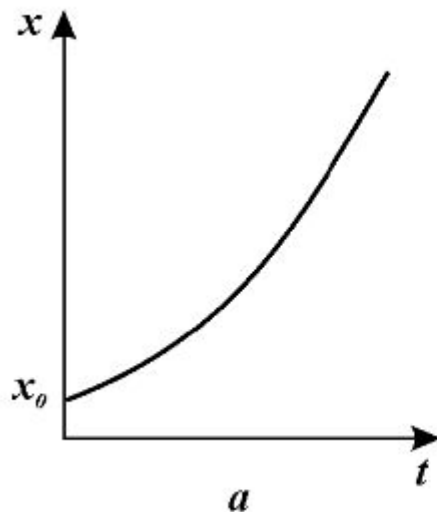


Принцип ієрархії моделей

експонентне зростання

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$

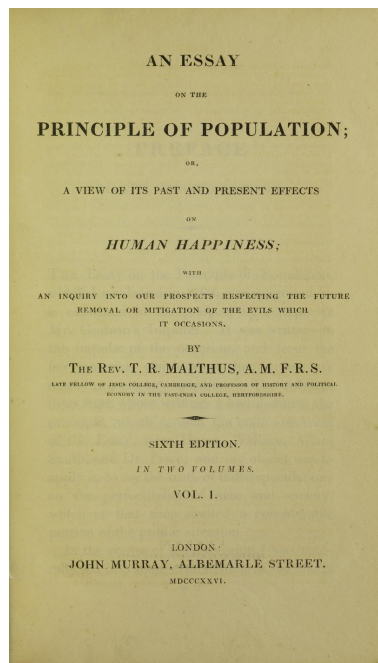


Augustin Louis Cauchy
1789-1857

$$y' = f(x, y)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$



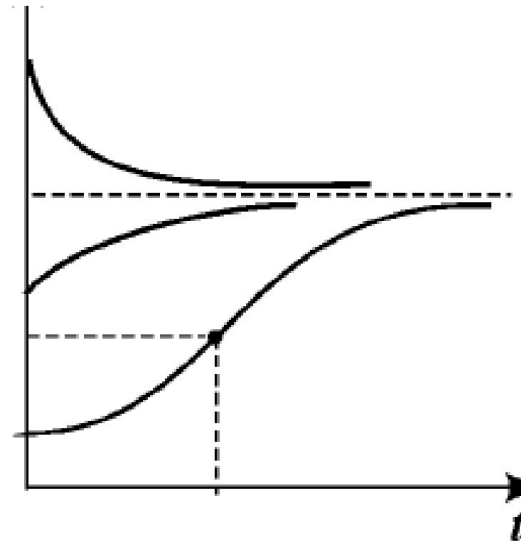
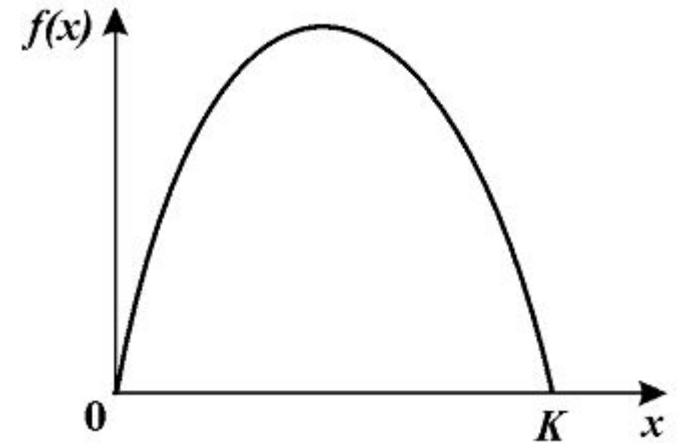
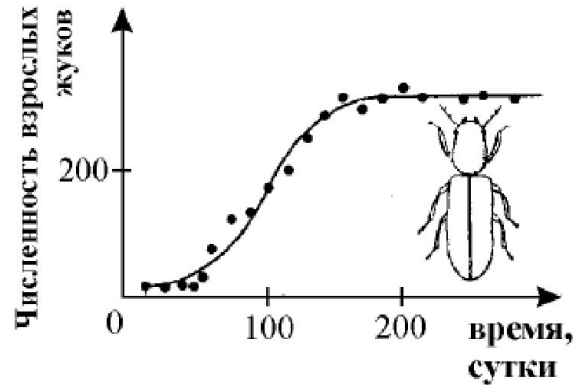
Томас Роберт Мальтус
1766-1834

