

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

## ЛЕКЦИЯ 5

### МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

# КОЛЕБАНИЯ

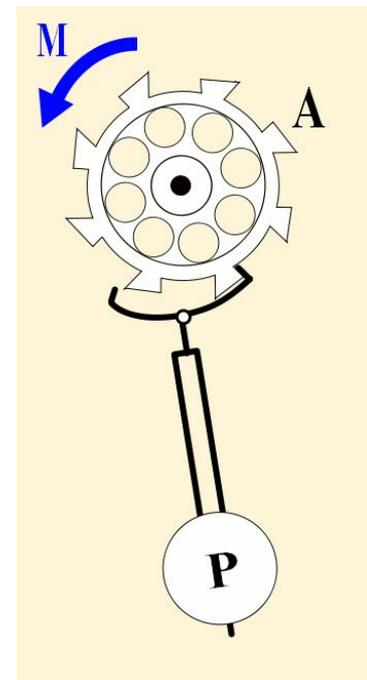
Колебания – это движения или состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.



# КОЛЕБАНИЯ

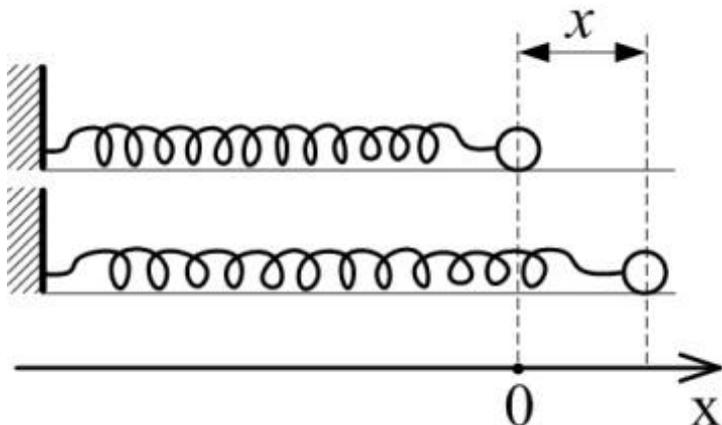
Следует отметить, что среди всевозможных периодических наибольшее значение имеют гармонические колебания. Это связано с тем, что многие колебания в природе и технике близки к гармоническим, а негармонические периодические колебания могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Особенностью гармонических колебаний является то, что такие движения или процессы



# КОЛЕБАНИЯ

## Свободные колебания



**Свободные колебания** – это колебания, совершающиеся при отсутствии внешнего воздействия за счёт первоначально внесённой энергии (потенциальной или кинетической).

Рассмотрим колебания груза на пружине в горизонтальной плоскости.

Если растянуть пружину на  $x$  от первоначального равновесного состояния (трение груза о горизонтальную плоскость пренебрежимо мало), возникнет упругая сила, проекция которой на ось  $x$  определяется выражением  $f = -kx$  ( $k$  – коэффициент жесткости пружины). Запишем II закон Ньютона для груза массой  $m$  в проекции на ось  $x$ :

