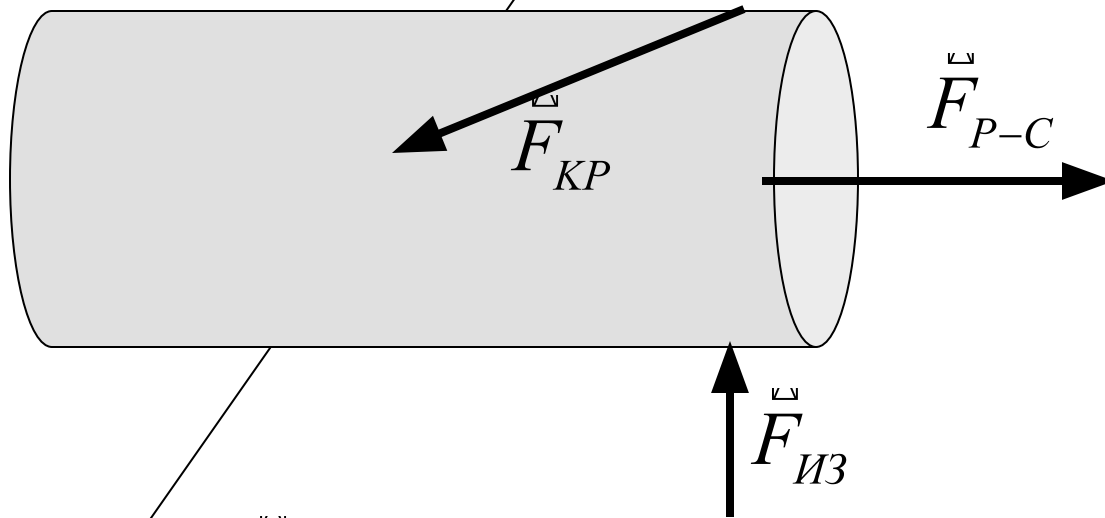


Практическое занятие 4

Механические свойства твердых тел (ТТ).
Деформации

\vec{F}_{P-C} – сила, действующая вдоль оси стержня
(деформация растяжения - сжатия)

$\vec{F}_{ИЗ}$ – сила, создающая изгибающий момент.
Зависит от точки приложения силы
(деформация изгиба и сдвига)



$\vec{F}_{КР}$ – сила, создающая крутящий момент.
Зависит от точки приложения силы
(деформация кручения)

Упругие (обратимые)
деформации:

после снятия нагрузки ТТ
восстанавливает свои форму
и размеры

Кристаллические и
поликристаллические тела
при *малых деформациях*

+

||

Реальное ТТ с упругопластическими свойствами

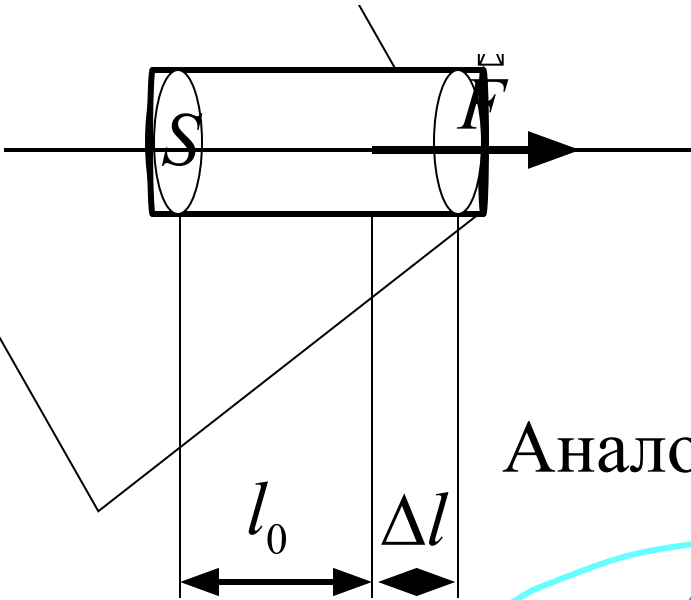
Пластические (необратимые)
деформации:

после снятия нагрузки ТТ
частично
восстанавливает свои форму
и размеры

Кристаллические ТТ при
больших деформациях
аморфные тела,
полимеры

Деформация растяжения – сжатия:

Для ТТ в целом:



Аналогия:

Закон Гука: $F = k|\Delta l|$

k – коэффициент
упругости

Δl – абсолютная
деформация цилиндра

Для вещества ТТ:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{– относительная деформация}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{– мех. напряжение в сечении цилиндра}$$

Закон Гука для малых упругих деформаций:

следствие $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ причина
свойство

Упругие деформации:

$$\sigma = E\varepsilon + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^3 + \dots$$

1. Сухожилие длиной 16 см под действием силы 12,4 Н удлиняется на 3,3 мм. Сухожилие можно считать круглым в сечении с диаметром 8,6 мм.

Рассчитать модуль упругости (Юнга) этого сухожилия.