обмежене зростання



Pierre Francois Verhulst

1804-1849



$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

$$f(\bar{x}) = 0 \quad \bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = K$$

$$a = f'(x) \Big|_{x=\bar{x}} = r - \frac{2r\bar{x}}{K}$$

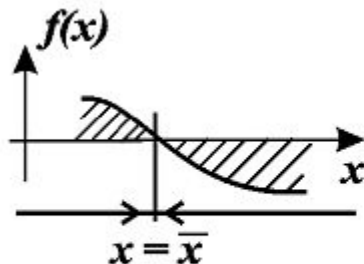
Дослідження стійкості стаціонарного стану

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \rightarrow \frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = f(\bar{x} + \xi). \quad \text{з урахуванням} \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=\bar{x}} = 0 \quad \text{та} \quad \xi/\bar{x} \ll 1$$

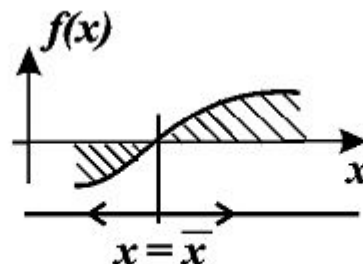
$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\xi^2 + \dots \quad \text{або}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots, \quad \text{де} \quad a_1 = f'(\bar{x}), \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(\bar{x}), \quad \dots$$

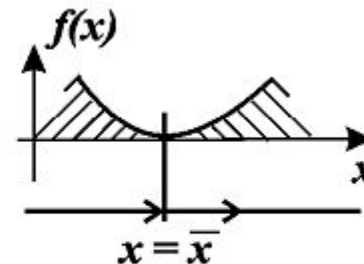
$$d\xi/dt = a_1\xi, \rightarrow \xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t), \quad \text{де} \quad \lambda = a_1 = f'(\bar{x}), \quad c - \text{довільна стала}$$