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x.$$

# КОЛЕБАНИЯ

Отсюда следует уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0^2 = k/m$$

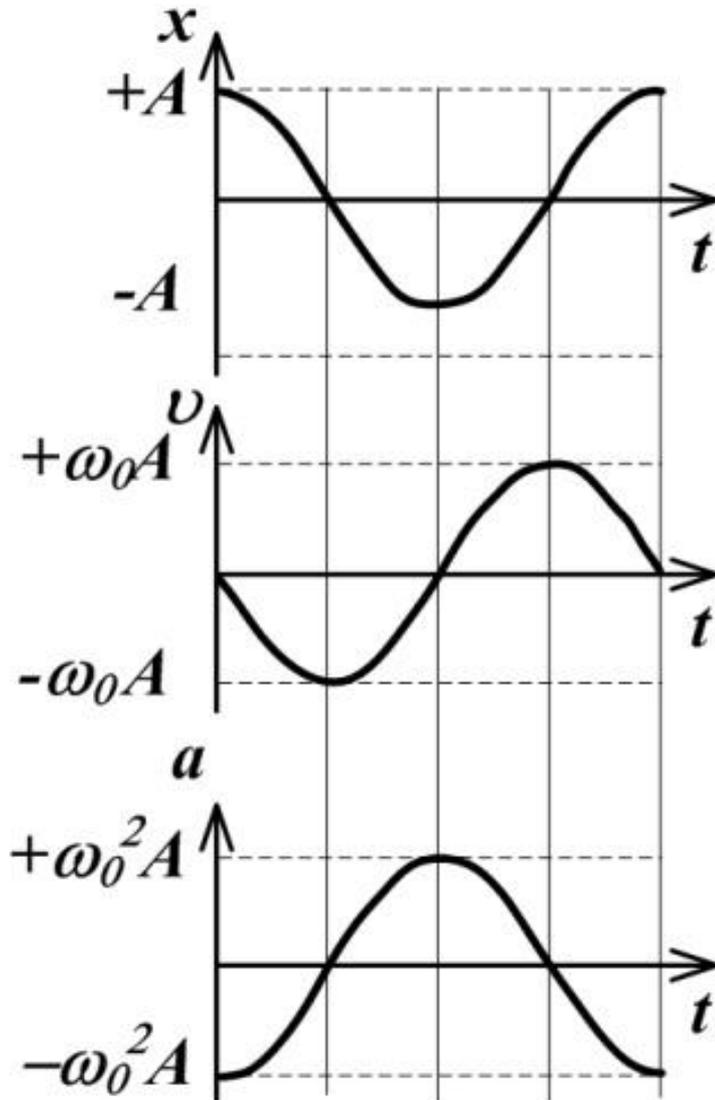
Решением уравнения будет

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) .$$

Здесь  $x$  – смещение тела от положения равновесия;  $A$  – амплитуда колебания;  $(\omega_0 t + \phi_0)$  – фаза колебания;  $\omega_0$  – циклическая частота колебания;  $\phi_0$  – начальная фаза колебания. Необходимо отметить, что циклическая частота связана с частотой колебаний  $\nu$  соотношением  $\omega_0 = 2\pi\nu$ .

Данное дифференциальное уравнение и его решение описывает свободные гармонические колебания грузика на пружинке.

# КОЛЕБАНИЯ



Дифференцирование  $x(t)$  по времени дает скорость грузика:

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Ускорение грузика получим дифференцированием  $v(t)$  по времени:

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

# КОЛЕБАНИЯ

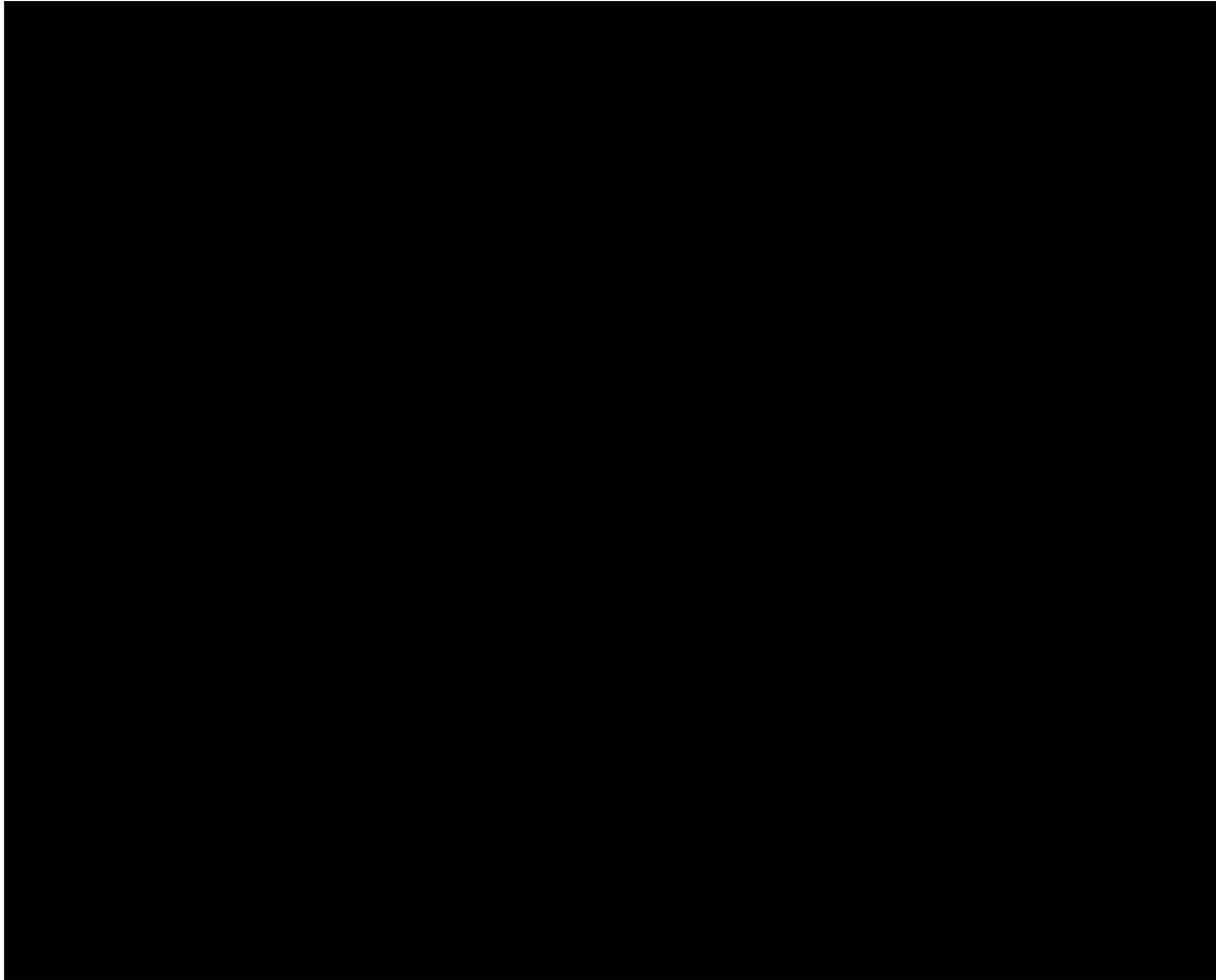
Гармонические колебания могут совершаться не только в связи с упругой силой, но и благодаря другим силам, равным  $-kx$ . Такие силы называют **квазиупругими**. Квазиупругие силы являются консервативными, а значит полная механическая энергия гармонического колебания остается неизменной. Т.о., при гармонических колебаниях потенциальная энергия превращается в кинетическую и обратно. В момент наибольшего отклонения от положения равновесия полная механическая энергия колебательной системы состоит только из потенциальной энергии, равной:

