

2. Прохождение сигнала и шума через приёмный тракт

Литература

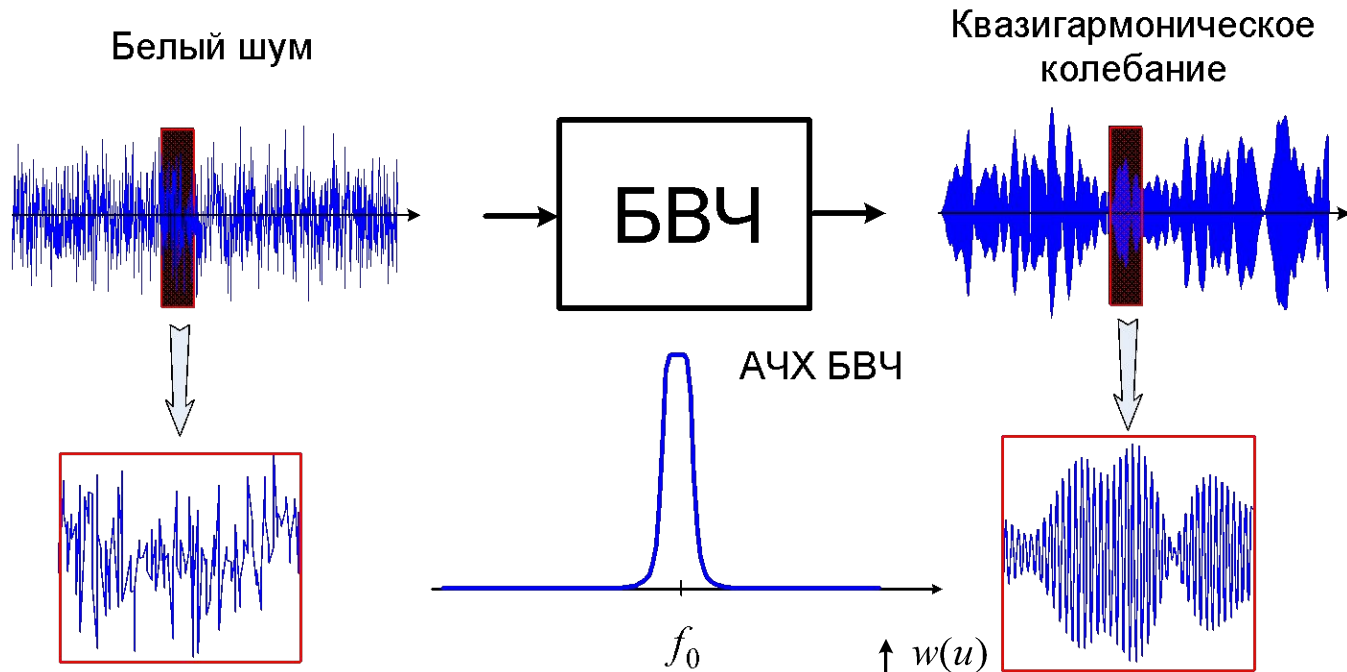
Карташёв В.Г., Шалимова Е.В. Основы теории случайных процессов. М.: изд-во МЭИ, 2005.

2.1. Статистические характеристики шума на выходе БВЧ

2.22.2. Статистические характеристики огибающей смеси сигнала и шума

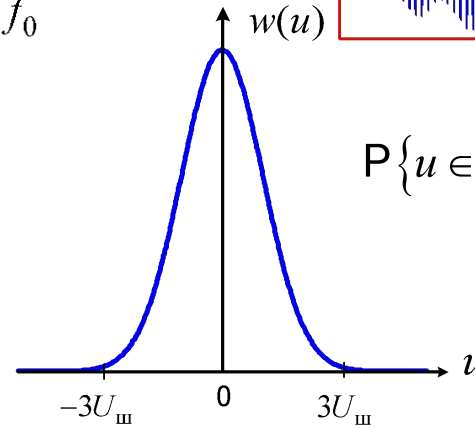
2.3. Приём ЧМ сигнала при действии шума

2.1. Статистические характеристики шума на выходе БВЧ



Плотность вероятности напряжения шума нормальное распределение)

$$w(u) = \frac{1}{U_{ш} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2U_{ш}^2}}$$



$$P\{u \in [-3U_{ш}, 3U_{ш}]\} = 0,997$$

Автокорреляционная функция шума (1)

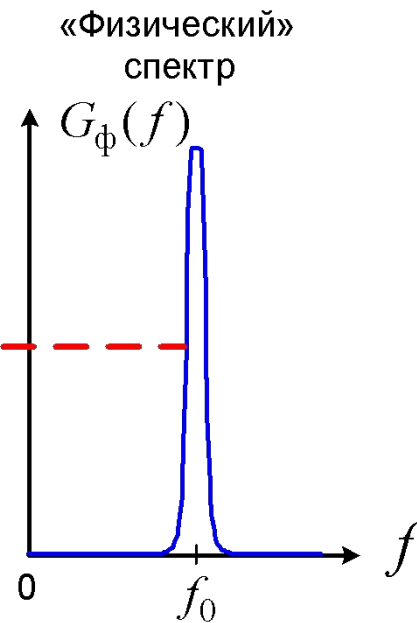
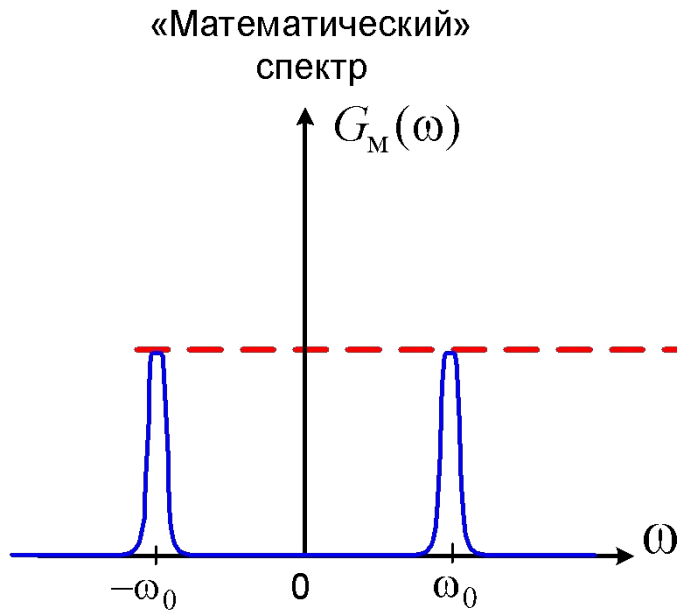
Теорема Винера-Хинчина

«Математический»
энергетический спектр

Автокорреляционная
функция (АКФ)

$$G_M(\omega) = \mathcal{F}\{K(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$K(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_M(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_M(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega$$




$$G_\phi(f) = 2G_M(2\pi f)$$

$$G_M(\omega) = \frac{1}{2} G_\phi\left(\frac{|\omega|}{2\pi}\right)$$

Автокорреляционная функция шума (2)

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_M(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_M(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \int_0^{\infty} G_\Phi(f) \cos(2\pi f \tau) df$$

Приближённое выражение при симметричной АЧХ БВЧ

АЧХ БВЧ: $K(f) = K_0 \kappa(f)$  Энергетически й спектр: $G_\Phi(f) = G_0 K_0^2 \kappa^2(f)$