СИ:

$$F = 12,4 \text{ Н}$$

$$l_0 = 16 \text{ см} = 0,16 \text{ м}$$

$$\Delta l = 3,3 \text{ мм} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$d = 8,6 \text{ мм} = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$E = ?$$

Закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$E = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{F \cdot l_0}{S \cdot \Delta l} = \frac{4F \cdot l_0}{\pi d^2 \cdot \Delta l}$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

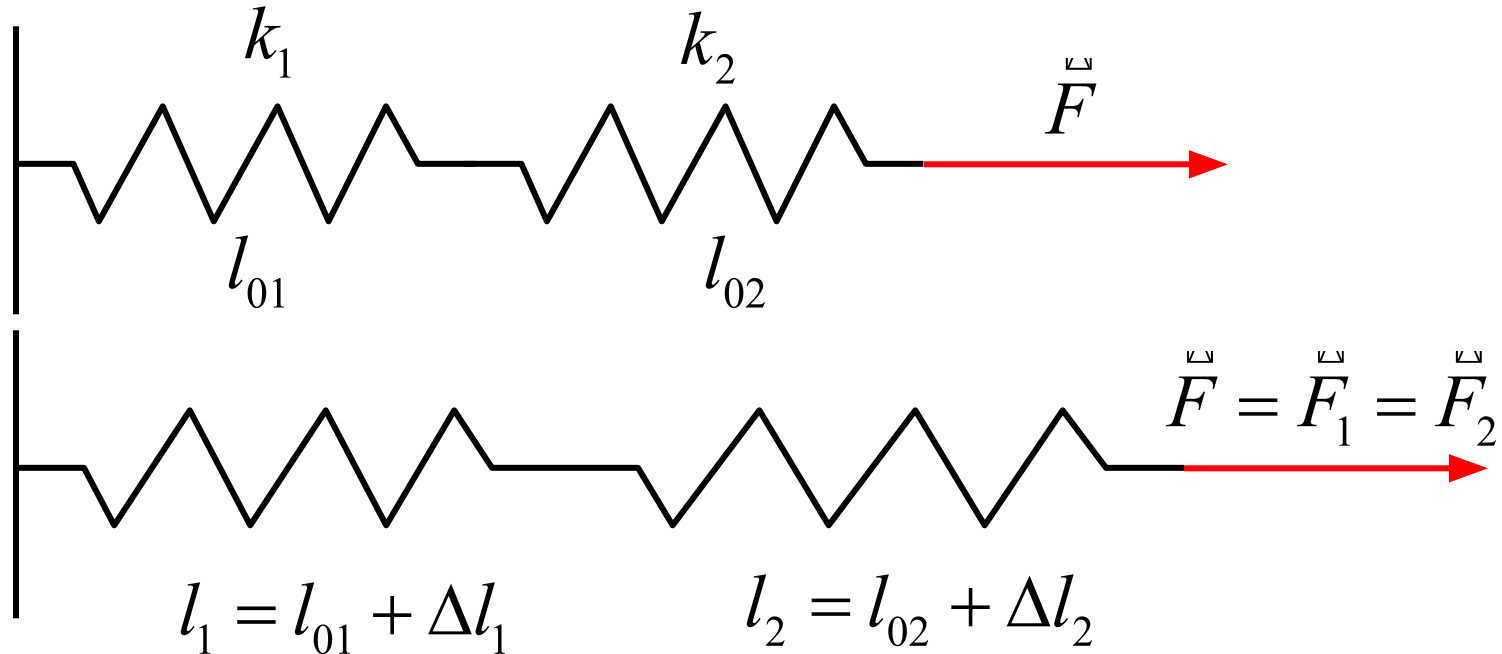
$$E = \frac{4 \cdot 12,4 \cdot 0,16}{3,14 \cdot (8,6 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-3}} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$[E]_{\text{Па}} = \frac{H \cdot M}{M^2 \cdot M} = \frac{H}{M^2} =$$


2. Определить жесткость k системы двух пружин при последовательном и параллельном их соединении.

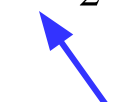
Жесткости пружин $k_1=2000$ Н/м и $k_2=6000$ Н/м.

2.1. Последовательное соединение:



$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{F}{\Delta l_1 + \Delta l_2}$$

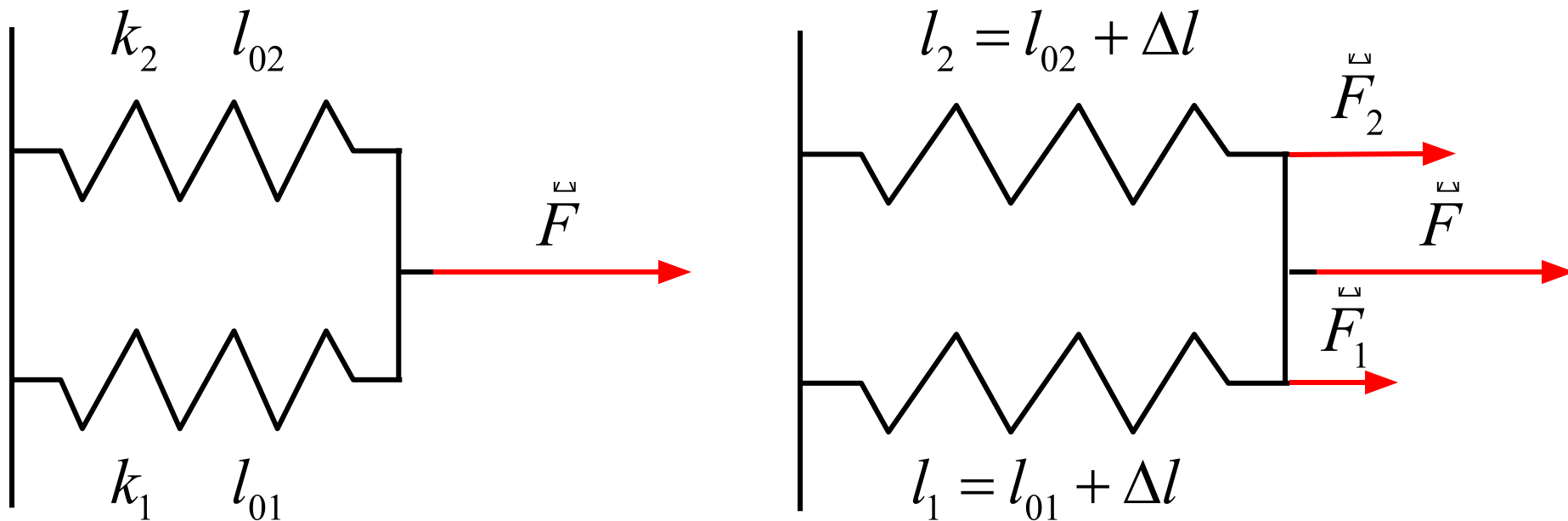

$$\Delta l_1 = \frac{F}{k_1}$$


$$\Delta l_2 = \frac{F}{k_2}$$

$$k = \frac{F}{\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$k = \frac{6000 \cdot 2000}{6000 + 2000} = 1500 \quad /$$