$$E = E_{p \max} = \frac{kA^2}{2}.$$

При прохождении колебательной системой положения равновесия, ее кинетическая энергия достигает максимума:

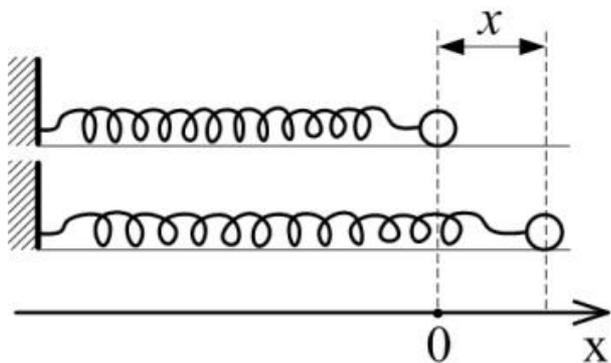
$$E = E_{k \max} = \frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}.$$

# КОЛЕБАНИЯ



# КОЛЕБАНИЯ

## Затухающие колебания

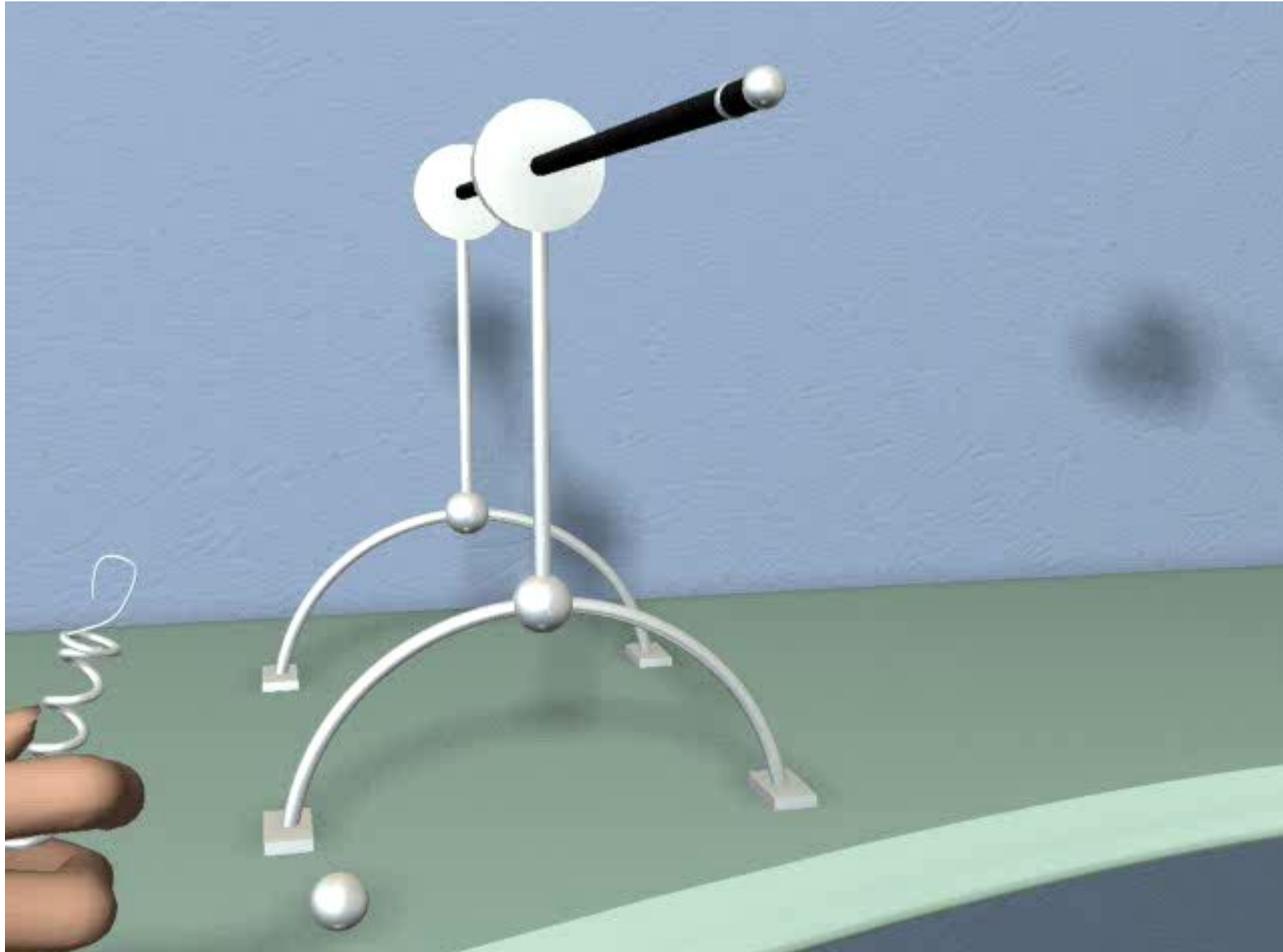


Когда гармонические свободные колебания совершаются в реальной среде, на колебательную систему действуют силы сопротивления. Это приводит к убыли полной механической энергии и колебания затухают. В случае малых колебаний (значит малых скоростей) сила сопротивления пропорциональна величине скорости:  $f_r = -r v$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления. Исходя из II закона Ньютона составляется дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 .$$

Здесь  $\beta = r/2m$  – коэффициент затухания.

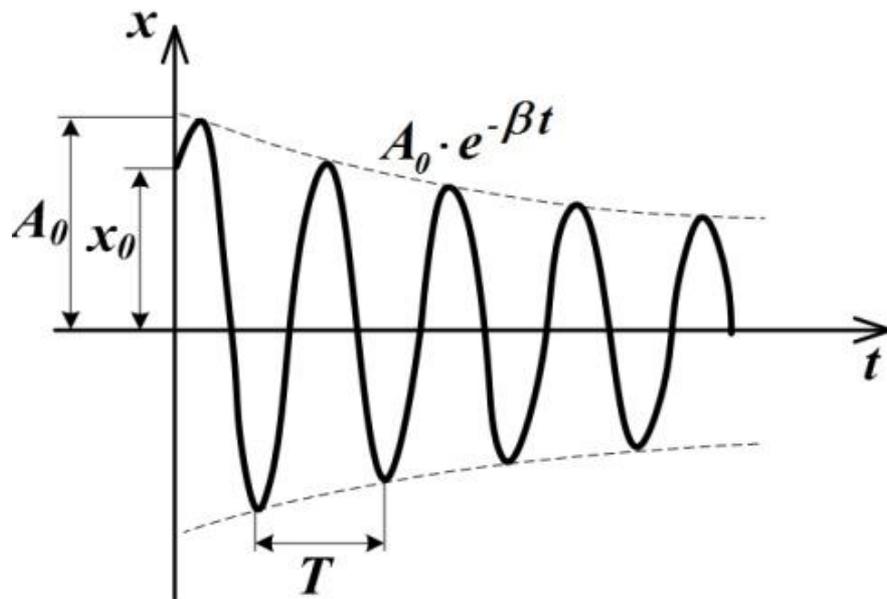
# КОЛЕБАНИЯ



# КОЛЕБАНИЯ

При не слишком большом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) решение данного уравнения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) .$$