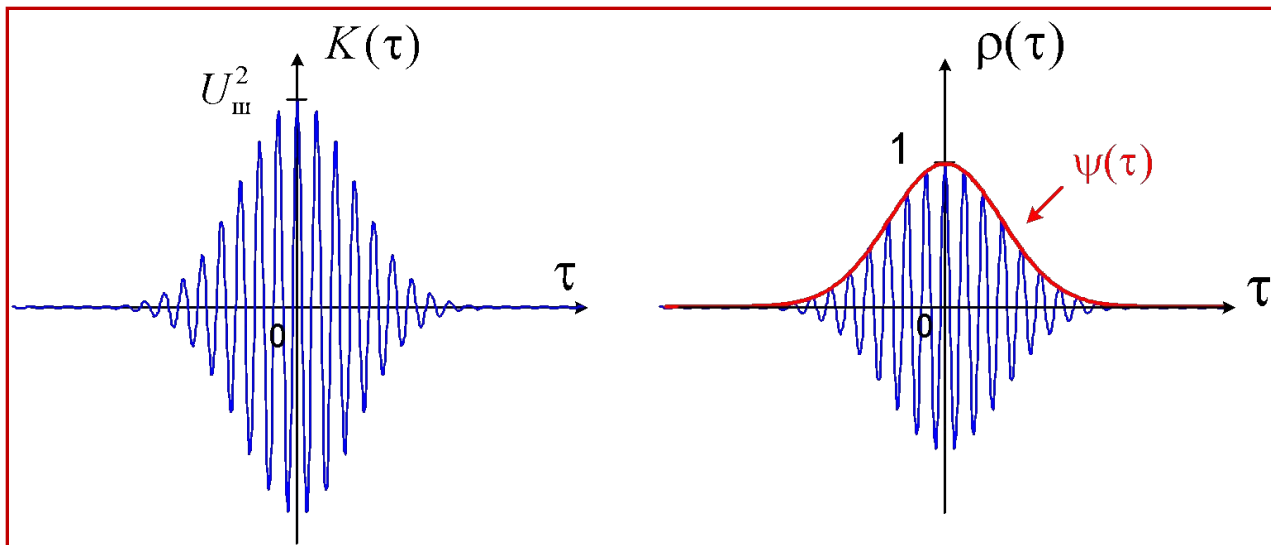
$$\begin{aligned} K(\tau) &= G_{\text{БВЧ}} K_0^2 \int_0^{\infty} \kappa^2(f) \cos(2\pi f \tau) df = G_0 K_0^2 \int_{-f_0}^{\infty} \kappa^2(F) \cos(2\pi f \tau + 2\pi F \tau) dF \approx \\ &\approx G_{\text{БВЧ}} K_0^2 \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(F) \cos(2\pi F \tau) dF_0 \right] \cos(2\pi f_{\text{БВЧ}} \tau) - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(F) \sin(2\pi F \tau) dF_0 \right] \sin(2\pi f \tau) \right\} = \\ &= 2G_{\text{БВЧ}} K_0^2 \left[\int_0^{\infty} \kappa^2(F) \cos(2\pi F \tau) dF \right] \cos(2\pi f \tau) \end{aligned}$$

Автокорреляционная функция шума (3)

$$K(\tau) = U_{\text{ш}}^2 \psi(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$U_{\text{ш}}^2 = K(0)$ — мощность шума на выходе БВЧ

$$\psi(\tau) = \frac{2}{\Pi_{\text{ш}}} \int_0^{\infty} \Pi_{\text{ш}}^2 \rho(f) \cos(2\pi f \tau) df$$



2.2. Статистические характеристики огибающей смеси сигнала и шума

Статистические характеристики низкочастотных квадратурных составляющих шума

Шум - квазигармоническое колебание:

$$u(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = U(t) \cos \varphi(t) \cdot \cos \omega_0 t - U(t) \sin \varphi(t) \cdot \sin \omega_0 t = U^c(t) \cdot \cos \omega t - U^s(t) \cdot \sin \omega t$$

Свойства квадратурных составляющих шума:

нормальные случайные процессы с

нулевым математическим ожиданием:

$$\overline{U_{\text{ш}}^s(t)} = \overline{U_{\text{ш}}^c(t)} = 0$$

Дисперсия $\overline{[U_{\text{ш}}^s(t)]^2} = \overline{[U_{\text{ш}}^c(t)]^2} = U_{\text{ш}}^2$

АКФ $K_{U_{\text{ш}}^c}(\tau) = K_{U_{\text{ш}}^s}(\tau) = U_{\text{ш}}^2 \psi(\tau) \Rightarrow (K) \tau = K_{U_{\text{ш}}^c} \cos \omega_0 \tau = K_{U_{\text{ш}}^s} \cos \omega_0 \tau$

В) совпадающие моменты времени $\overline{U_{\text{ш}}^s(t) U_{\text{ш}}^s(t)} = 0$

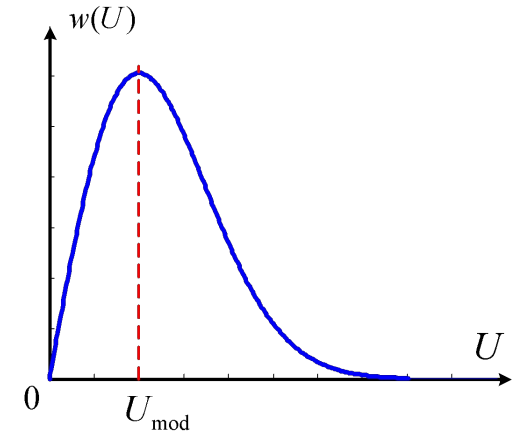
Огибающая $(U) t = \sqrt{(\overline{[U_{\text{ш}}^s(t)]^2} + (\overline{[U_{\text{ш}}^c(t)]^2})^2}$

Статистические характеристики огибающей шума на выходе БВЧ

Распределение Релея $w(U) = \frac{U}{U_{\text{ш}}^2} e^{-\frac{U^2}{2U_{\text{ш}}^2}}, \quad U \geq 0$

Мода: $U_{\text{mod}} = U$

Среднее значение: $\bar{U} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} U_{\text{ш}} \approx 1,25 U_{\text{ш}} > U_{\text{mod}}$



Дисперсия: $\sigma_U^2 = \frac{4-\pi}{2} U_{\text{ш}}^2 \approx 0,43 U_{\text{ш}}^2$ СКО: $\sigma_U = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} U_{\text{ш}} \approx 0,66 U_{\text{ш}}$

АКФ: $K_U(\tau) = \overline{[U(t) - \bar{U}(t)][U(t+\tau) - \bar{U}(t+\tau)]} = \sigma_U^2 \rho_U(\tau)$

Нормированная огибающая АКФ:

$$\rho_U(\tau) = \frac{\pi}{4-\pi} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \psi^2(\tau) + \left(\frac{1}{2 \cdot 4} \right)^2 \psi^4(\tau) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \psi^6(\tau) + \dots \right] \approx$$

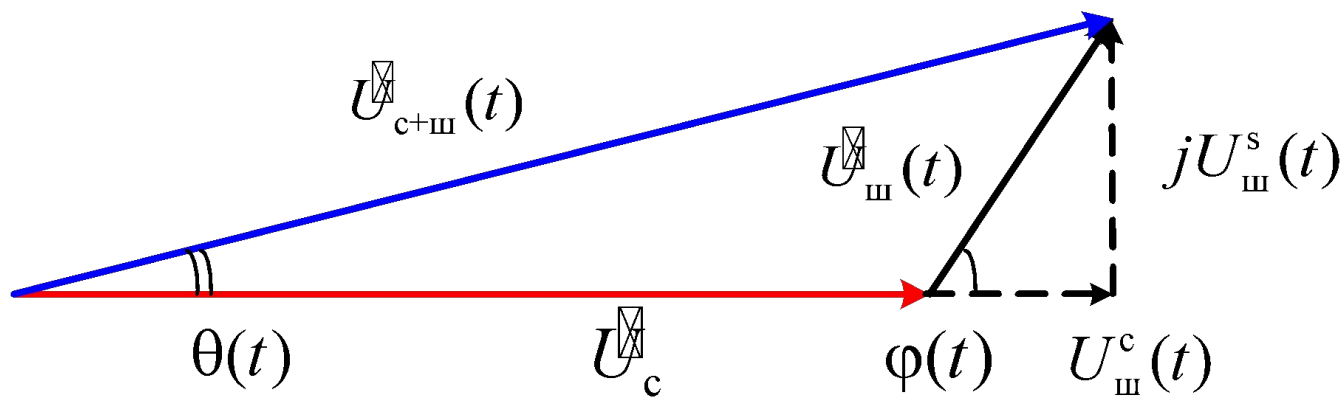
$$\approx 0,915 \psi^2(\tau) + 0,057 \psi^4(\tau) + 0,014 \psi^6(\tau) + \dots \approx \psi^2(\tau)$$