a

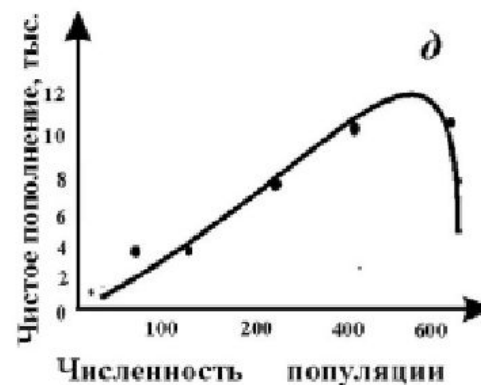
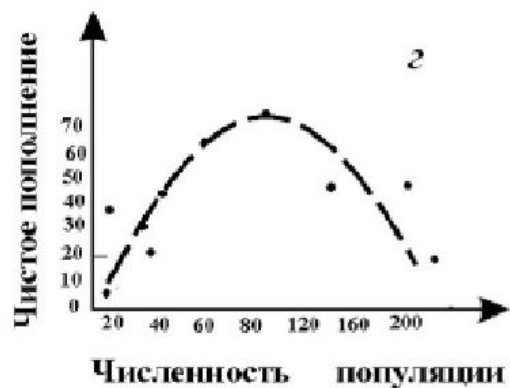
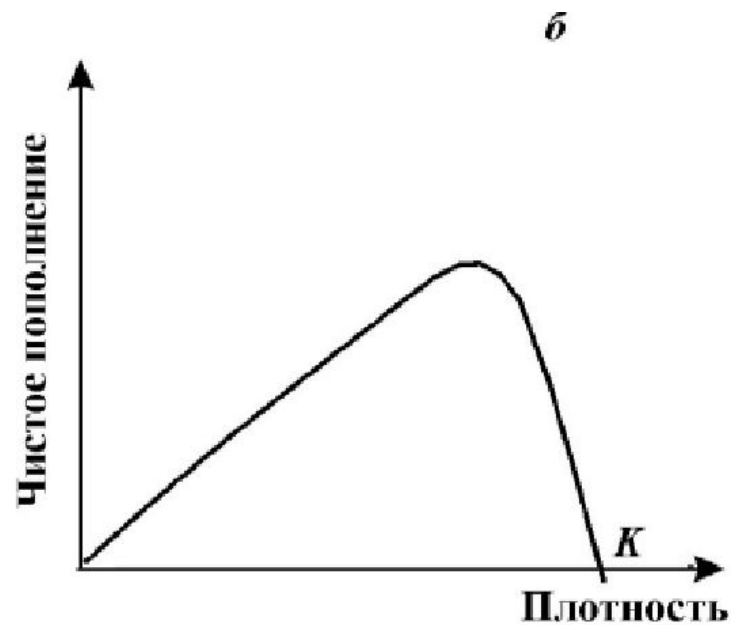
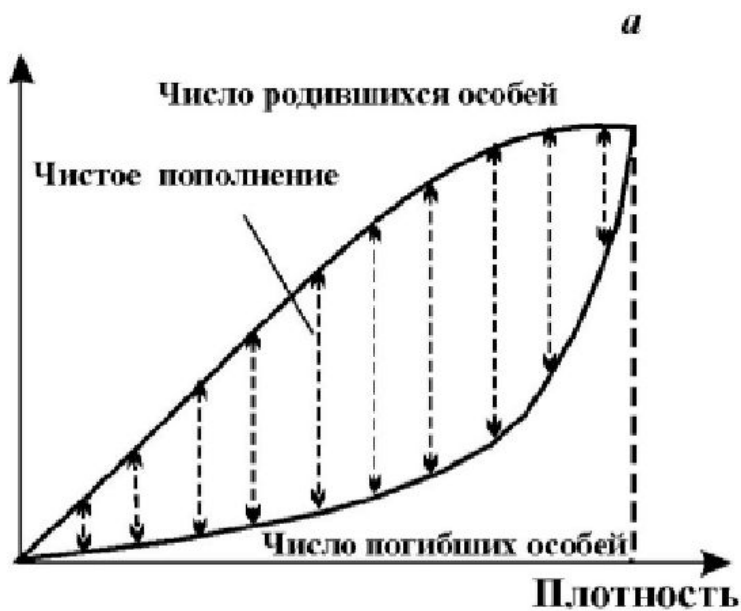


б



в

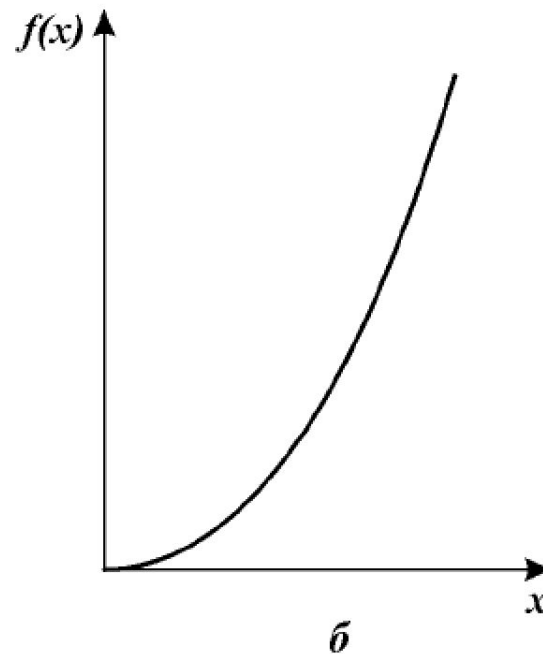
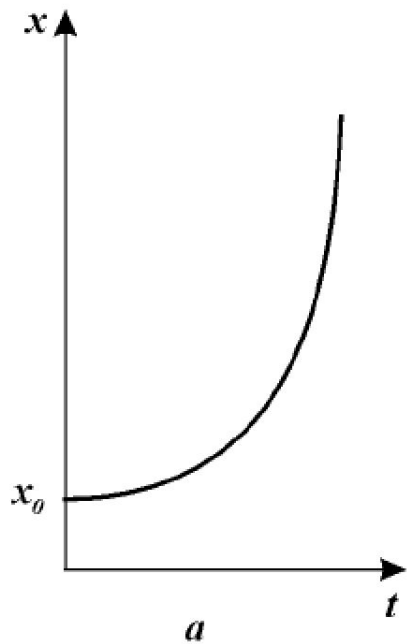
ПОПОВНЕННЯ



моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

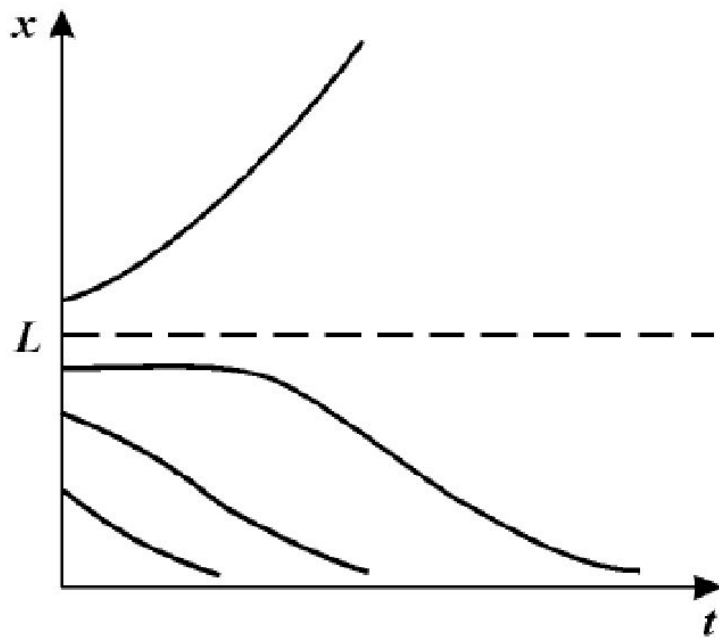
$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$



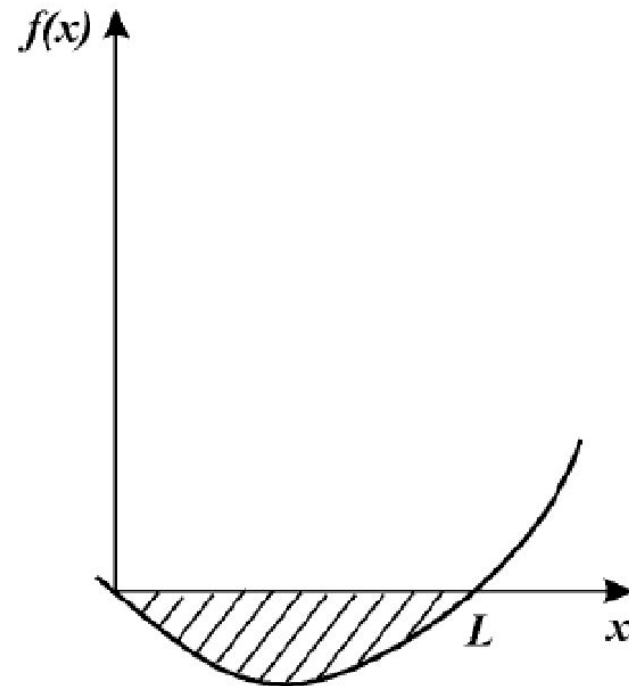
моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx$$