2.2. Параллельное соединение:

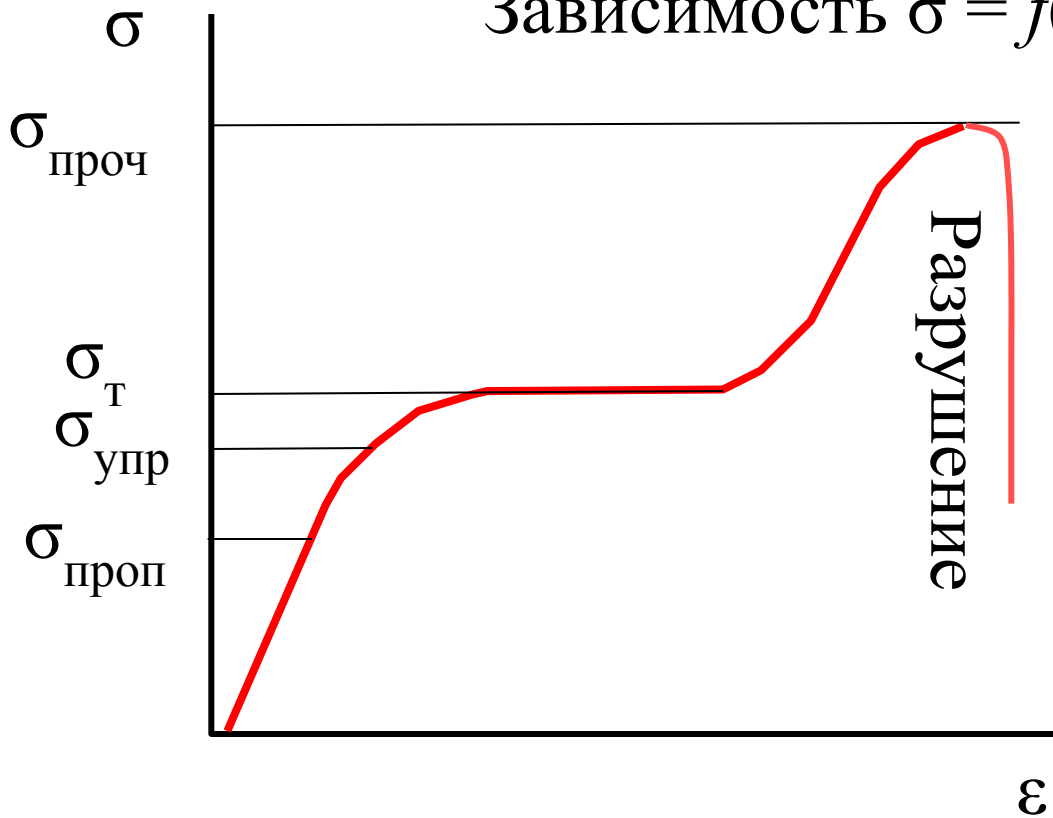


$$F = k\Delta l = F_1 + F_2 = k_1\Delta l + k_2\Delta l$$

$$k = k_1 + k_2$$

$$k = 2000 + 6000 = 8000 \quad /$$

Зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$ для ТТ:



$\sigma_{\text{проп}}$ — предел пропорциональности (граница действия закона Гука)

$\sigma_{\text{упр}}$ — предел упругости (граница упругих деформаций)

$\sigma_{\text{Т}}$ — предел текучести: зона неопределенности зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$, характерная для пластических деформаций

$\sigma_{\text{проч}}$ — предел прочности *материала* ТТ

Площадь сечения бедренной кости человека $3,0 \text{ см}^2$.

Какую силу сжатия может выдержать кость, не разрушаясь? Предел прочности бедренной кости при сжатии 124 МПа .

СИ:

$$S = 3,0 \text{ см}^2 = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$\sigma_{\text{проч.}} = 124 \text{ МПа} = 124 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$F_{\text{max}} = ?$$