Статистические характеристики огибающей суммы сигнала и шума на выходе БВЧ (1)

Сигнал $u_c(t) = U_c \cos \omega_0 t$, шум $u_{ш}(t) = U_{ш}^c(t) \cos \omega_0 t - U_{ш}^s(t) \sin \omega_0 t$

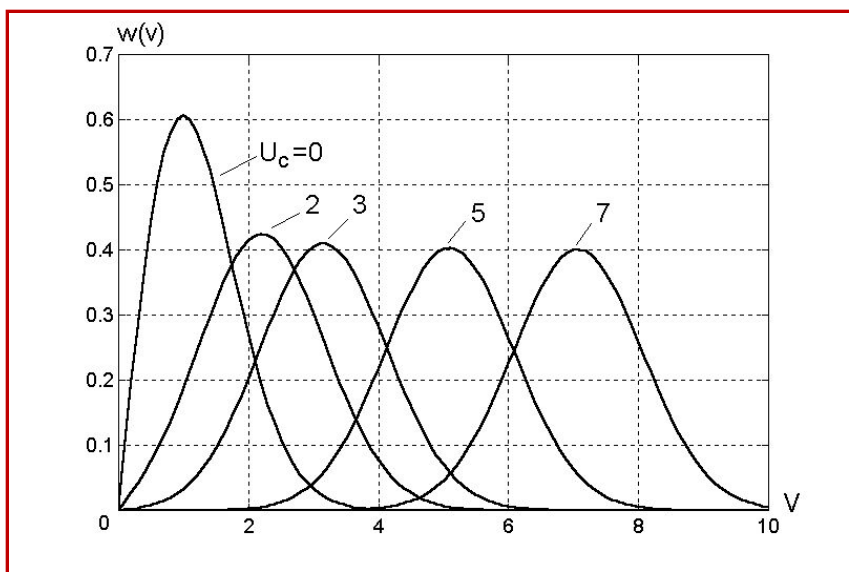
$$u_c(t) + u_{ш}(t) = \left[U_{ш}^c(t) + U_c \right] \cos \omega_0 t - U_{ш}^s(t) \sin \omega_0 t = V(t) \cos \left[\omega_0 t + \theta(t) \right]$$

$$\text{Огибающая с+ш } V(t) = \sqrt{\left[U_c + U_{ш}^c(t) \right]^2 + U_{ш}^s(t)^2}$$



Статистические характеристики огибающей суммы сигнала и шума на выходе БВЧ (2)

Распределение Райса $w(V) = \frac{V}{U_{\text{ш}}^2} I_0\left(\frac{VU_c}{U_{\text{ш}}^2}\right) e^{-\frac{V^2+U_c^2}{2U_{\text{ш}}^2}}, \quad V \geq 0$



Сигнал отсутствует $U_c = 0 : I_0(0) = 1 \Rightarrow$

$$w(V) = \frac{V}{U_{\text{ш}}^2} e^{-\frac{V^2}{2U_{\text{ш}}^2}}$$

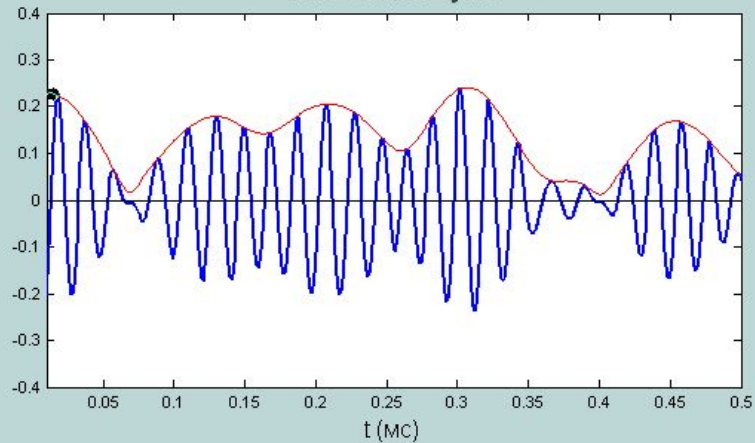
– распределение Релея

Отношение сигнал-шум $a = \frac{U_c}{U_{\text{ш}}} \gg 1 : I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \Rightarrow$

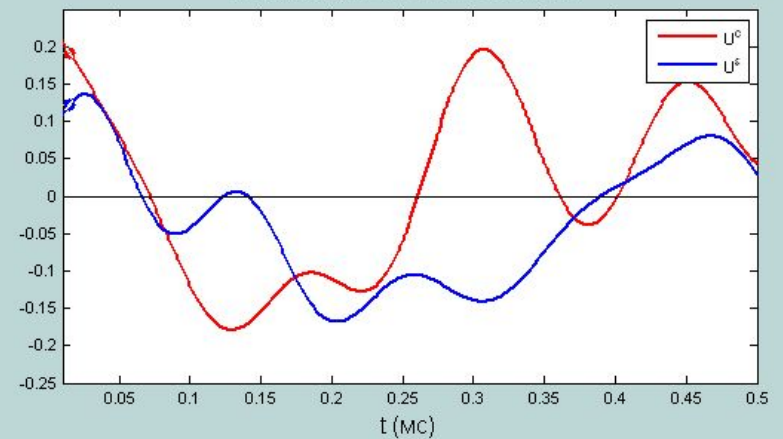
нормальное распределение $w(V) = \frac{1}{U_{\text{ш}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V-U_c)^2}{2U_{\text{ш}}^2}}$

Шум на выходе БВЧ ($U_c = 0$)