$$\bar{x} = 0 \quad \bar{x} = d\beta(\alpha\beta - d\tau) = L$$



a

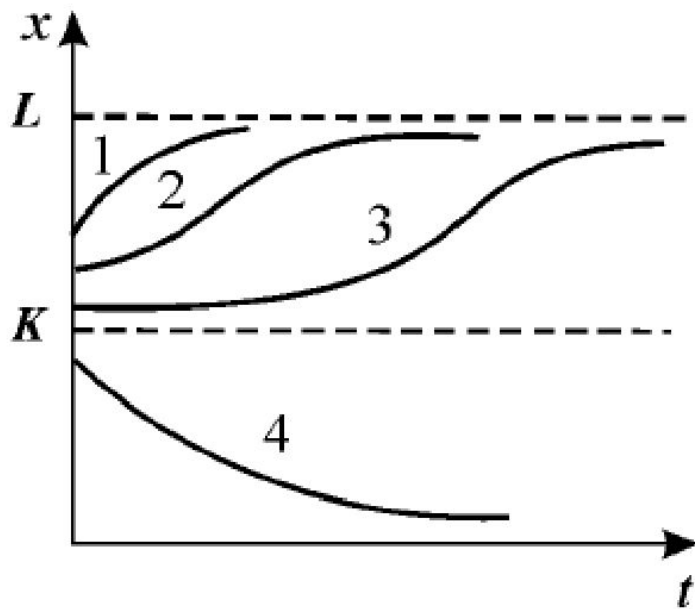


б

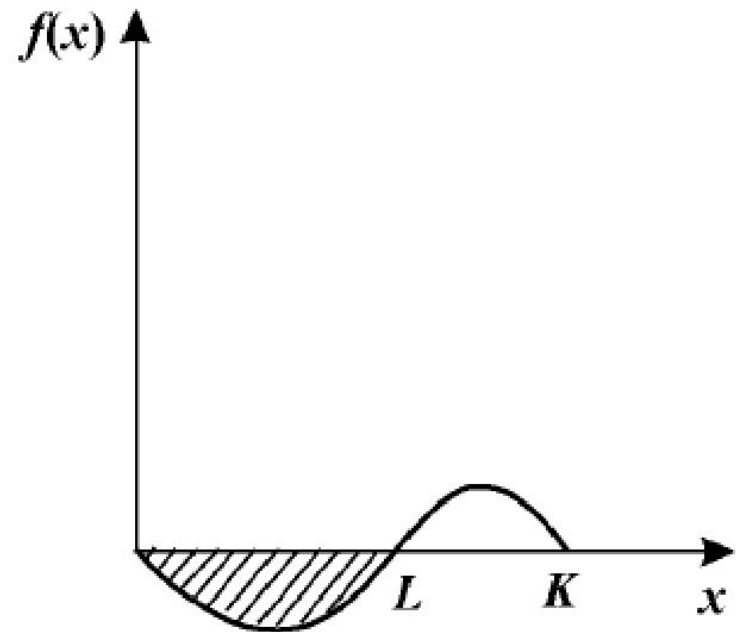
моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

$$\bar{x} = 0 \quad \bar{x} = K \quad \bar{x} = L$$



a

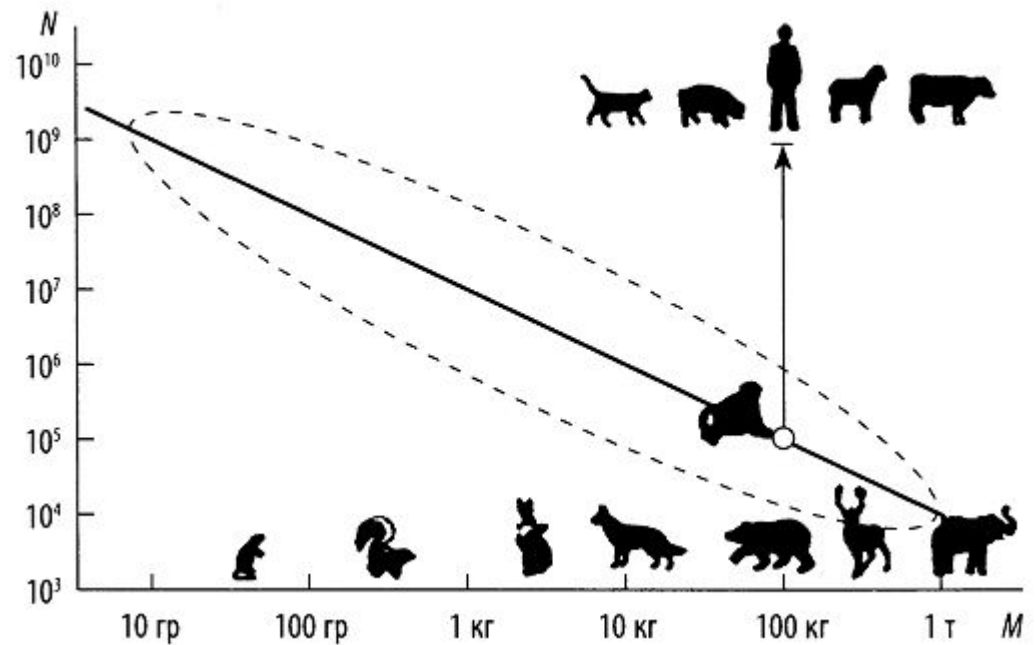


б

МОДЕЛЬ ЧИСЕЛЬНОСТІ НАРОДОНАСЕЛЕННЯ

МОДЕЛЬ ЧИСЕЛЬНОСТІ НАРОДОНАСЕЛЕННЯ

неоліт	→	10-15 млн
РХ	→	100-250 млн
1700	→	600 млн
за 1с народжується		21
за 1с вмирає		18
щодня		+250000
відн. швидкість	2,1 →	1,6
абс. швидкість	90 →	110 млн
за останні 40 років	→	вдвічі

