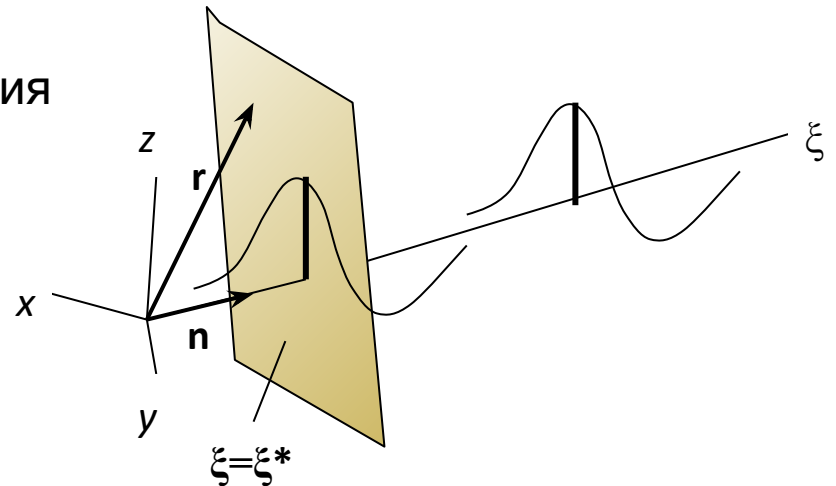
В плоской звуковой волне, распространяющейся в направлении вектора  $\mathbf{n}$

$$p = PF(\xi - ct), \quad \xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

$\xi$  – координата, отсчитываемая по направлению распространения

$c$  – скорость распространения волны (скорость звука)

$F$  – функция, описывающая волновой профиль



## Продольность звуковых волн

Обратимся к представлению волны потенциалом  $\varphi = \Phi F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$

Тогда скорость частиц в волне  $\mathbf{v} = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{n} \Phi F'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$

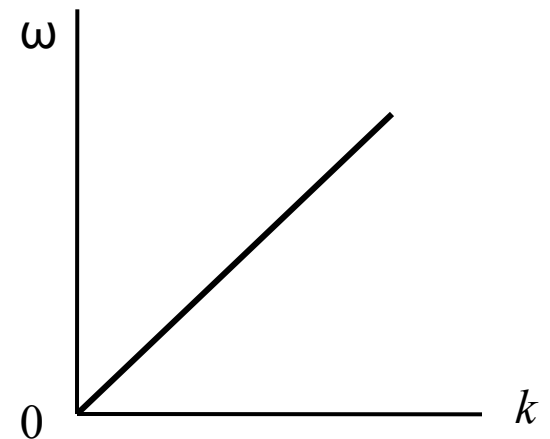
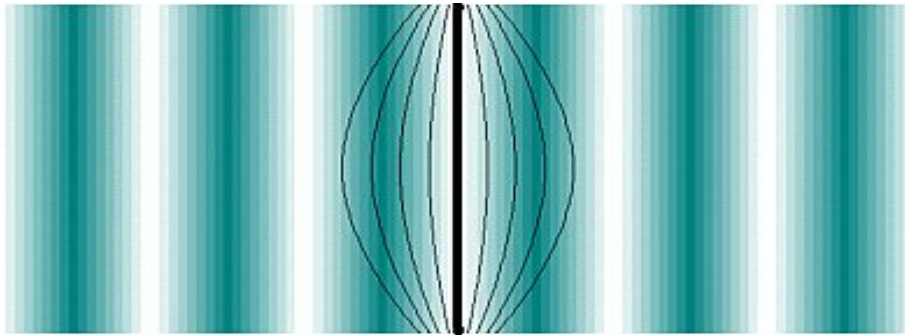
Отсюда:  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$  - частицы движутся по направлению распространения волны, т.е. звуковые волны являются продольными.