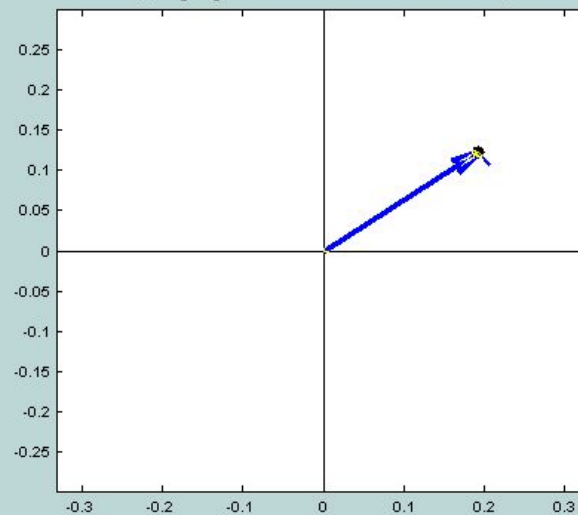
Реализация шума



Квадратурные составляющие



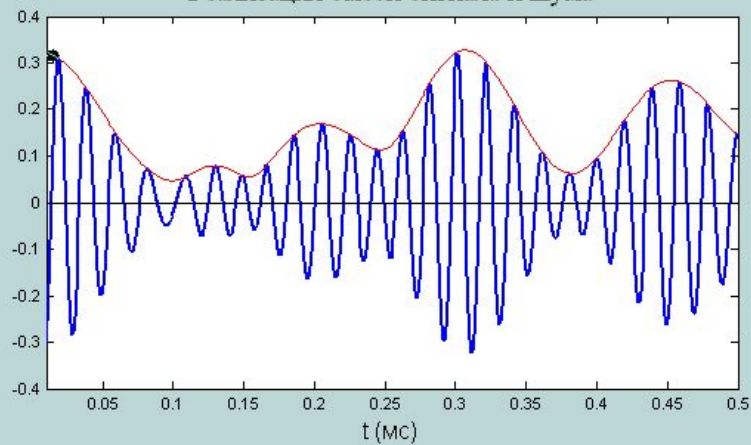
Вектор комплексной огибающей



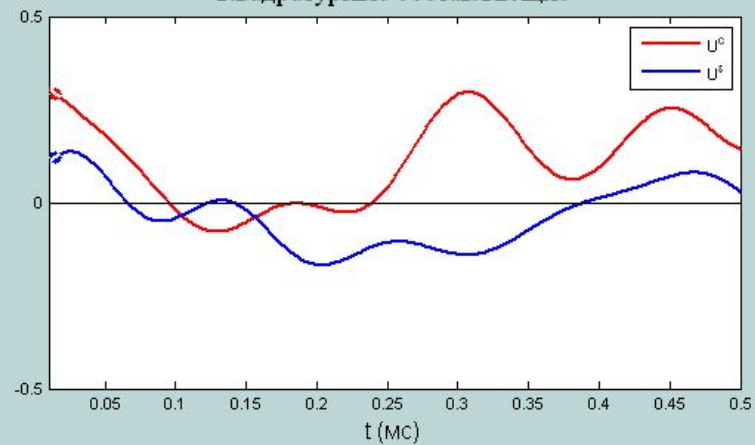
$$U_{ш} = 0,1$$

Сигнал + шум на выходе БВЧ ($U_c = 0,1$)

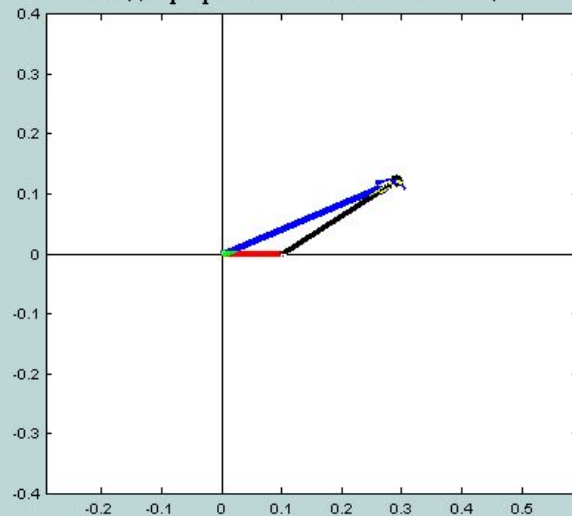
Реализация смеси сигнала и шума



Квадратурные составляющие

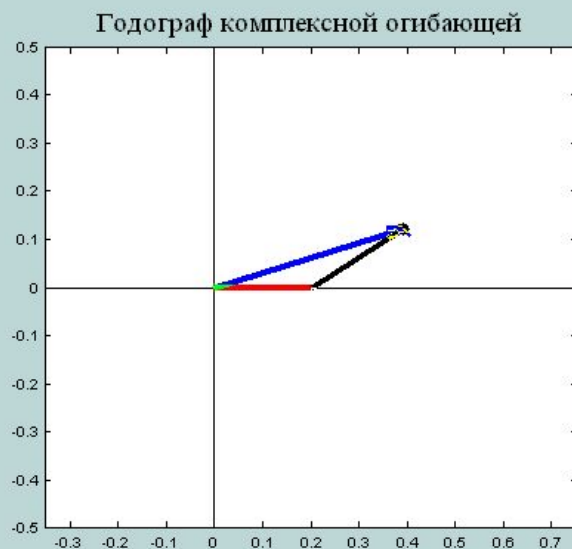
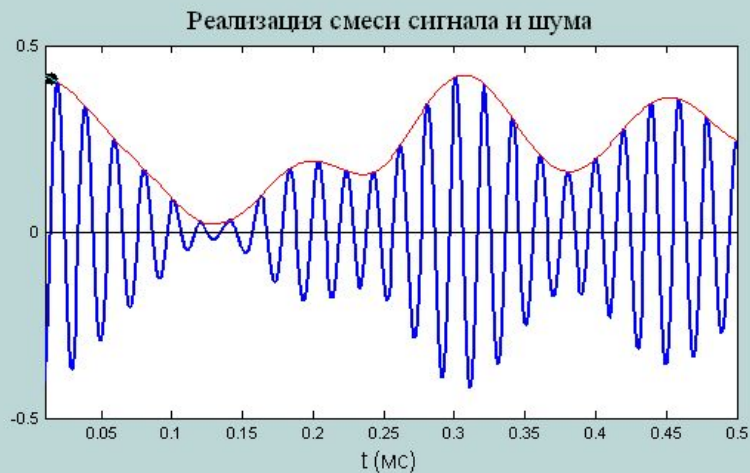


Годограф комплексной огибающей



$$U_{\text{ш}} = 0,1$$

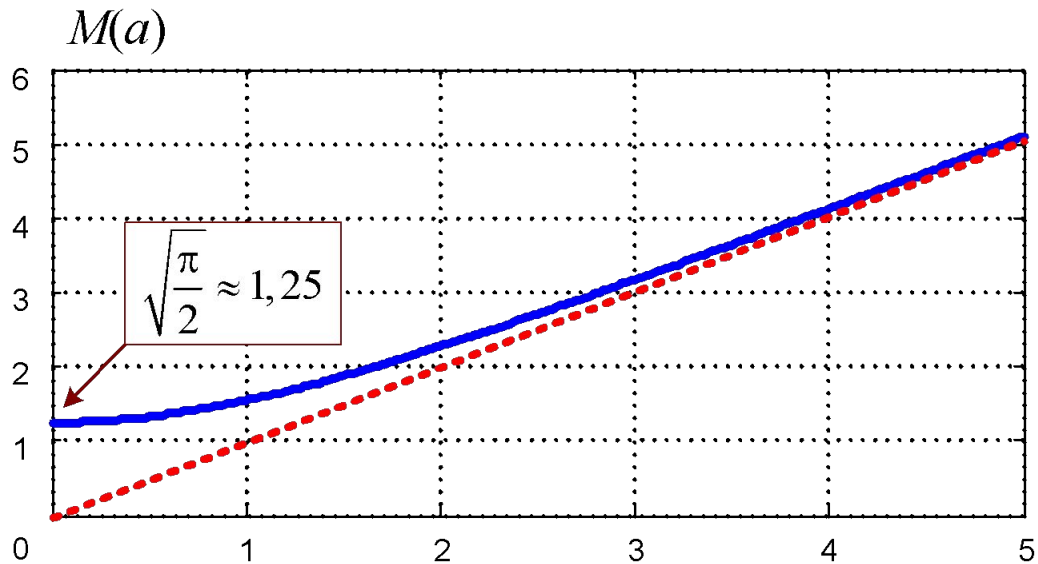
Сигнал + шум на выходе БВЧ ($U_c = 0,2$)



$$U_{\text{ш}} = 0,1$$

Математическое ожидание (среднее значение) огибающей

$$\bar{M} = \int_0^{\infty} V_{\text{Райса}}(V) M(V) dV = U_{\text{ш}} \left(\right), \quad 1 \quad I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a^2}{4} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{a^2}{4} \right) \right]$$



При $a = 0$: $M(a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25$,

при $a \ll 1$: $M(a) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{a^2}{4} \right)$,