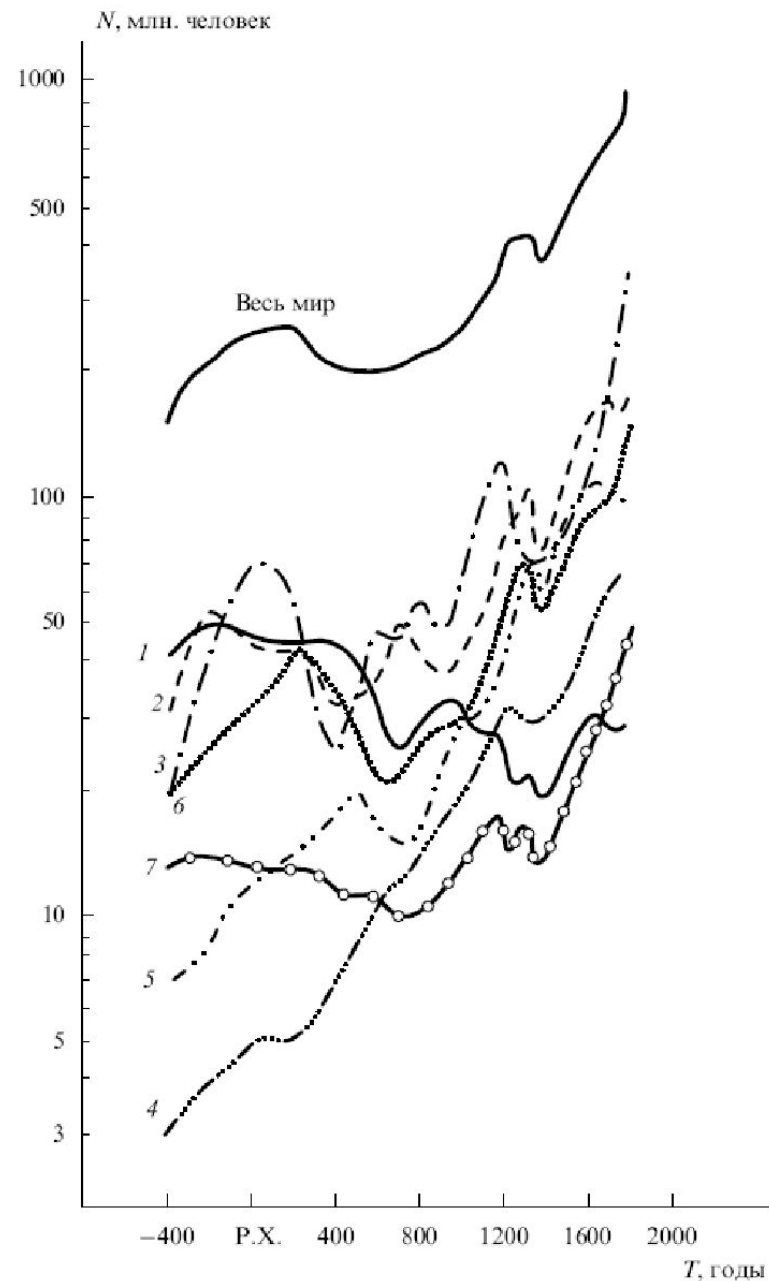


Человек разумный (*Homo sapiens sapiens*),

- царство** - животных,
- тип** - хордовых,
- класс** - млекопитающих,
- подкласс** - плацентарных,
- отряд** - приматов,
- семейство** - гоминид.

Другие приматы - понгиды (крупные человекообразные обезьяны: орангутаны, шимпанзе, гориллы)
 - хилобатидаы (малые человекообразные обезьяны: гиббоны).