**Плоские гармонические волны**  $F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \begin{cases} \rightarrow \sin(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \\ \rightarrow \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \end{cases}$

$$p = P \cos[k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \Rightarrow p = P \cos[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

$\mathbf{k} = \mathbf{n}k$  - волновой вектор,  $\omega = kc$  -

частота  
 $p = P \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  - экспоненциальная форма записи



Спектр звуковых волн в идеальной жидкости

# Шаровые и цилиндрические звуковые волны

Решение волнового уравнения в сферических координатах в случае независимости поля от угловых координат

$$p = P \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

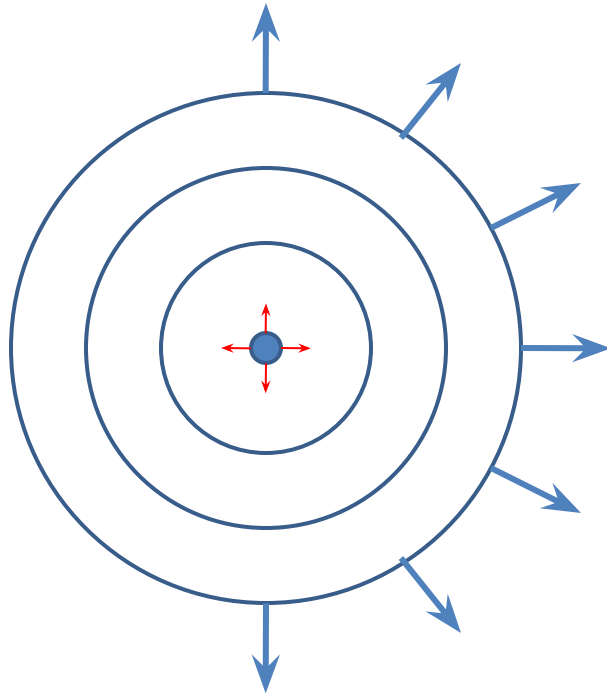


$$p = \frac{P}{r} \exp[i(kr - \omega t)]$$

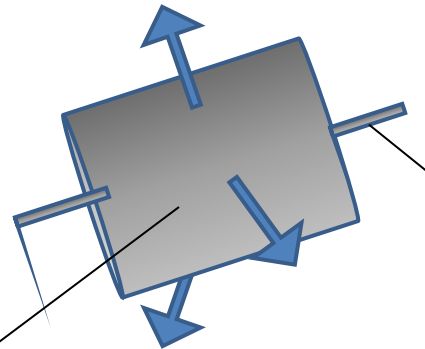
Шаровая волна

$$p = \frac{P}{\sqrt{r}} \exp[i(kr - \omega t)]$$

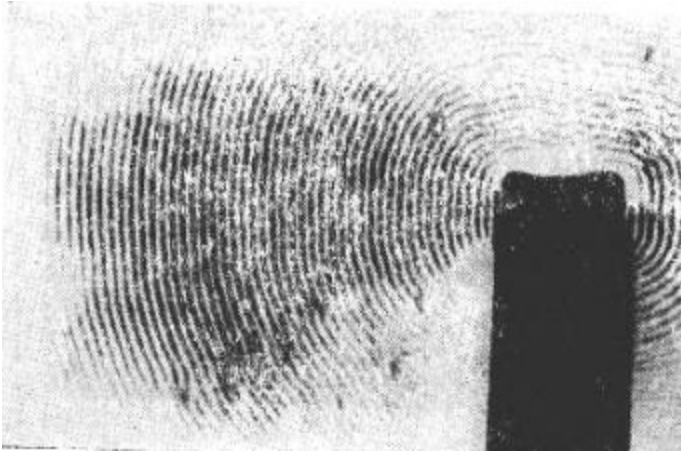
Цилиндрическая волна



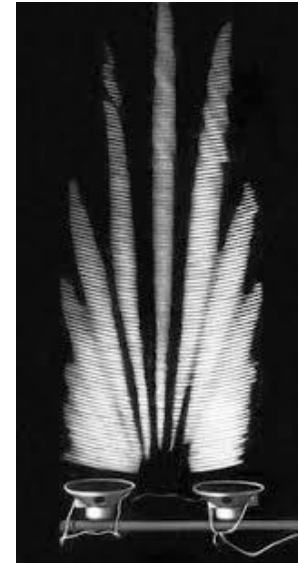
Цилиндрический фронт волны



Линейный пульсирующий источник



Волновое поле колеблющегося кварца размером в  $4\lambda$



Интерференция полей излучателей



Отражение и преломление ультразвукового пучка на границе «керосин-вода»



Дифракция Френеля ультразвуковой волны на краю экрана и шаре