Закон Гука:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

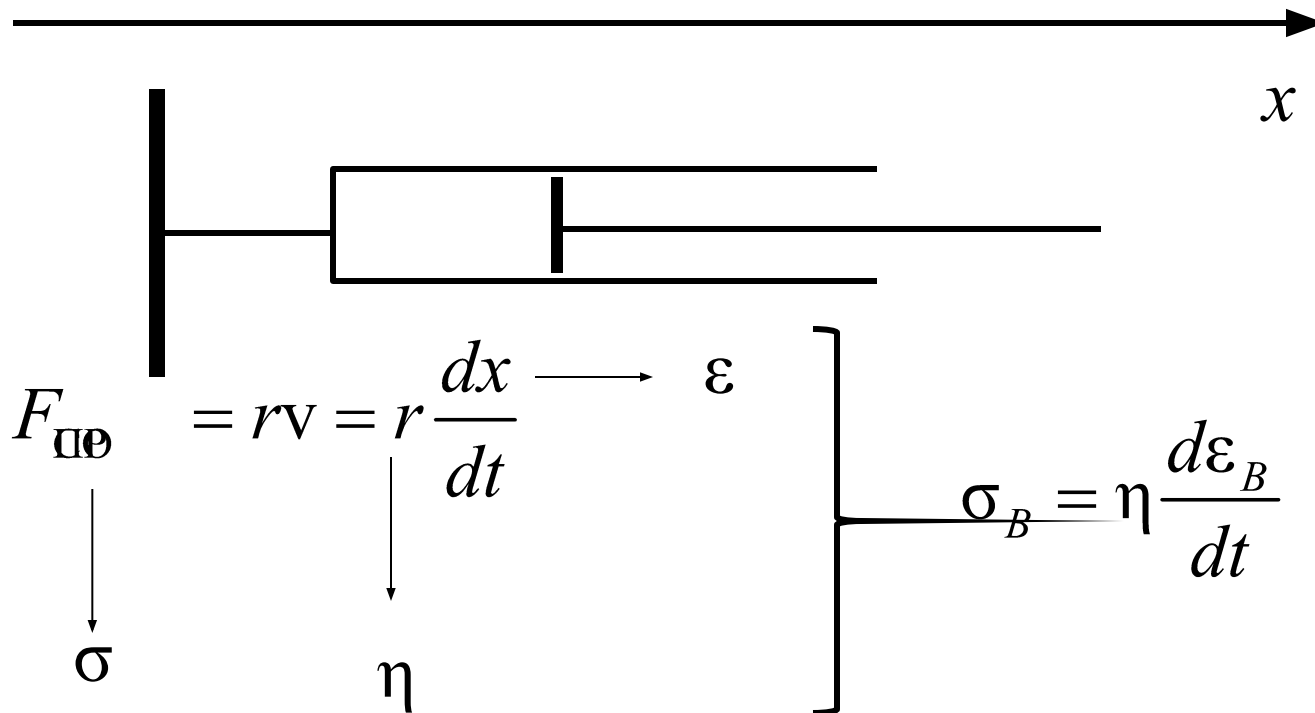
$$\sigma_{\text{проч.}} = \frac{F_{\text{max}}}{S} \rightarrow F_{\text{max}} = \sigma_{\text{проч.}} \cdot S$$

$$F_{\text{max}} = 124 \cdot 10^6 \cdot 3,0 \cdot 10^{-4} = 372 \cdot 10^2 = 37$$

Упругие свойства моделируются упругой пружиной
(мгновенный ответ на воздействие)



Вязкие свойства моделируются поршнем,
движущимся в цилиндре с вязкой жидкостью



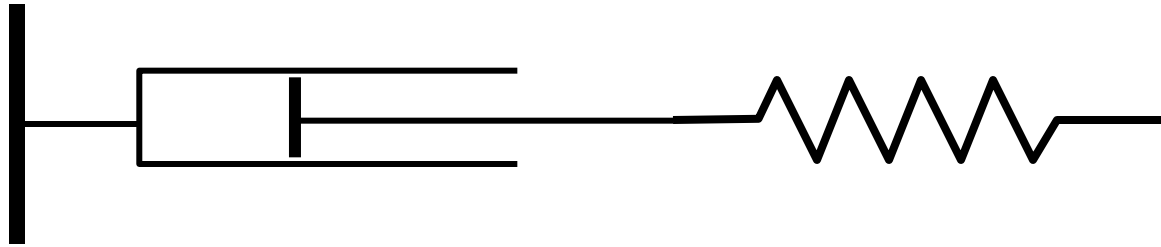
ε_y и ε_B – упругая и вязкая относительные деформации
(в дальнейшем – просто деформации)

σ_y и σ_B – напряжения упругой и вязкой деформаций

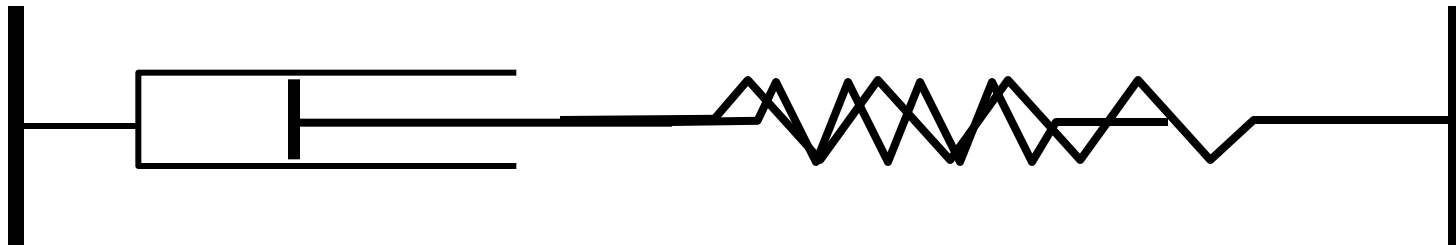
r – коэффициент сопротивления вязкой среды

η – коэффициент динамической вязкости среды
(см. Лекция 3)