при $a > 1$: $M(a) \approx \sqrt{a^2 + 1}$,

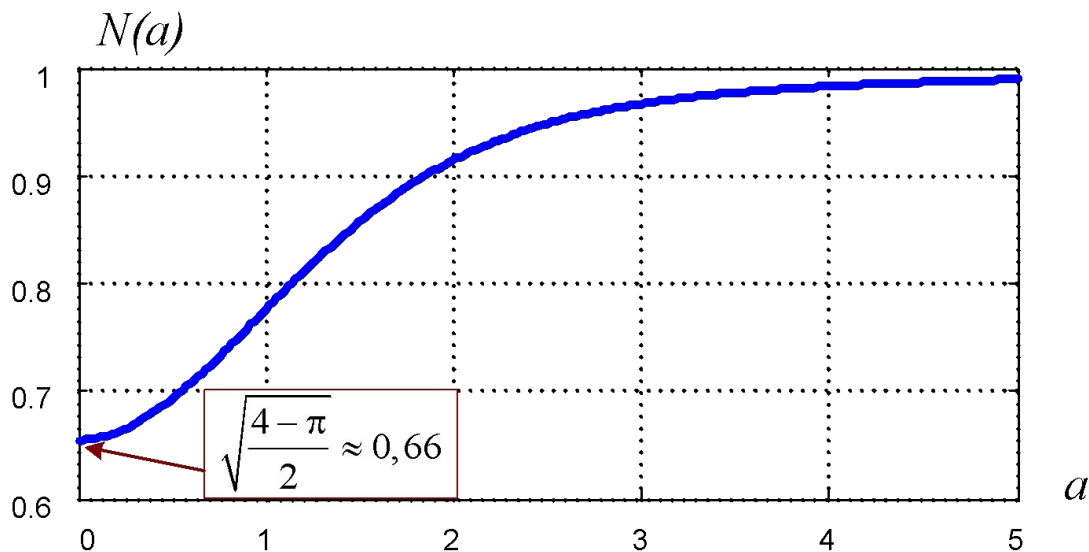
при $a \gg 1$: $M(a) \approx a$

Среднее значение напряжения на выходе АД: $\bar{M}_d \neq K_d \bar{V} = K_d U_{\text{ш}} \quad ()$

Среднеквадратичное отклонение (эффективное значение случайной составляющей)

$$\sigma_V = \sqrt{\int_0^{\infty} (V - \bar{V})^2 w_{\text{Райса}}(V) dV} = U_{\text{ш}} N(a),$$

$$N(a) = \sqrt{1 + a^2 - M^2} / a$$

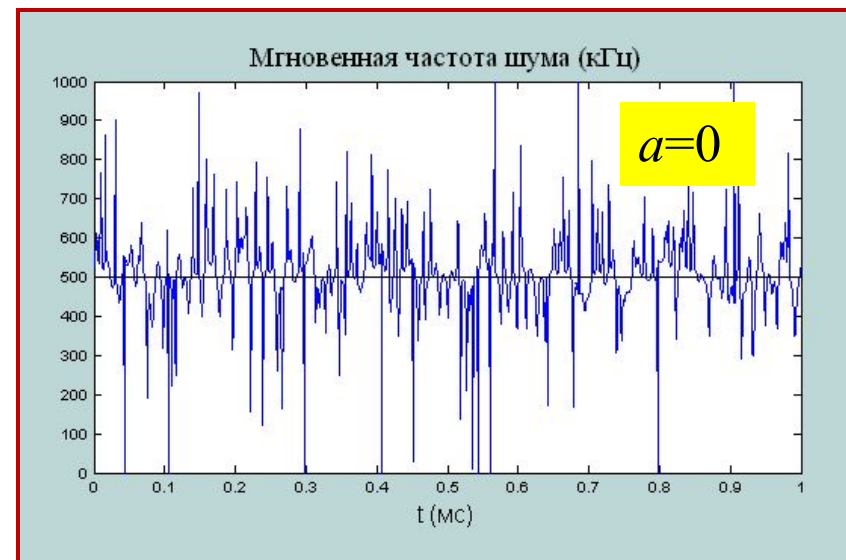
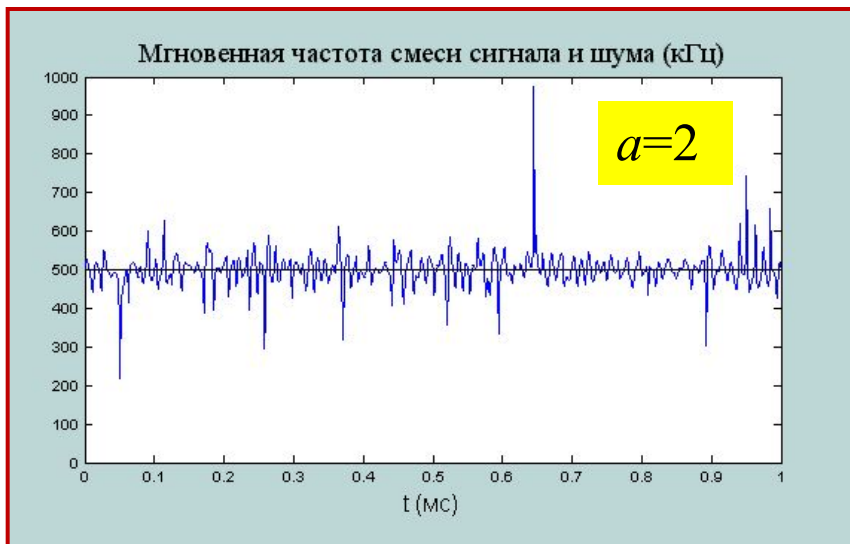
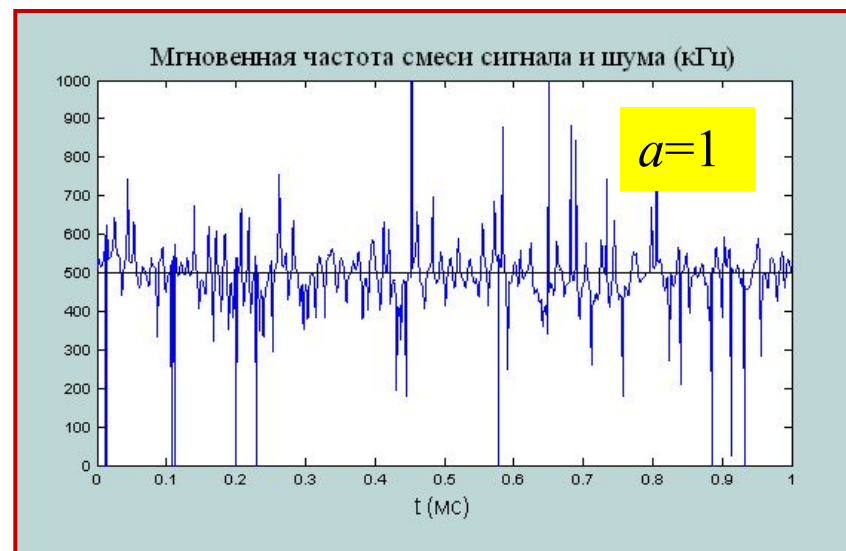
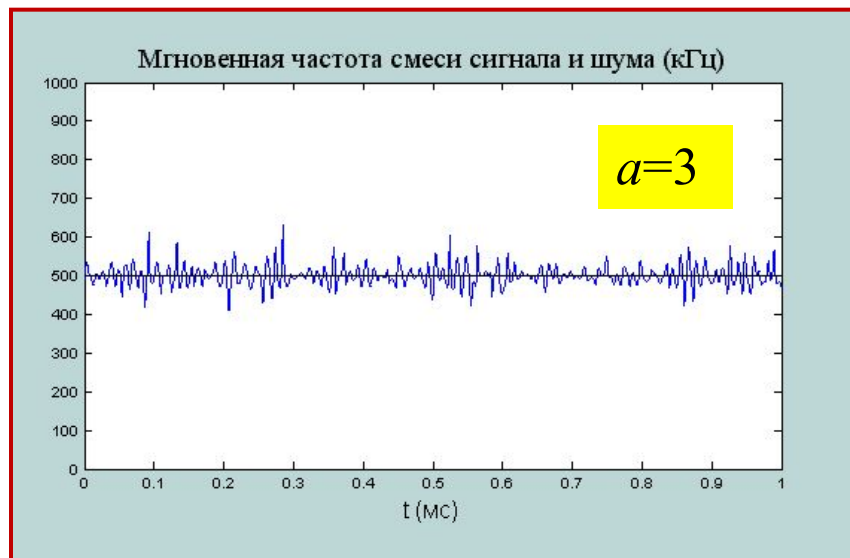


При $a = 0$: $N(a) = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} \approx 0,66,$