В данном выражении частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} .$$

# КОЛЕБАНИЯ

**Коэффициент затухания** – это величина, характеризующая скорость затухания колебаний и обратная времени, в течении которого амплитуда уменьшается в ***exp*** раз.

Затухание колебаний обычно характеризуют ***логарифмическим декрементом затухания***:

$$\chi = \ln \left( \frac{A(t)}{A(t+T)} \right) = \beta T .$$

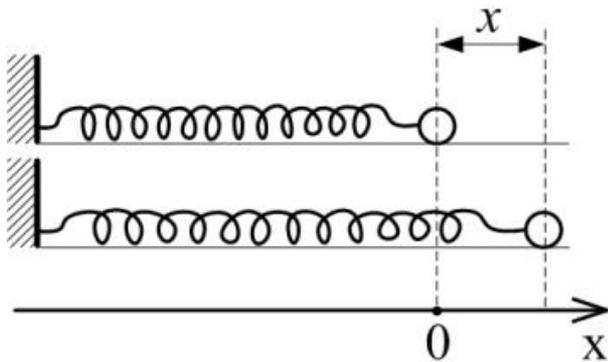
**Логарифмический декремент затухания** – это величина, обратная числу колебаний, которые совершаются до момента, когда амплитуда уменьшается в ***exp*** раз.

В некоторых случаях (например, колебательный контур электронных устройств) затухание колебаний принято характеризовать добротностью  $Q = \pi / \chi$ .

# КОЛЕБАНИЯ

## Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – это колебания, которые совершаются колебательной системой, подвергающейся воздействию внешней периодической силы.



Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t ,$$

$\omega$  – частота изменения внешней силы;

$f_0 = F_0 / m$ , где  $F_0$  – амплитудное значение внешней силы.