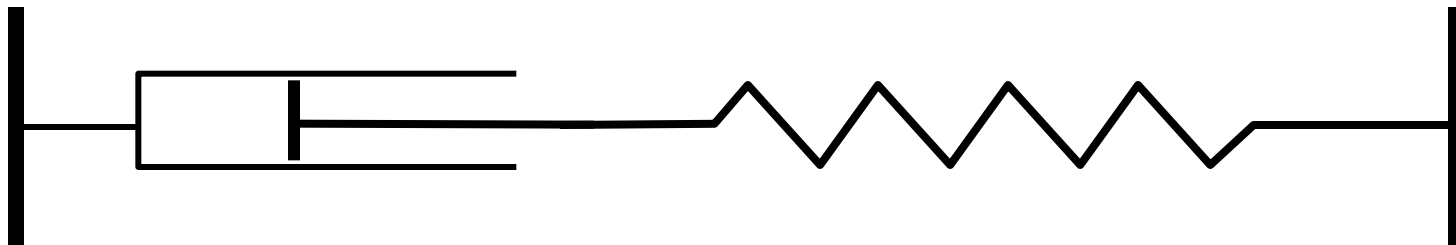
Простейшая комбинация, реализующая вязкоупругие свойства: последовательная модель



Пружина мгновенно растягивается и закрепляется:



Начинается деформация вязкого элемента:



Суммарная деформация при *последовательном* соединении элементов (задача 2.1):

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_B$$

Скорость суммарной деформации:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \frac{d\varepsilon_B}{dt}$$

Напряжения упругой и вязкой деформаций при *последовательном* соединении равны (задача 2.1):

$$\sigma_y = \sigma_B = \sigma = \text{const}$$

Упругая:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma}{E} \quad \frac{d\varepsilon_y}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$$

Вязкая:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon_B}{dt} \quad \frac{d\varepsilon_B}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}$$

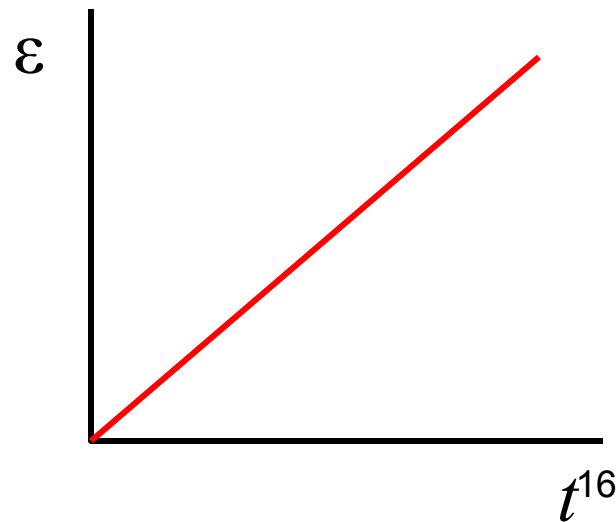
Скорость суммарной деформации:

$$\sigma = \text{const} \rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad d\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} dt$$

$$\int_0^\varepsilon d\varepsilon = \int_0^t \frac{\sigma}{\eta} dt$$

\Rightarrow

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} t$$



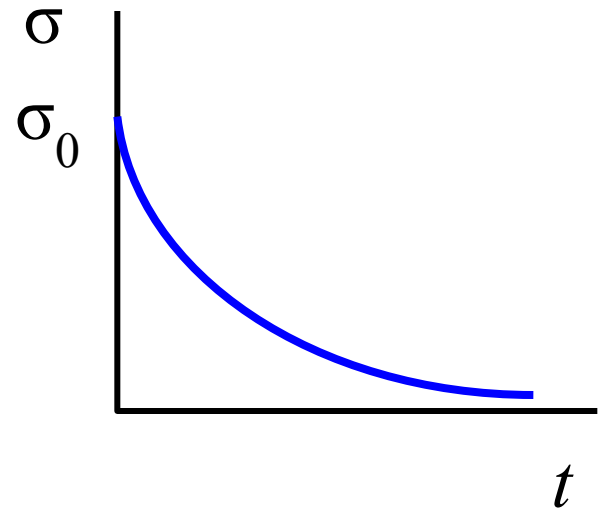
Пружина закреплена:

$$\varepsilon = \text{const} \rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \Rightarrow \frac{0}{E} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Разделяем переменные и «кучкуем» постоянные:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\int_0^t \frac{E}{\eta} dt \Rightarrow \sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta} t}$$



σ – напряжение в элементах в начальный момент времени (мгновенная деформация и закрепление пружины)¹⁷

Суммарное
напряжение:

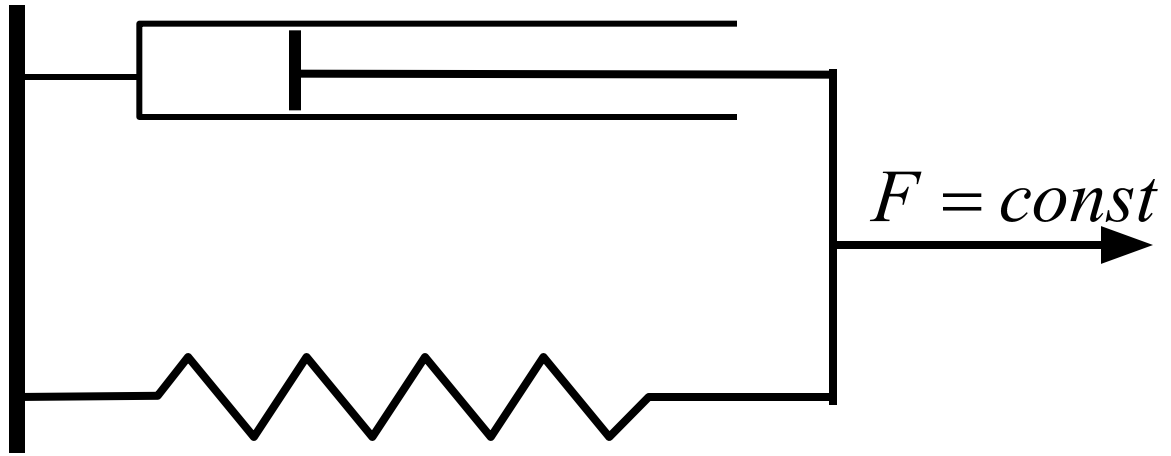
$$\sigma = \sigma_y + \sigma_B = const$$