при $a \gg 1$: $N(a) \approx 1$

Эффективное напряжение шума на выходе АД: $\sigma_{U_{\text{д}}} = K_{\text{д}} \sigma_V = K_{\text{д}} U_{\text{ш}} N(a)$

2.3. Приём ЧМ сигнала при действии шума



Статистические характеристики мгновенной частоты смеси сигнала и шума

Сигнал + шум: $u_c(t) + u_{ш}(t) = U_0 \cos \omega_0 t + U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = V(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t))$

Мгновенная круговая частота: $\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt}$

Плотность вероятности
мгновенной частоты шума:

$$w(\omega) = \frac{-\Psi_0''}{2 \left[(\omega - \omega_0)^2 - \Psi_0'' \right]^{3/2}},$$

$$\Psi_0'' = \left. \frac{d^2 \Psi(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}$$

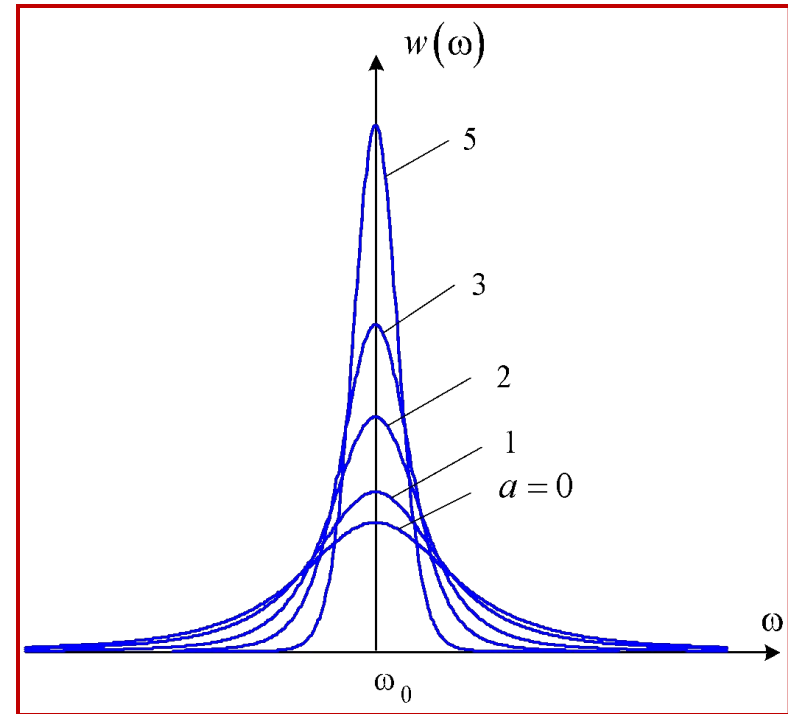
$$\bar{\omega} = \omega_0$$

Математическое
ожидание:

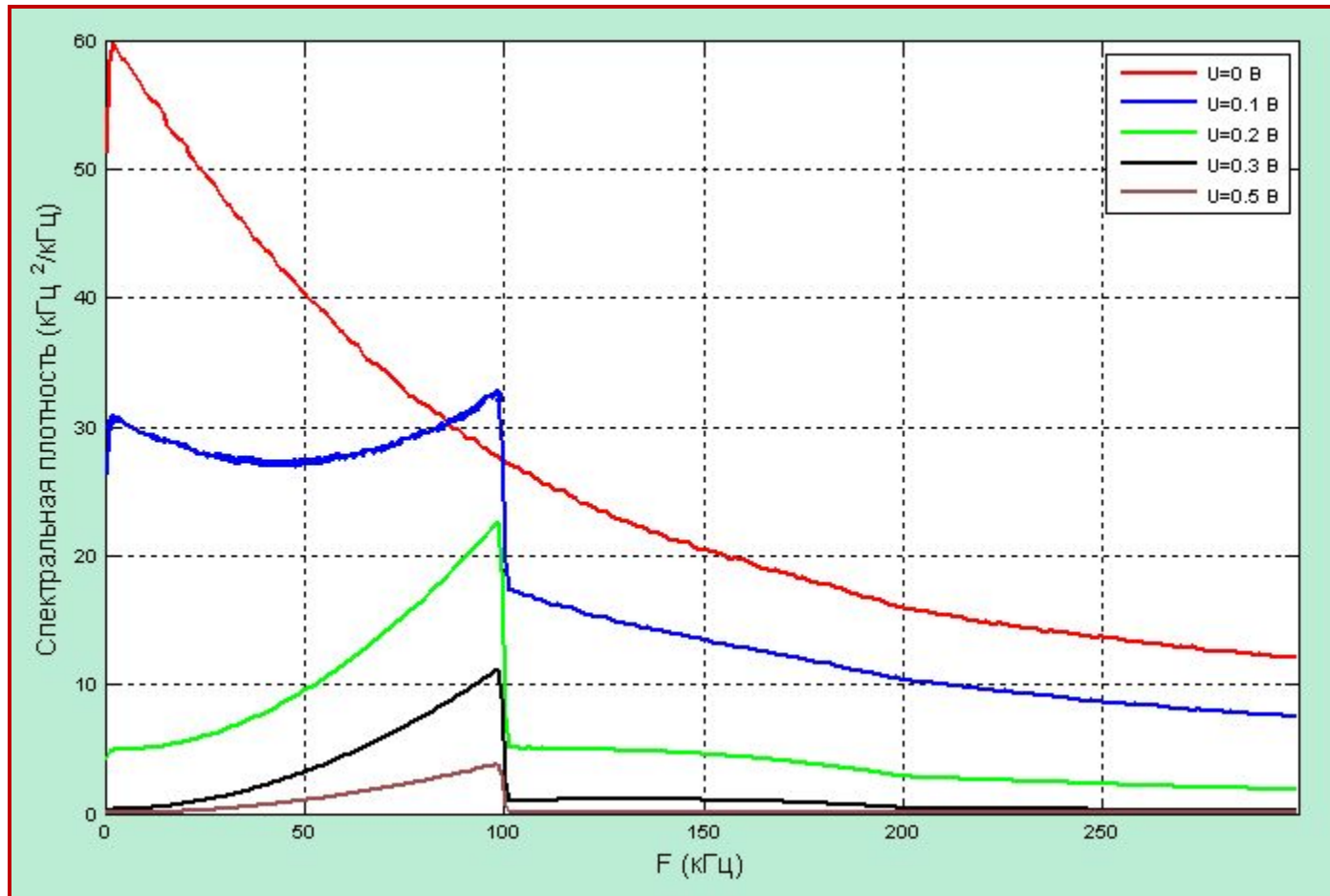
СК $\sigma_\omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2} \rightarrow \infty$

О:
Среднее абсолютное
отклонение:

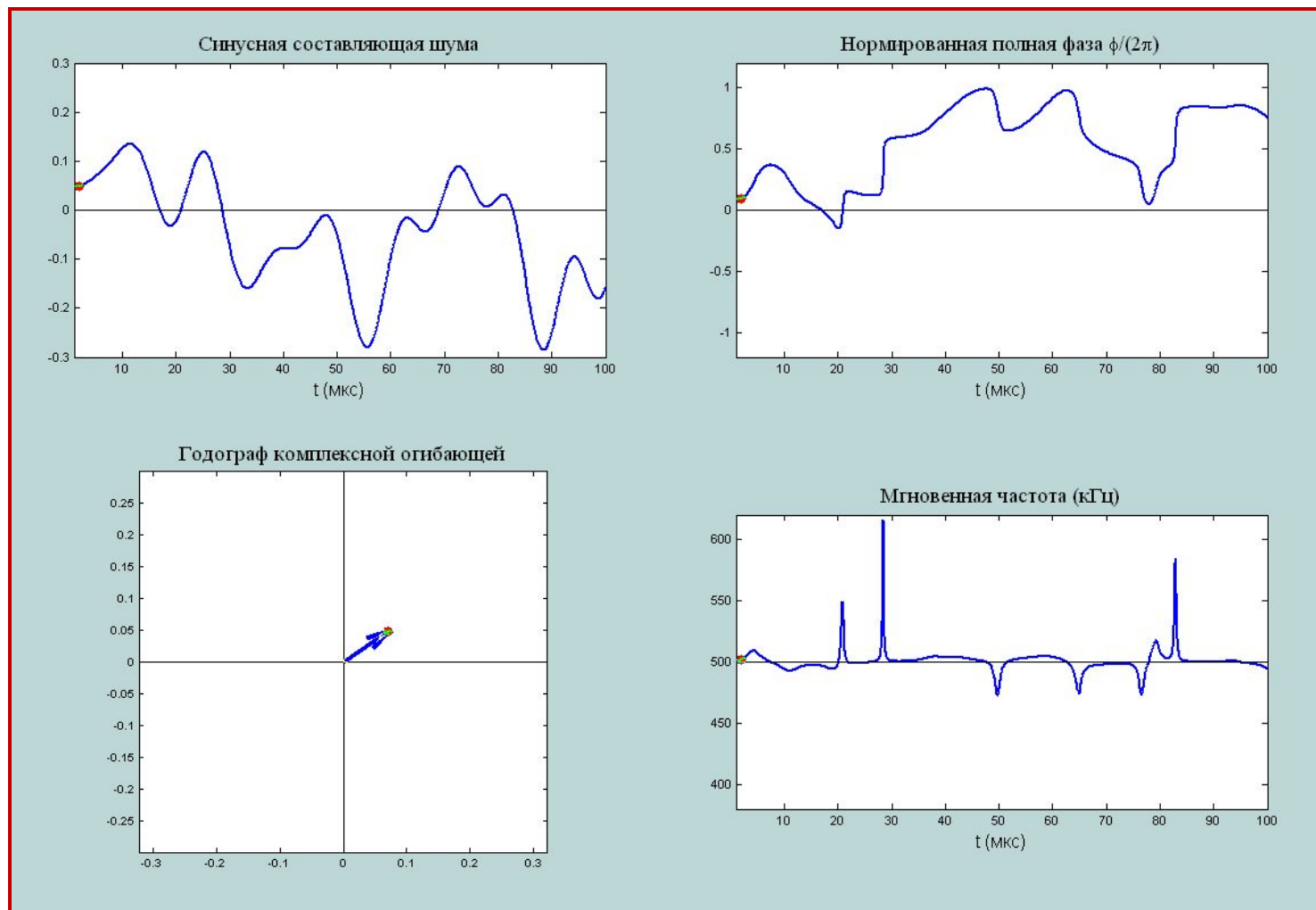
$$S_\omega = |\omega - \omega_0| = \sqrt{-\Psi_0''}$$



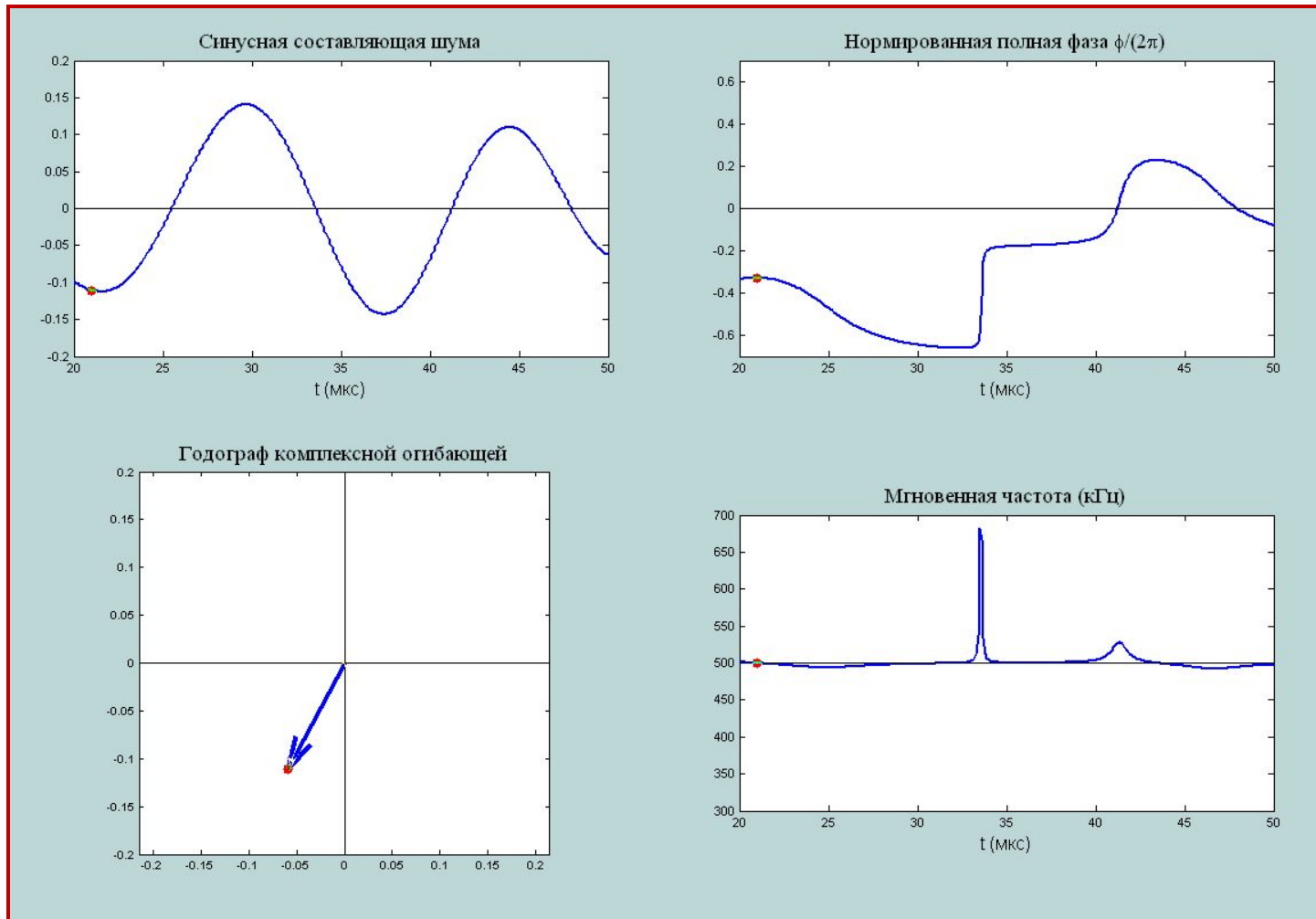
Энергетический спектр мгновенной частоты смеси сигнала и шума (прямоугольная АЧХ БВЧ)



Аномальные выбросы мгновенной частоты шума



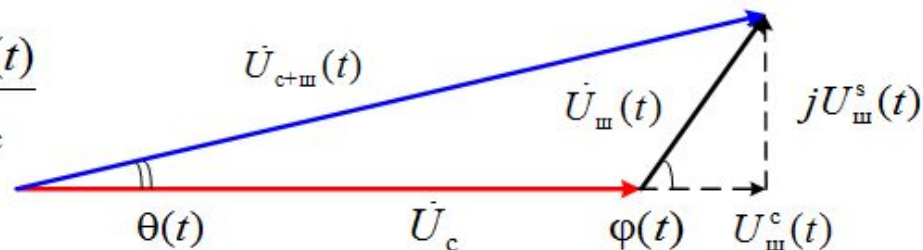
Аномальный выброс



АКФ и энергетический спектр мгновенной частоты при $a \gg 1$

$$\theta(t) = \arctg \frac{U_{\text{м}}^s(t)}{U_c + U_{\text{м}}^c(t)} \approx \arctg \frac{U_{\text{м}}^s(t)}{U_c} \approx \frac{U_{\text{м}}^s(t)}{U_c}$$

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \approx \frac{1}{U_c} \frac{dU_{\text{м}}^s(t)}{dt}$$



