

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ЛЕКЦИЯ 4

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

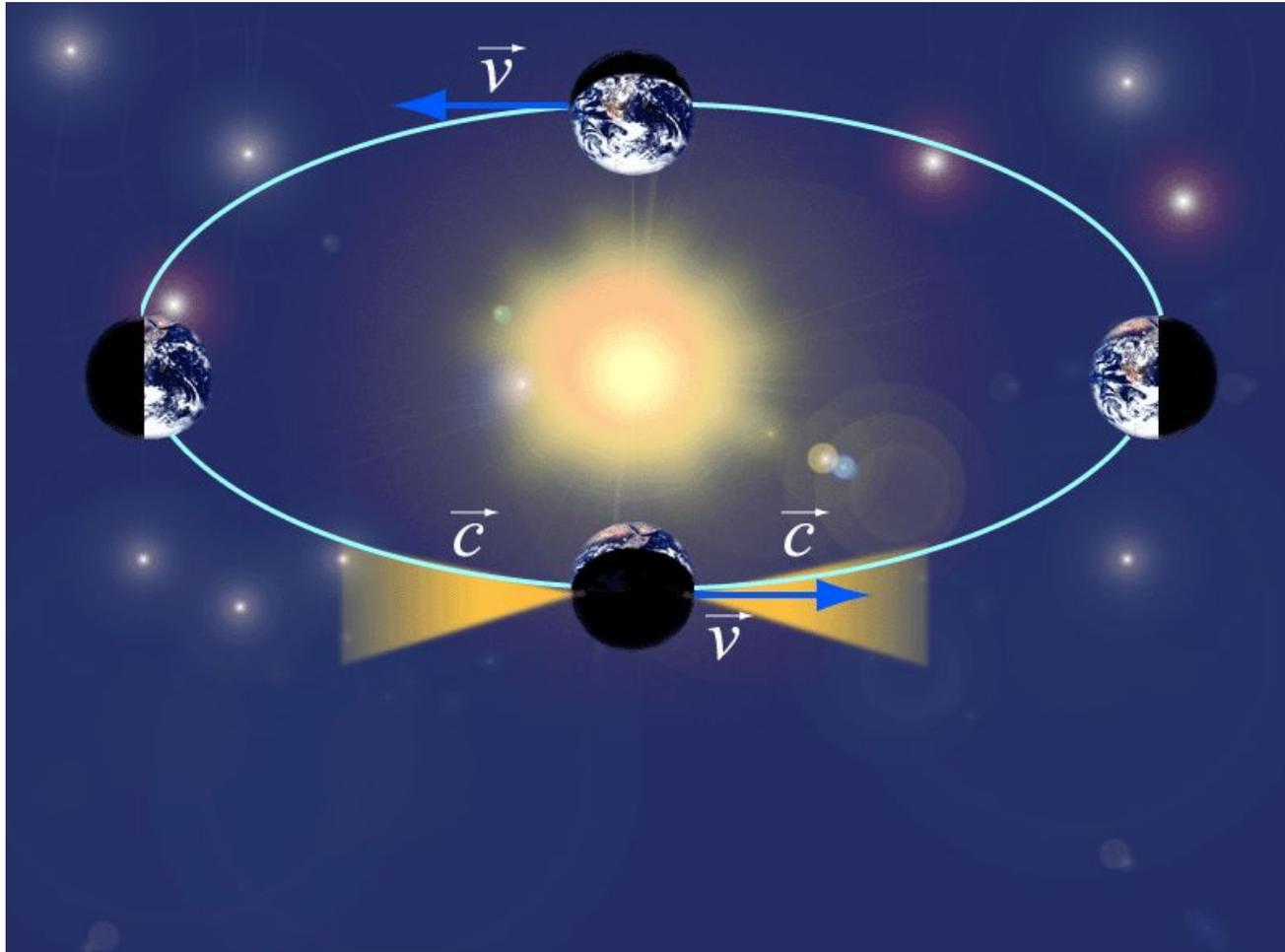
ПОСТУЛАТЫ СТО

СТО основывается на следующих положениях:

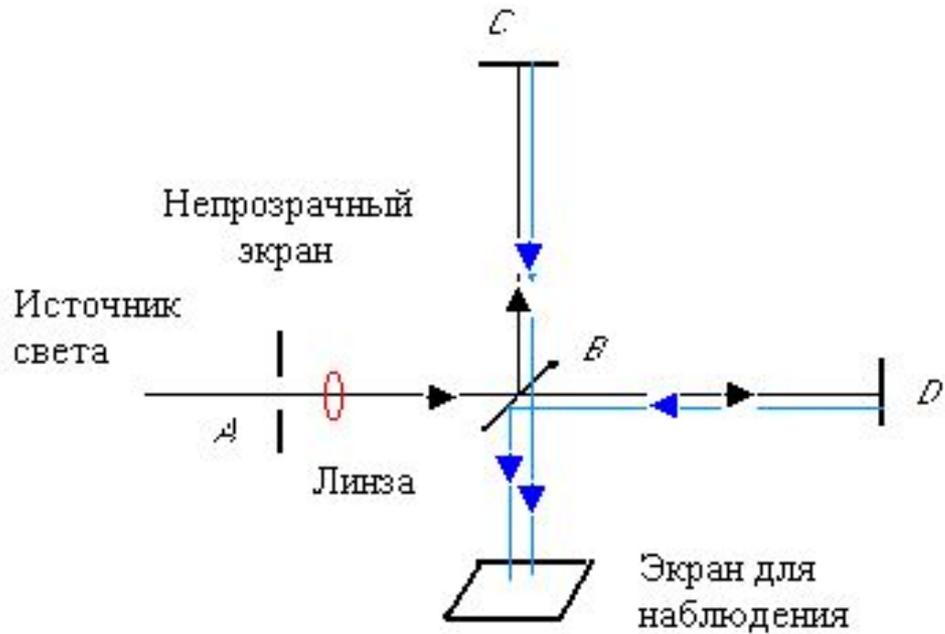
1. принцип относительности Эйнштейна: все законы природы инвариантны при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.
2. принцип независимости скорости света в инерциальных системах отсчета от скорости движения источника и приемника (скорость света не может превышать $\sim 3 \cdot 10^8$ м/с).