# КОЛЕБАНИЯ

Решение данного уравнения

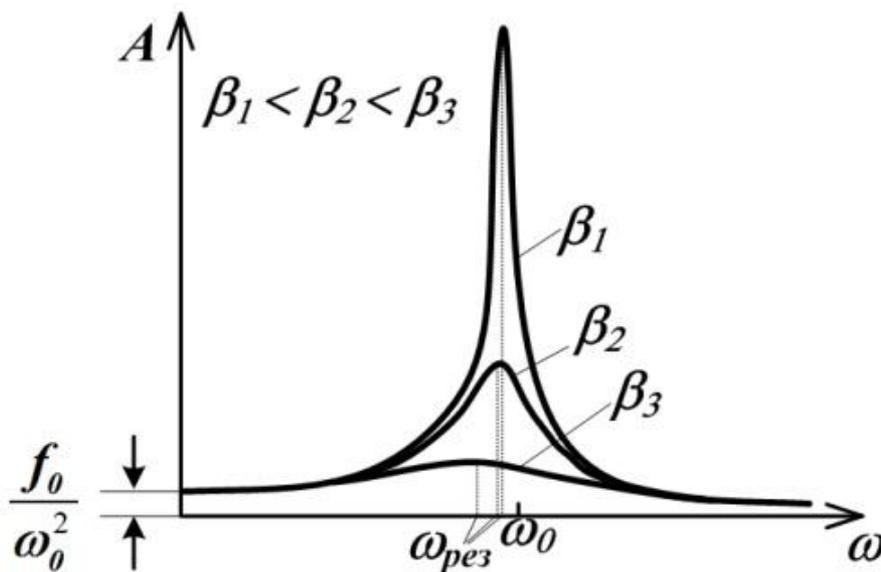
$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \text{ где}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$\varphi = \arctg \left[ \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$

# КОЛЕБАНИЯ

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты периодической внешней силы  $\omega$ . Это приводит к тому что при определенной частоте изменения внешней силы амплитуда достигает своего максимума. Такое явление называется **резонансом**. Выражение резонансной частоты и амплитуды колебаний при резонансе



$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

# КОЛЕБАНИЯ



# КОЛЕБАНИЯ

## Маятники

Пружинный маятник – это колебательная система, состоящая из пружины с коэффициентом жесткости  $k$ , соединенной с грузиком массой  $m$ . Период колебаний равен



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

# КОЛЕБАНИЯ

Математический маятник – это тело небольших размеров, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити, и совершающее колебания в поле каких-либо сил. Заметим, что масса нити пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. Период колебаний маятника равен



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \text{ где}$$

$\ell$  – длина нити;

$g$  – ускорение силы тяжести.

# КОЛЕБАНИЯ

Физический маятник — это твёрдое тело, совершающее колебания в поле силы тяжести относительно точки, не являющейся центром масс этого тела, или неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс этого тела.

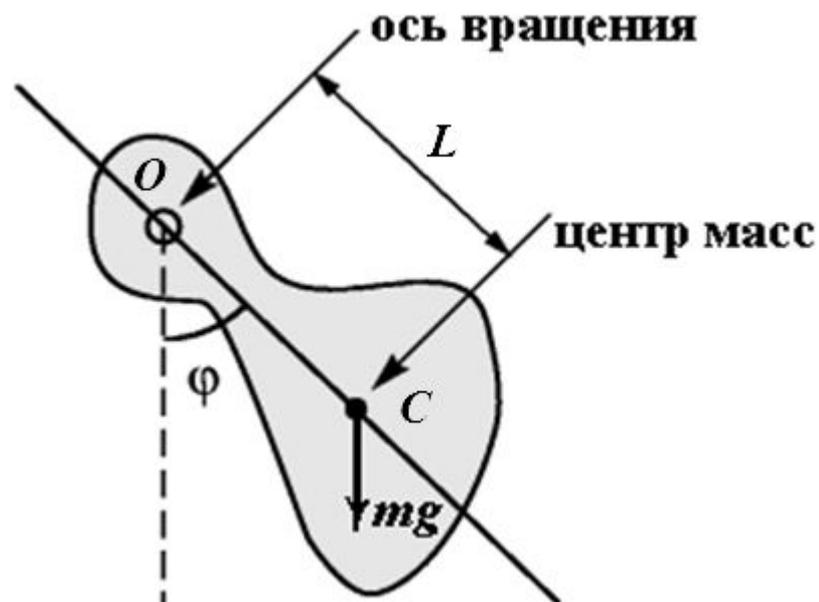
Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

$I$  — момент инерции маятника относительно его оси вращения;

$m$  — масса маятника;

$L$  — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника;