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \varepsilon_B \quad (\text{см. 2.2})$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Разделение
переменных:

Параллельная модель:



$$\sigma - E\varepsilon = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{\eta} = \frac{d\varepsilon}{\sigma - E\varepsilon}$$

$$\int_0^t \frac{dt}{\eta} = \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\sigma - E\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^t \frac{dt}{\eta} = \frac{t}{\eta} \Big|_0^t = \frac{t}{\eta} \\ \int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\sigma - E\varepsilon} = -\frac{1}{E} \ln \left| -\varepsilon E \right| \Big|_0^\varepsilon = \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{E} \left(\ln \left| -\varepsilon E \right| - \ln \sigma \right) = -\frac{1}{E} \ln \frac{\varepsilon - E}{\sigma} = -\frac{1}{E} \ln \left(1 - \frac{E}{\sigma} \right)$$

$$\frac{t}{\eta} = -\frac{1}{E} \ln \left(1 - \frac{E}{\sigma} \right)$$

$$-\frac{E}{\eta} t = \frac{1}{E} \ln \left(1 - \frac{E}{\sigma} \right)$$

Потенцирование:

$$e^{-\frac{E}{\eta}t} = 1 - \frac{E\varepsilon}{\sigma}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right)$$

После снятия нагрузки F в момент времени t_0

при $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$:

$$\sigma = 0$$

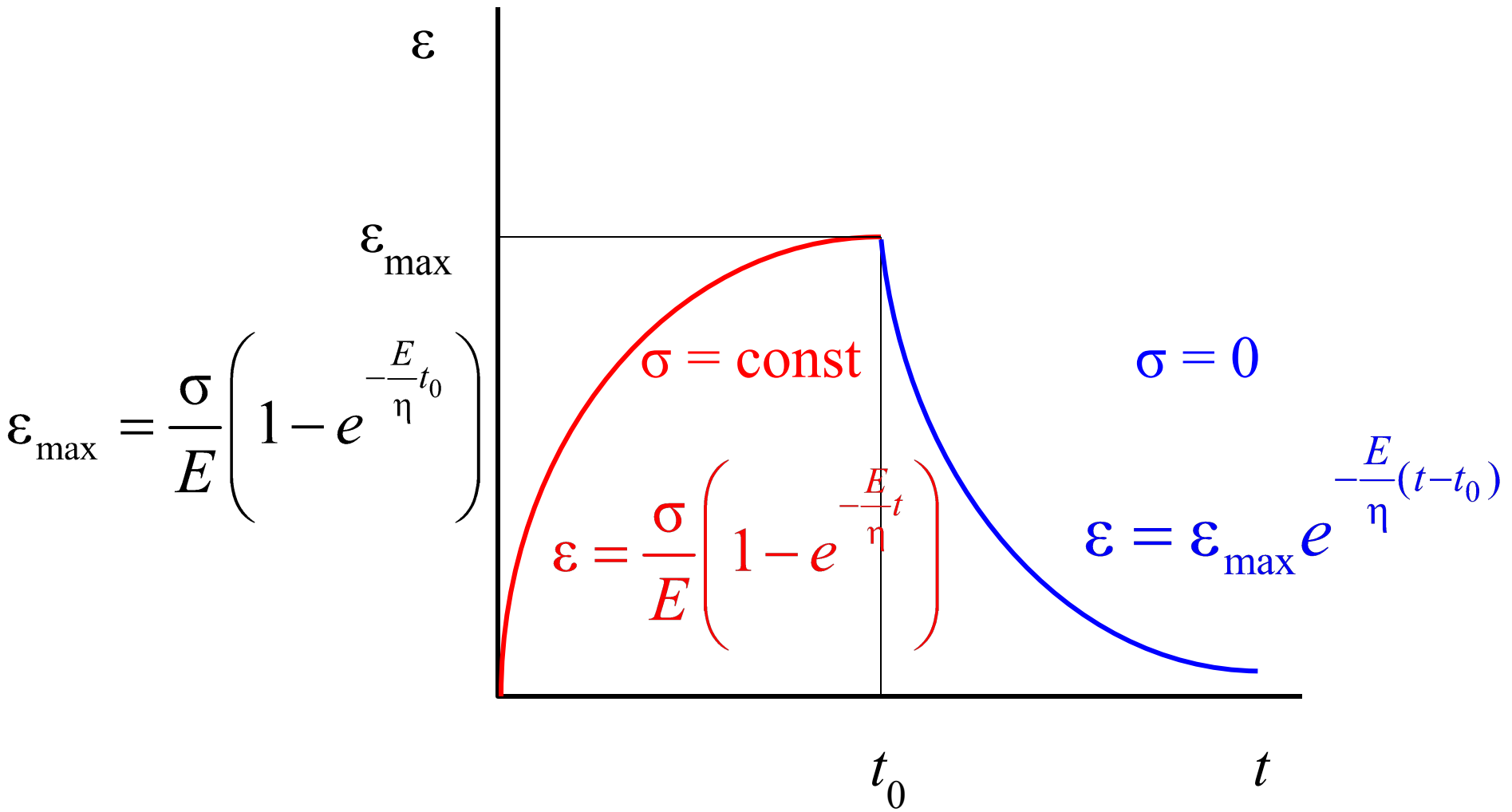
Пружина начинает сжиматься, перемещая поршень:

$$\theta = \eta E + \frac{d\varepsilon}{dt} \times \frac{dt}{\varepsilon} \Rightarrow \theta = E dt + \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