ПОСТУЛАТЫ СТО

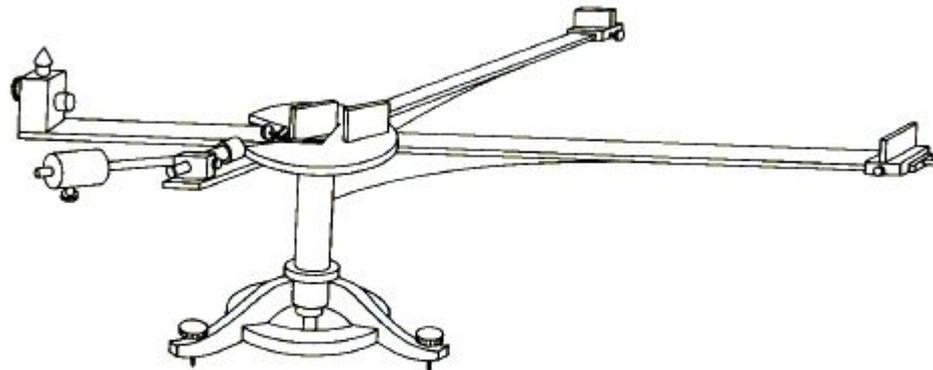
Опыт Майкельсона



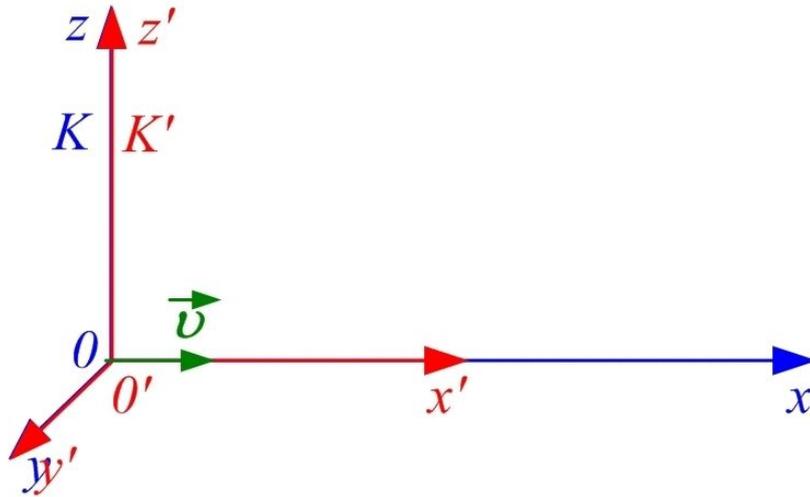
ПОСТУЛАТЫ СТО



Опыт Майкельсона



ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА



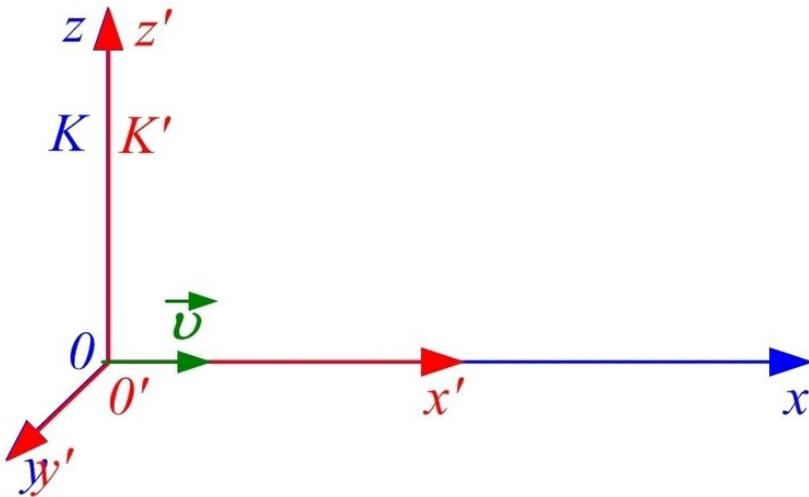
Рассмотрим инерциальные системы отсчета K и K' . Направим оси координат этих систем отсчета как на рисунке. Система K' движется со скоростью v относительно системы K . Пусть происходит некоторое событие, которому в системе K соответствуют координаты x, y, z и время t , а в системе K' - x', y', z' и время t' . Найдем преобразования координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Так как системы координат K и K' равноправны, то преобразования координат и времени должны быть такими, чтобы их можно было обращать при переходе от преобразования $K \rightarrow K'$ к преобразованию $K' \rightarrow K$.

В связи с этим данные преобразования должны быть линейными функциями. Значит функцию $x' = f(x, t)$ можно представить в виде

$$x' = Ax + Bt.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА



Найдем коэффициенты A и B . Пусть в начальный момент времени начала координат систем K и K' совпадали. Тогда через время t начало координат O' системы K' будет иметь координату $x'=0$. С другой стороны в системе K начало координат O' будет иметь координату $x = vt$. Подставим указанные x и x' в уравнение $x' = f(x, t)$:

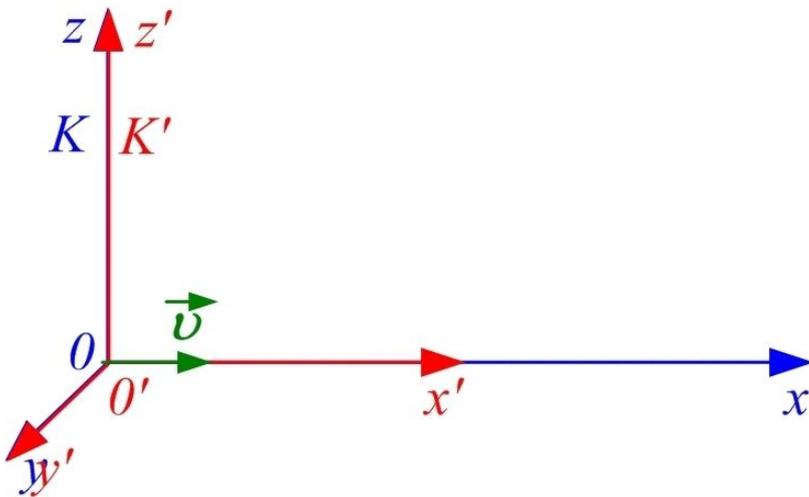
$$0 = Avt + Bt \Rightarrow B = -Av.$$

Т.о., преобразования координат при переходах $K' \rightarrow K$ и $K \rightarrow K'$ будут иметь вид:

$$x' = A(x - vt);$$

$$x = A(x' + vt').$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА



Для нахождения коэффициента A снова рассмотрим начальный момент времени, когда начала координат O и O' совпадали. Представим, что в данный момент времени из начала координат начинает распространяться свет. Расстояния, которые свет пройдет в системах отсчета K и K' , будут равны