# КОЛЕБАНИЯ

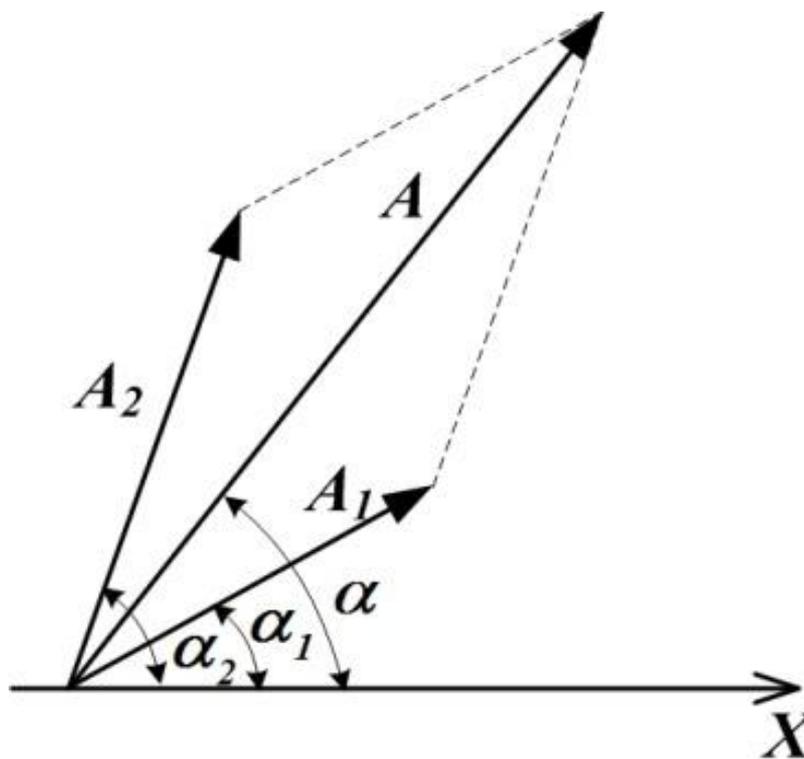
## Векторная диаграмма. Сложение колебаний одного направления

Гармоническое колебание может быть представлено в виде вектора, отложенного от произвольной точки некоторой оси  $X$  на плоскости. Модуль такого вектора равен амплитуде колебания, а угол между вектором и осью  $X$  равен начальной фазе колебания. Изображение колебаний с помощью данных векторов называют **векторной диаграммой**.

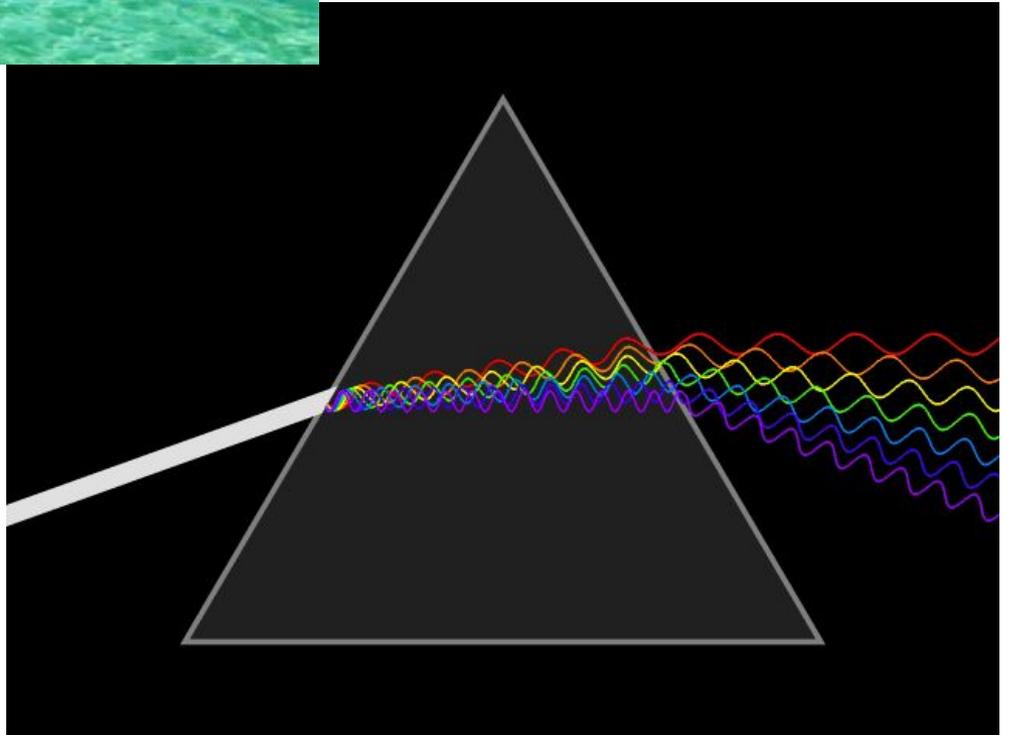
С помощью векторной диаграммы удобно выполнять сложение колебаний одного направления. Пусть имеются два колебания одного направления и одинаковой частоты:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \end{cases}.$$

# КОЛЕБАНИЯ



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$
$$\alpha = \arctg \left[ \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \right].$$



# ВОЛНЫ

**Волна** – это процесс распространения колебаний в среде.

Если внешняя сила, приложенная к элементарному объему неограниченной среды, изменяется по гармоническому закону, то такая волна называется *гармонической*. Волны, в которых частицы совершают колебания вдоль направления распространения колебаний, называют *продольными*; если же частицы совершают колебания, перпендикулярные направлению распространения колебаний, волны называются *поперечными*.