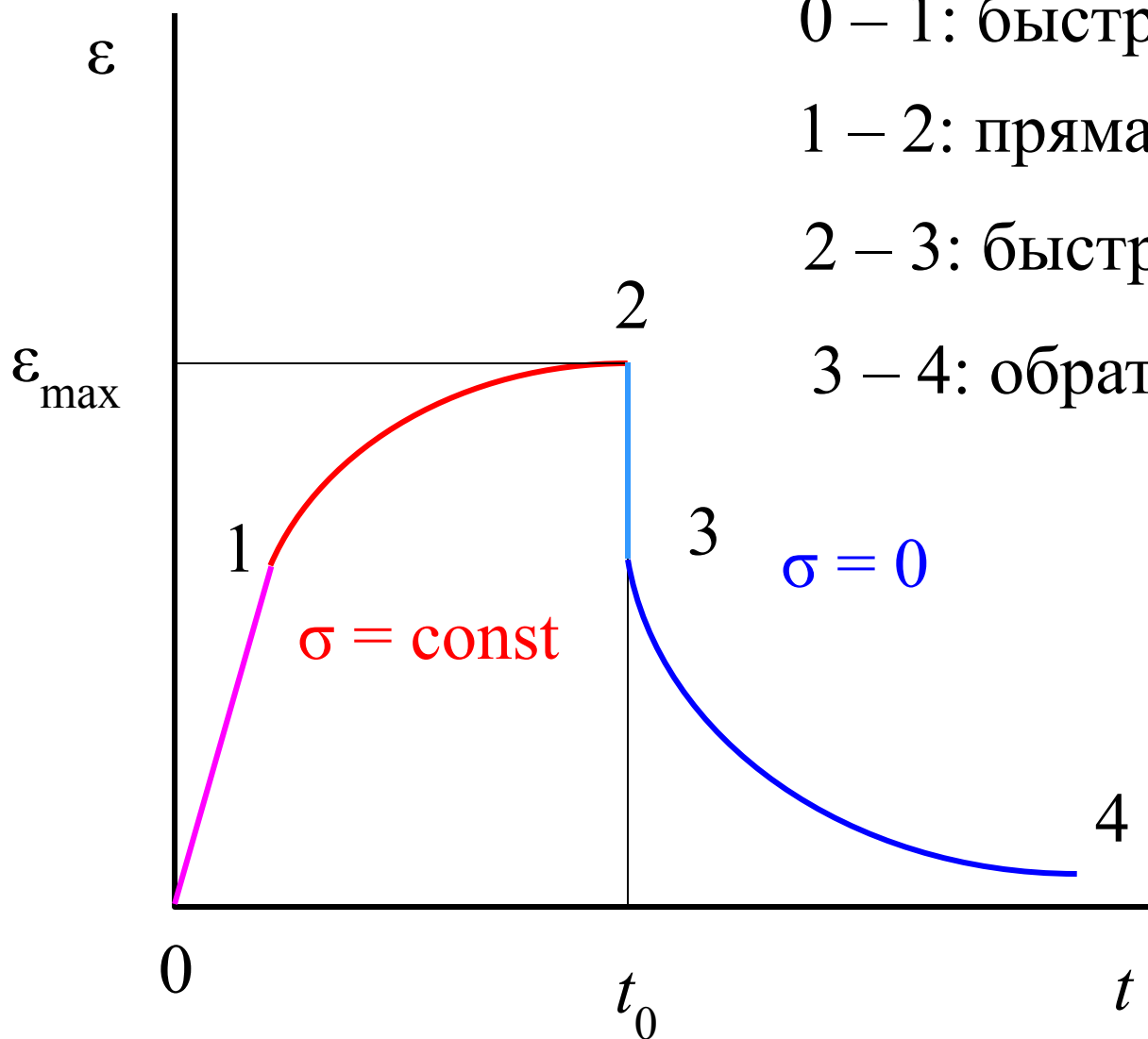
$$-\frac{E}{\eta} dt = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$-\frac{E}{\eta} \int_{t_0}^t dt = \int_{\varepsilon_{\max}}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad -\frac{E}{\eta} (t - t_0) = \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_0)}$$