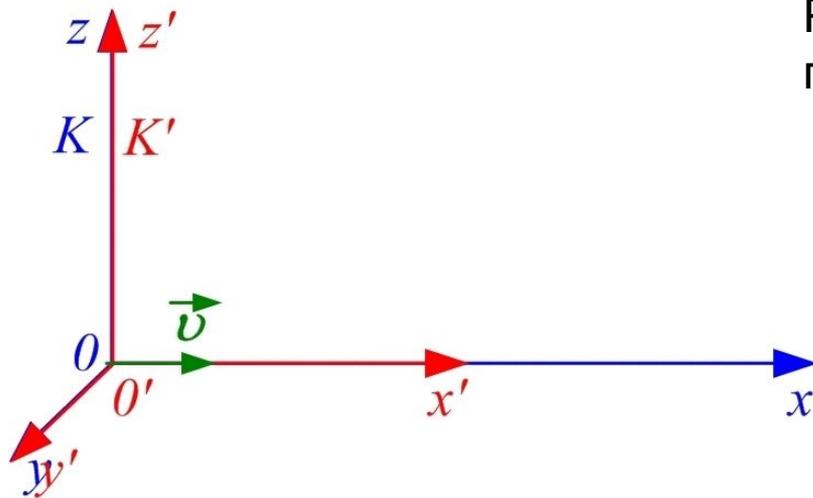
$$\Delta x' = x' = ct' \quad \text{и} \quad \Delta x = x = ct,$$

Подставим последние значения x и x' в преобразования $x' \rightarrow x$ и $x \rightarrow x'$.
Получим

$$ct' = At(c - v);$$

$$ct = At'(c + v).$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА



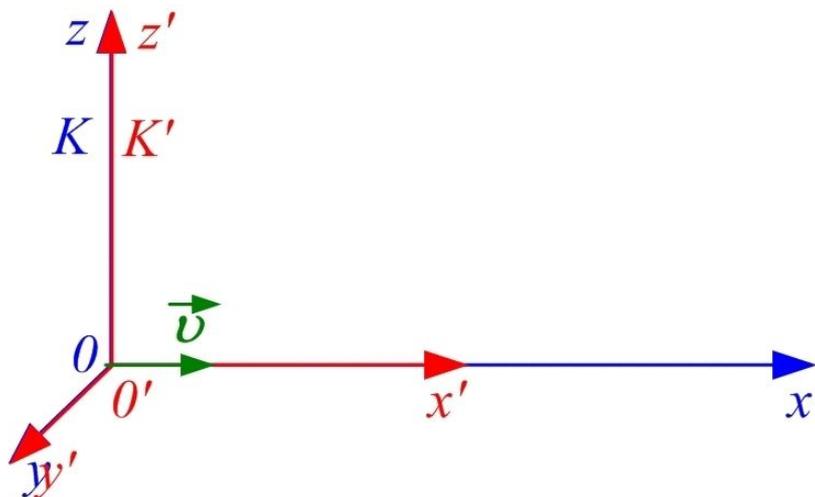
Решив данную систему относительно A придём к

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Окончательно выражения для преобразований координат будут иметь вид

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x} - v\mathbf{t}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}' + v\mathbf{t}'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА



Далее найдем преобразование времени для систем координат K и K' . Для этого в полученные преобразования координат подставим t и t' из выражений

$$x' = ct' \text{ и } x = ct, \text{ откуда}$$

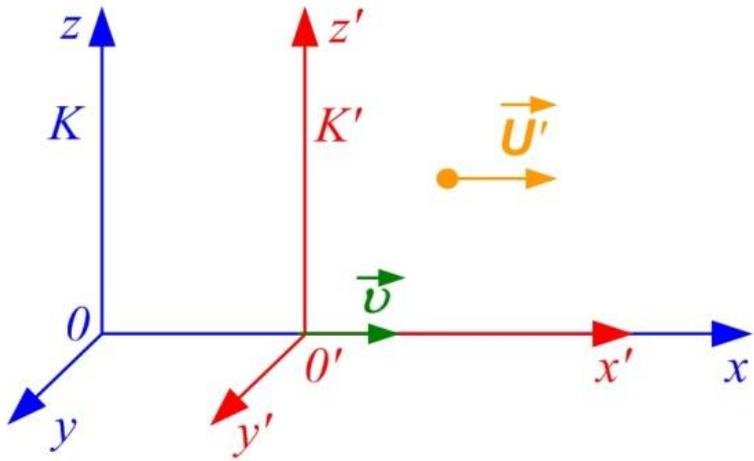
$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Полученные преобразования координат и времени называются **преобразованиями Лоренца**. В отличие от преобразований Галилея, данные преобразования справедливы также и для движения тел со скоростями, близкими к скорости света.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Согласно преобразованиям Галилея скорость тела U в системе K связана со скоростью тела U' в системе K' соотношением

$$U = U' + v.$$

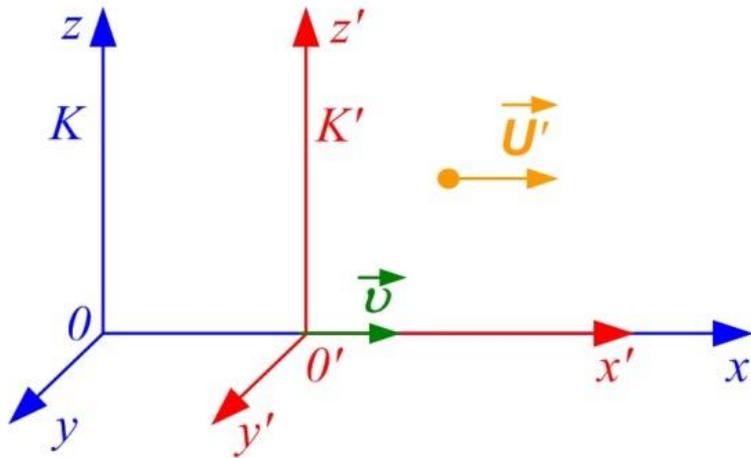


Данное преобразование противоречит положению СТО о независимости скорости света от скорости источника и приемника света. Получим релятивистский закон сложения скоростей.

Пусть в течении промежутка времени от t_1 до t_2 координаты тела изменились от x_1 до x_2 в системе отсчета K . Тогда можно записать, что

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ



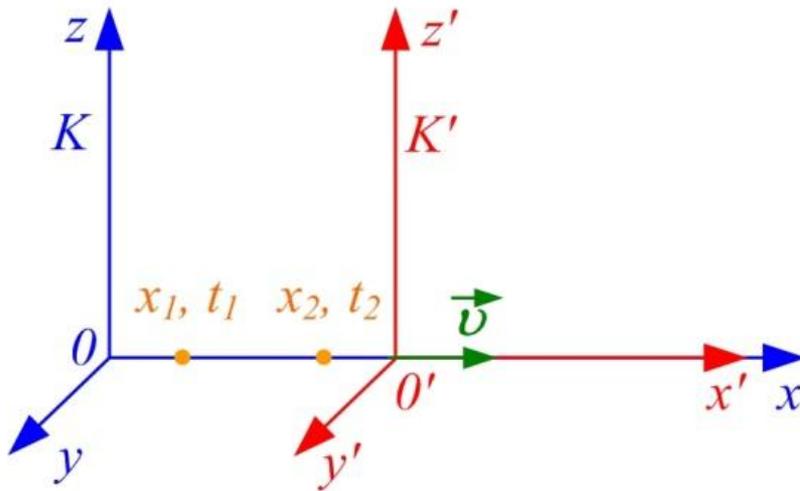
Найдем отношение $\Delta x/\Delta t$, которое имеет смысл скорости перемещения тела U в системе отсчета K .

$$U = \frac{U' + v}{1 + \frac{U'v}{c^2}}.$$

Полученное соотношение и есть формула релятивистского закона сложения скоростей. Видно, что даже если обе скорости U' и v равны скорости света c , то $U = c$.

СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Относительность одновременности событий



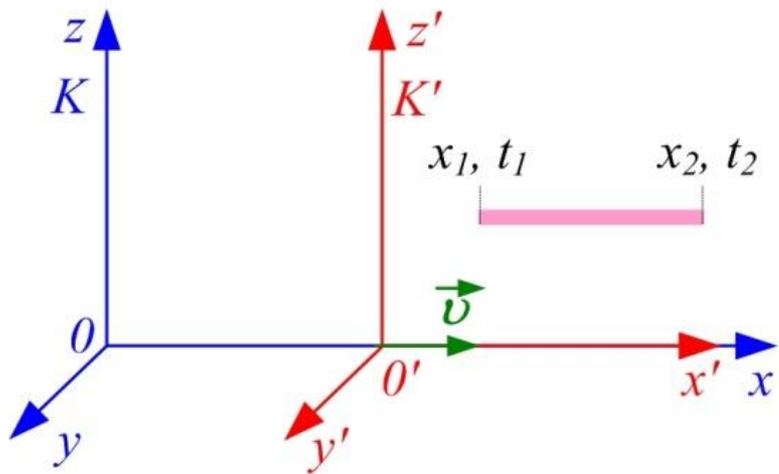
Пусть в системе K происходят последовательно два события. Этим событиям соответствуют моменты времени t_1 и t_2 и координаты x_1 и x_2 (координаты y и z совпадают). Если $t_1 = t_2$ (события происходят одновременно), то $\Delta t = 0$. Найдем промежуток времени между данными событиями в системе отсчета K' :

$$\Delta t' = \frac{(x_1 - x_2) \cdot \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \neq 0$$

Т.о., оказывается, что одновременные события в одной инерциальной системе отсчета не всегда одновременны в другой инерциальной системе отсчета.

СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Сокращение длины

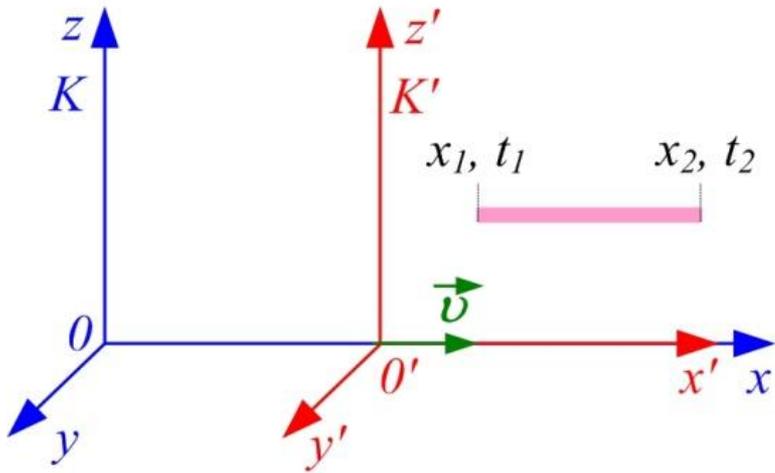


Пусть в системе K' находится стержень. Стержень неподвижен относительно данной системы отсчета, а K' движется со скоростью v относительно K . Стержень параллелен оси x' . Измерим длину стержня в системе K таким образом, что измерению соответствует промежуток времени $t_2 - t_1 = 0$. Значит измерение осуществляется в момент $t_2 = t_1 = t$. Полученные в эксперименте координаты краев стержня равны x_1 и x_2 относительно K . Тогда длина стержня в системе K равна $l = x_2 - x_1$. Найдем длину стержня в системе отсчета K' :

$$l' = x'_2 - x'_1 = \frac{l}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Сокращение длины



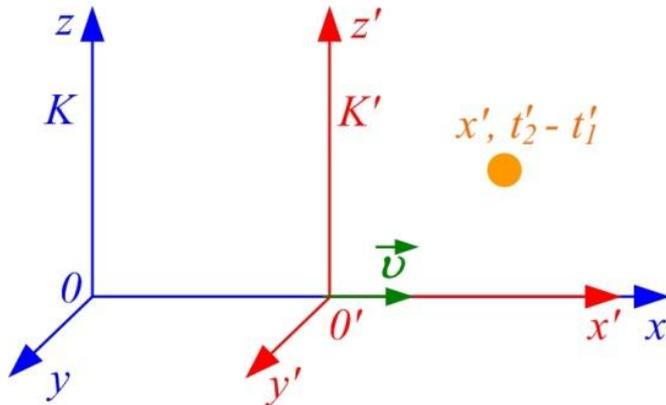
Учитывая, что длина стержня в системе отсчета, относительно которой он покоится, называется собственной и обозначается l_0 , последнее выражение записывается в виде