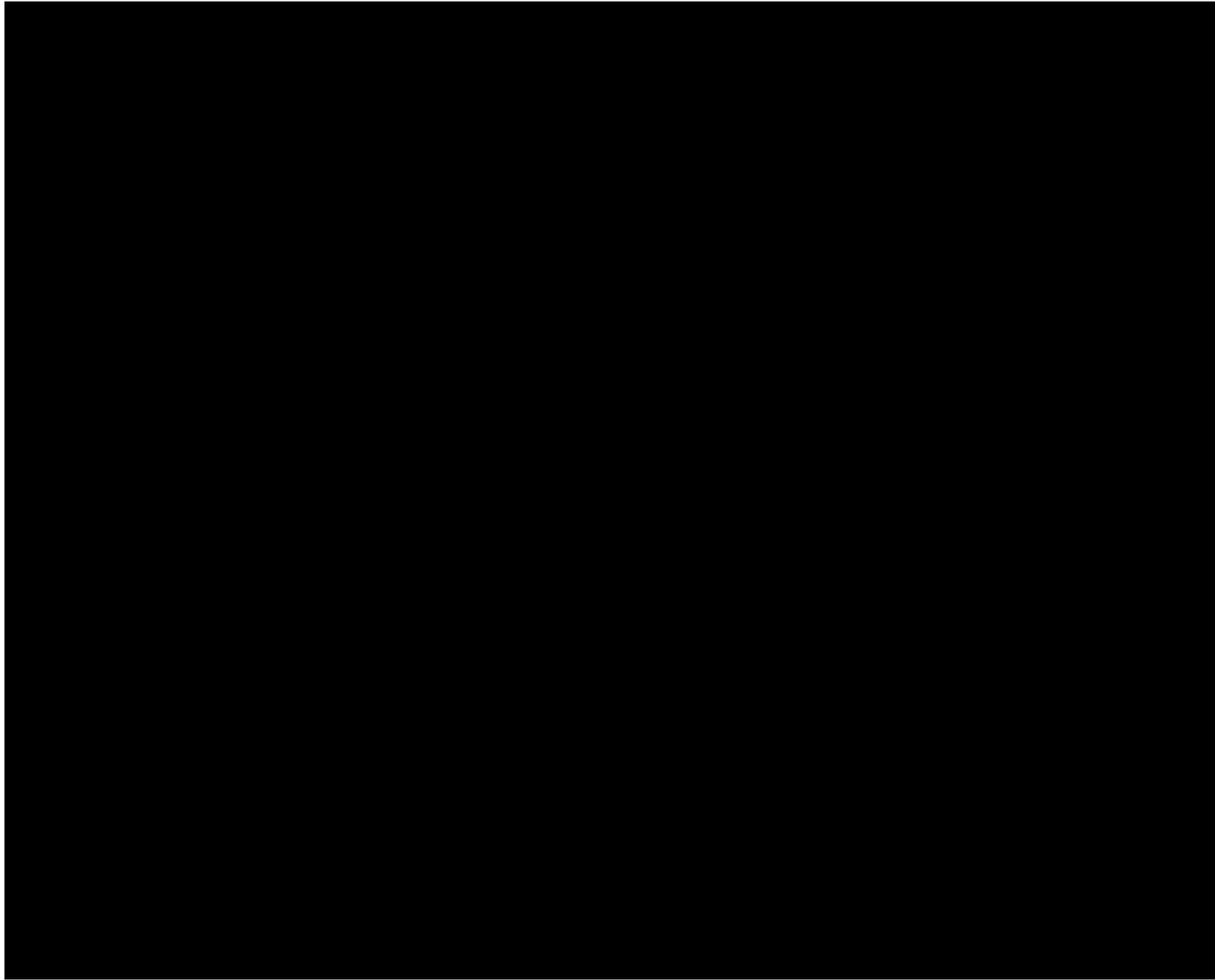
Вид волны – продольная или поперечная – зависит от упругих свойств среды. Только в направлении действия возвращающих сил совершается колебательное движение. В газообразных и жидких средах силы упругости появляются при деформациях растяжения и сжатия. Значит в жидкостях и газах возможны только продольные механические волны.

В твердых телах кроме упругих деформаций растяжения и сжатия возможна упругая деформация сдвига. Поэтому в твердых телах могут одновременно образовываться как продольные, так и поперечные волны.

*Фронт волны* – геометрическое место точек, до которых в некоторый момент времени дошло колебание. *Волновая поверхность* – геометрическое место точек, которые колеблются в одинаковых фазах. *Луч* – направление, в котором распространяется волна.

По форме волнового фронта различают *плоские*, *сферические* или *цилиндрические фронты*. Чтобы описать волновое движение, нужно найти закон изменения смещения  $x$  для каждой точки среды как функцию времени.

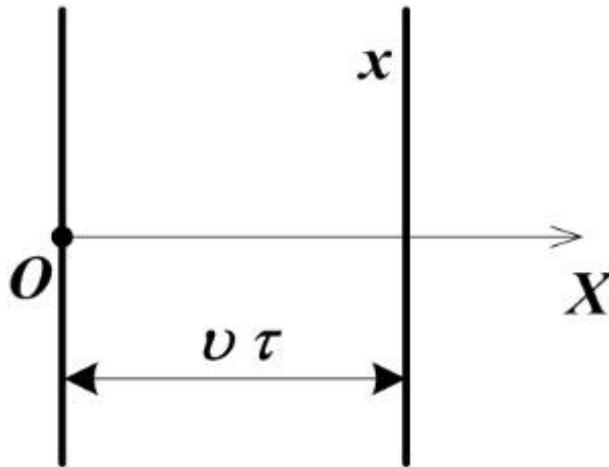
# ВОЛНЫ



# ВОЛНЫ

## Уравнение бегущей волны

Пусть источник гармонических колебаний находится в  $m. O$ , лежащей на оси  $X$ . Положим, что колебания распространяются в однородной изотропной среде вдоль оси  $X$ , а фронт плоской волны перпендикулярен данной оси.