Реальная костная ткань



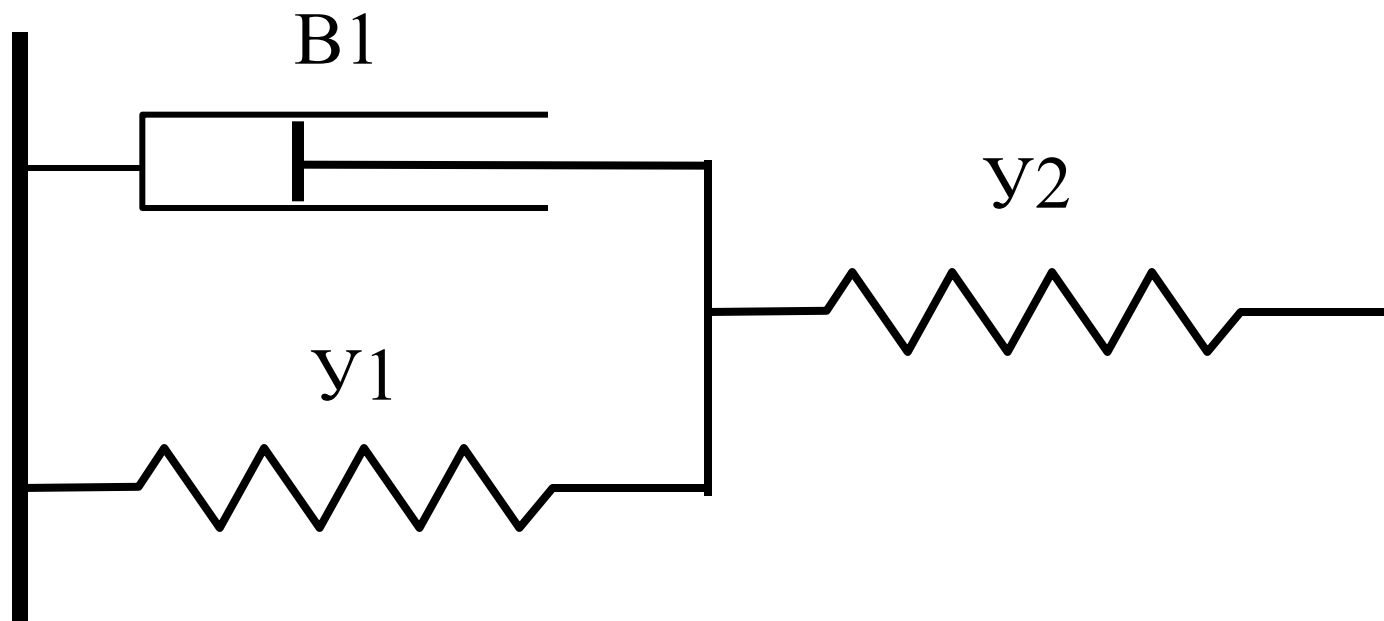
0 – 1: быстрая деформация

1 – 2: прямая ползучесть

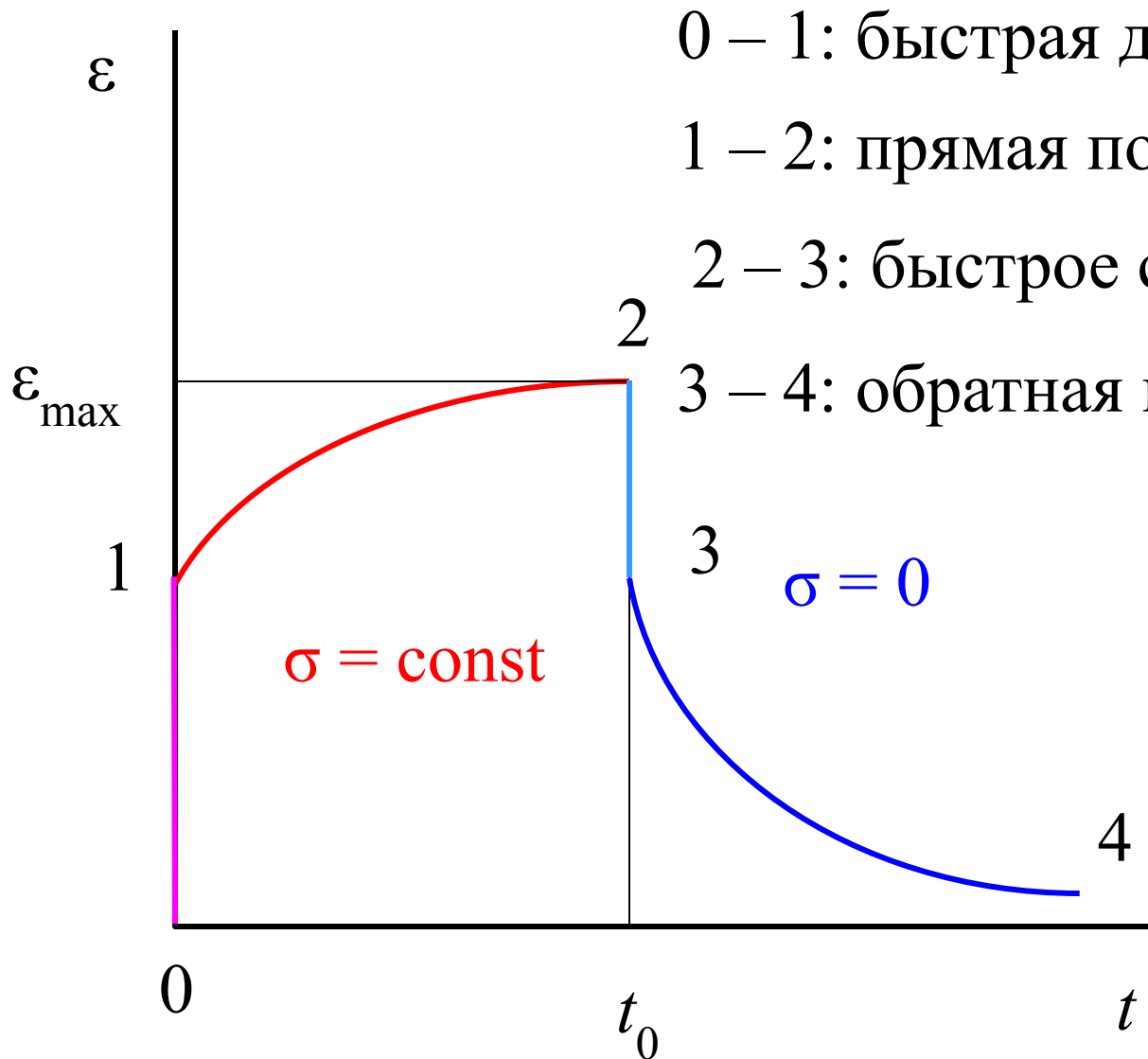
2 – 3: быстрое сокращение

3 – 4: обратная ползучесть

Смешанная модель



Смешанная модель



Тема следующего занятия:

Поверхностные явления.

Гидростатика.

Гидромеханика идеальной и вязкой жидкости.

Иметь при себе распечатанные выдачи лекции №3