АКФ производной: $K_{X'}(\tau) = -K_X''(\tau) \Rightarrow K_{\Delta\omega}(\tau) = -K_{\theta}''(\tau) \approx -\frac{1}{U_c^2} K_{U_{\text{м}}^s}''(\tau)$

"Математический" спектр круговой частоты (теорема Винера-Хинчина):

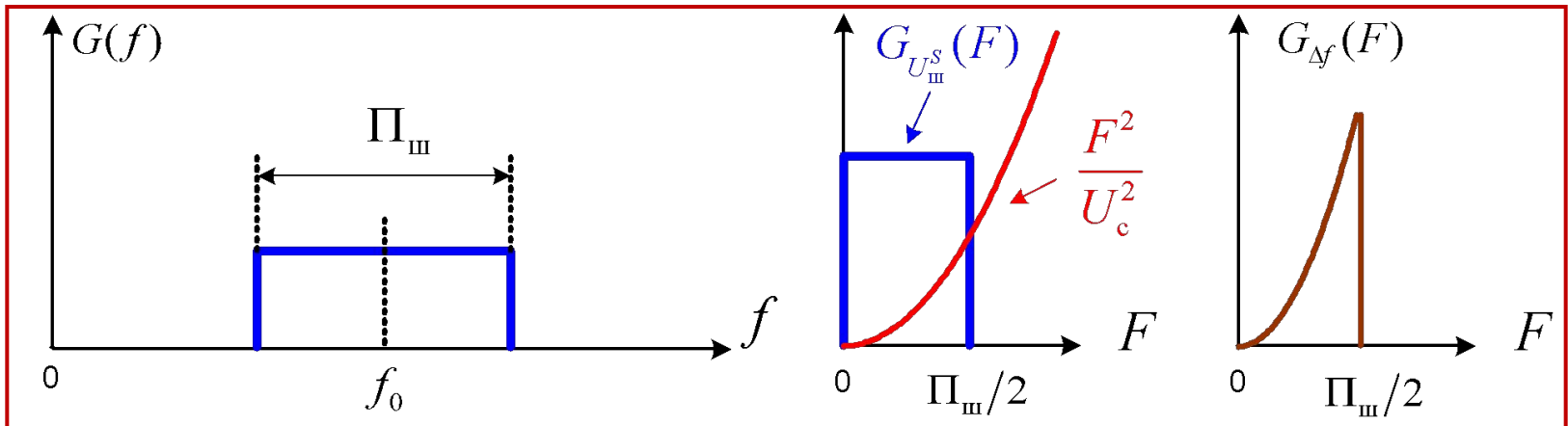
$$G_{\Delta\omega\text{м}}(\Omega) = \mathcal{F}\{K_{\Delta\omega}(\tau)\} \approx -\frac{1}{U_c^2} \mathcal{F}\{K_{U_{\text{м}}^s}''(\tau)\} = -\frac{1}{U_c^2} (j\Omega)^2 \mathcal{F}\{K_{U_{\text{м}}^s}(\tau)\} = \frac{\Omega^2}{U_c^2} G_{U_{\text{м}}^s\text{м}}(\Omega)$$

"Физический" спектр частоты: т.к. $F = \frac{\Omega}{2\pi}$, то $G_{\Delta f}(F) = 2G_{\Delta\omega\text{м}}(2\pi F) = 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 G_{\Delta\omega\text{м}}(2\pi F) \approx$

$$\approx 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{(2\pi F)^2}{U_c^2} G_{U_{\text{м}}^s\text{м}}(2\pi F) = \frac{F^2}{U_c^2} \cdot 2G_{U_{\text{м}}^s\text{м}}(2\pi F) = \frac{F^2}{U_c^2} G_{U_{\text{м}}^s}(F)$$

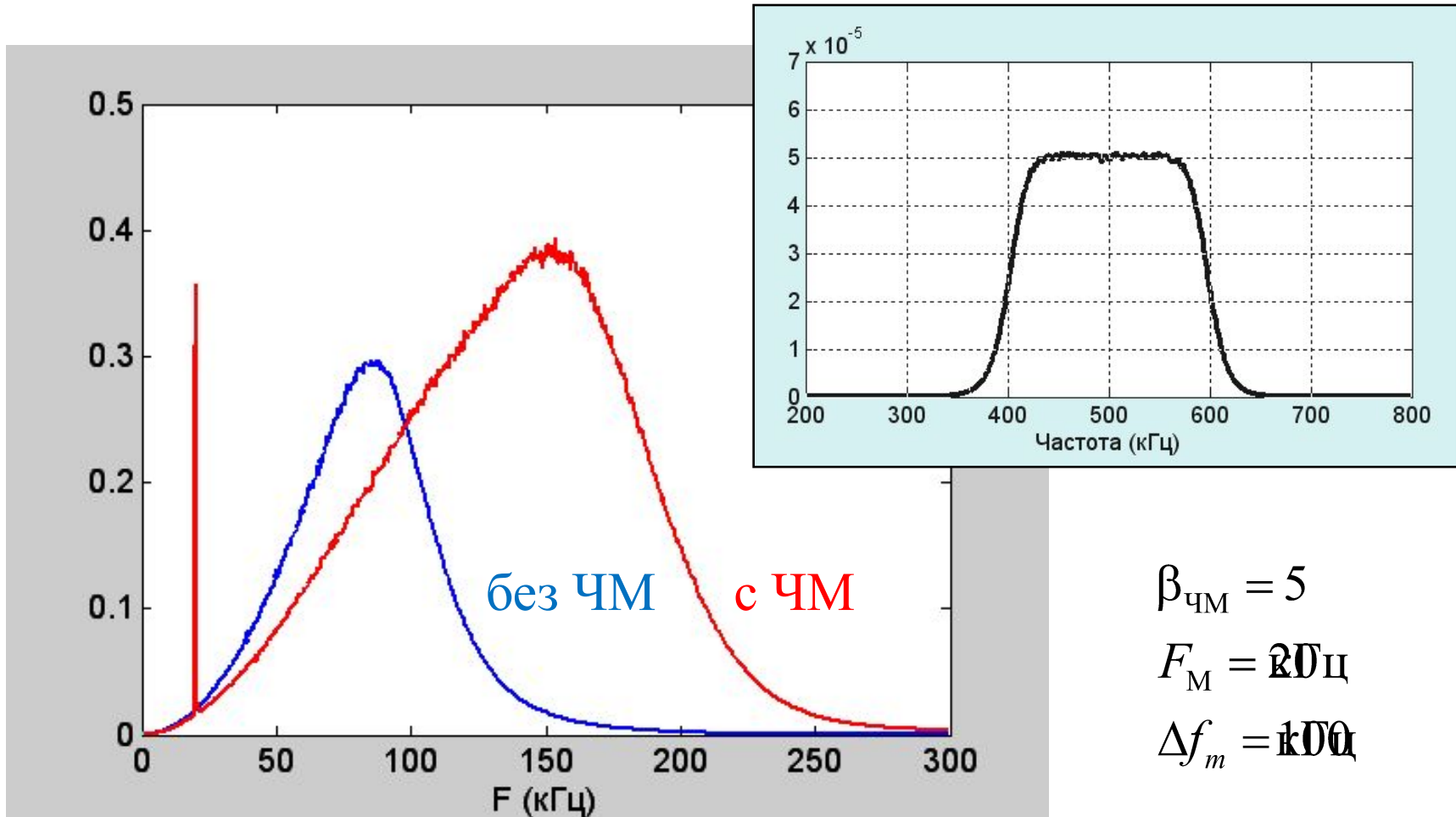
Энергетический спектр мгновенной частоты при $a \gg 1$

$$G_{\Delta f}(F) \approx \frac{F^2}{U_c^2} G_{U_m^s}(F)$$



Энергетический спектр напряжения на выходе ЧД ($a = 10$)

Спектр шума на
выходе БВЧ



$$\beta_{\text{ЧМ}} = 5$$

$$F_M = 200$$

$$\Delta f_m = 100$$