Для  $m. O$  уравнение колебаний  $\xi = A \cos \omega t$ . Фронт волны за время  $\tau$  пройдет расстояние  $x = v \tau$ , где  $v$  – скорость распространения волны.

Значит колебания в плоскости  $x$  будут отставать от колебаний в  $m. O$  на время  $\tau$ . Значит уравнение колебаний для плоскости  $x$  будет

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

# ВОЛНЫ

Данное выражение, записанное в виде

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

называется **уравнением бегущей волны** (плоской). В данном выражении  $\xi(x, t)$  смещение от положения равновесия точки среды с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $k$  – волновое число, равное  $2\pi / \lambda$ , а  $\lambda$  – длина волны.

Заметим, что скорость  $v$  имеет смысл скорости перемещения фазы колебаний в среде и данную скорость называют **фазовой**. Приведенное уравнение справедливо для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $X$ . Если волна распространяется в произвольном направлении, то уравнение бегущей волны запишется в виде

$$\xi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{x}$  – смещение от положения равновесия точки среды с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  (вектор характеризует равновесное положение точки) в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{n}$  – волновой вектор, а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к волновой поверхности.

# ВОЛНЫ

## Волновое уравнение

Напомним, что уравнение гармонического колебания является решением дифференциального уравнения колебаний (свободных, затухающих, вынужденных). Уравнение бегущей волны также есть решением некоторого дифференциального уравнения. Это уравнение может быть получено как сумма частных производных  $\xi(\mathbf{r}, t)$  по координатам  $x, y, z$  и времени  $t$ . Полученное таким образом уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta \xi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

и называется **волновым уравнением**. Тут  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Т.о., всякая функция, удовлетворяющая данному уравнению описывает некоторую волну.

# ВОЛНЫ

## Скорость распространения упругих волн

Скорость распространения продольных волн определяется выражением

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$
, где  $E$  – модуль Юнга, а  $\rho$  - плотность среды.

Заметим, что модуль Юнга равен отношению нормального напряжения к относительному удлинению, вызванному этим напряжением в направлении его действия:  $E = \sigma / \varepsilon$  и характеризует способность материала сопротивляться деформации растяжения.

Скорость распространения поперечных волн тесно связана с деформацией сдвига и равна

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$
, где  $G$  – модуль сдвига.

# ВОЛНЫ

Модуль сдвига равен отношению касательного напряжения к величине угла сдвига  $G = \tau / \gamma$  и представляет способность материала сопротивляться изменению формы при сохранении его объема.

Добавим, что в твердых телах скорость распространения продольных волн всегда больше чем скорость поперечных волн, т.к.  $E > G$ . Кроме того, скорость распространения механических волн в большинстве случаев зависит только от свойств среды и не зависит от параметров самой волны. В частности, скорость распространения волн не зависит от их частоты, т.е. отсутствует *дисперсия*.

# ВОЛНЫ

## Энергия упругой волны

Распространение волны в упругой среде сопровождается передачей энергии. При этом не происходит переноса вещества. Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии частиц вещества совершающих колебания и потенциальной энергии упругой деформации среды.

Пусть плоская волна распространяется в упругой среде вдоль оси  $X$ . Выделим элементарный объем  $\Delta V$ , в пределах которого скорость частиц и деформация среды являются неизменными. Скорость частиц определяется как  $\partial\xi/\partial t$ , а деформация среды  $\partial\xi/\partial x$ .

Тогда кинетическую энергию выделенного элемента можно записать в виде

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) \cdot \Delta V.$$

# ВОЛНЫ

Вспомним, что потенциальная энергия растянутой пружины определяется как  $(kx^2)/2$ . Учитывая аналогию между коэффициентом жесткости пружины  $k$  и модулем Юнга среды  $E$ , растяжением пружины  $x$  и деформацией среды  $\varepsilon$ , запишем потенциальную энергию выделенного элемента  $\Delta V$  как

$$\Delta E_n = \frac{E \varepsilon^2}{2} \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx) \cdot \Delta V.$$

Полная энергия выделенного элемента  $\Delta V$  найдется в виде

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) \cdot \Delta V.$$

Тогда плотность энергии упругой волны будет равна

$$\varpi = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

# ВОЛНЫ

Для описания процесса переноса механической энергии волной вводят понятие потока энергии  $\Phi$ .  $\Phi$  – это энергия  $E$  переносимая волной в направлении перпендикулярном некоторой площадке  $S$  за время  $\Delta t$  и определяемая выражением  $\Phi = E/\Delta t$ . Отсюда плотность потока энергии находится как  $j = \Phi / S$ .

В физике принято величину и направление переноса энергии волной описывать вектором Умова:

$$\vec{j} = \vec{w} \vec{v} .$$