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Т.о., размеры тела в направлении движения сокращаются. В то же время поперечные размеры (перпендикулярно направлению движения) остаются неизменными.

СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Длительность события



Пусть в системе K' в точке x' происходит некоторое событие. Событию соответствует интервал времени $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Найдем длительность события в системе отсчета K :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

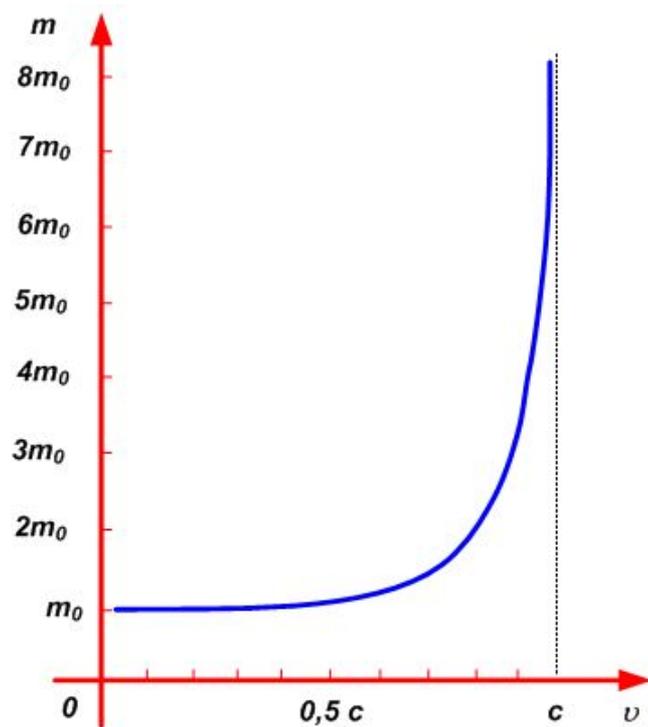
Интервал времени $\Delta t'$ называется собственным временем события (измерено в той системе отсчета, в которой событие происходит). Как правило данное время обозначают τ_0 . С учетом этого длительность события τ в системе K рассчитывается по формуле:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Т.о., длительность события минимальна в той системе отсчета, в которой событие происходит. И сокращение размеров тела и увеличение длительности события есть кинематические эффекты, являются проявлениями фундаментальных свойств пространства и времени.

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ



Экспериментальное изучение удельного заряда электрона e/m (Бухерер, Кауфман) привело к открытию зависимости массы электрона от скорости. Данная зависимость имеет вид

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

где m_0 – масса электрона в системе отсчета, относительно которой он покоится; m – масса электрона в системе отсчета, относительно которой электрон движется со скоростью v . Как было доказано в СТО, данное соотношение справедливо не только для электронов, но и для любых других тел.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Учитывая зависимость массы тела от скорости, релятивистский импульс тела равен

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Отсюда можно получить основное уравнение релятивистской динамики

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right).$$

ЭНЕРГИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

Используем основное уравнение релятивистской динамики для получения релятивистского выражения энергии тела. Умножим данное выражение на $v dt$:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) v \cdot dt .$$

Выражение $\vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$ равно dA - элементарной работе, совершаемой на телом за время dt . Как известно, работа совершаемая над телом равна приращению энергии тела:

$$dA = dE .$$

Значит

$$dE = v \, d \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) .$$

ЭНЕРГИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

Энергия тела получается интегрированием данного выражения, что приводит к

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m c^2.$$

Зная полную энергию тела и его энергию покоя несложно получить релятивистское выражение кинетической энергии тела

$$E_K = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right).$$

Используя выражения для релятивистского импульса и полной энергии тела получают взаимосвязь полной энергии и релятивистского импульса тела

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$