Історична динаміка народонаселення



Рост численности населения мира и его крупных регионов от 400 г. до Р.Х. до 1800 г. [1]. 1 — Юго-Западная Азия, 2 — Индостанский субконтинент, 3 — Китай, 4 — остальная Азия, 5 — Африка (без Северной), 6 — Европа (без СССР), 7 — СССР

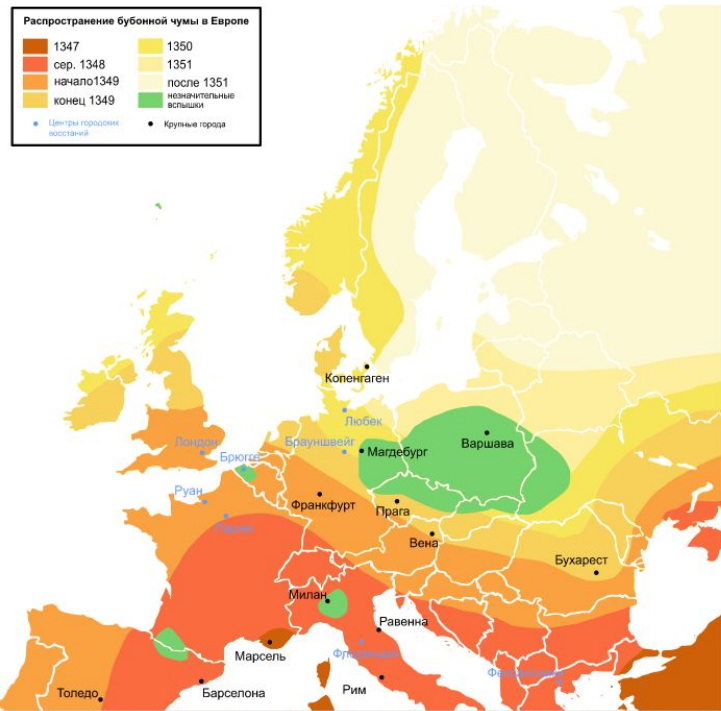
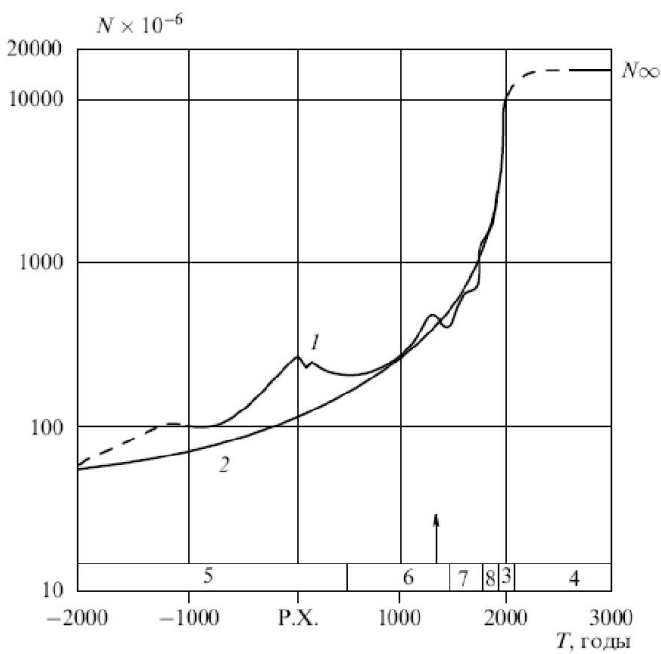
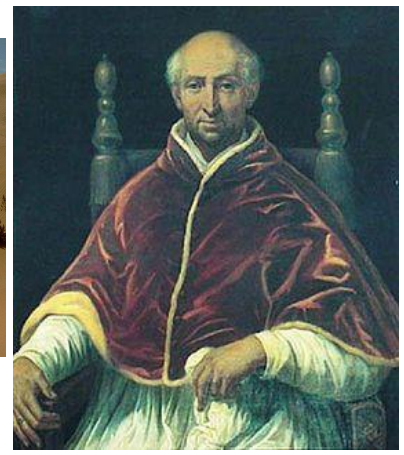


Рис. 1. 1 — население мира от 2000 г. до Р.Х. [1, 26], 2 — режим с обострением, 3 — демографический переход, 4 — стабилизация населения, 5 — древний мир, 6 — средние века, 7 — новая и 8 — новейшая история, ↑ — чума



пустеля Гоби
1320



Папа Климент VI (198),
січень 1348



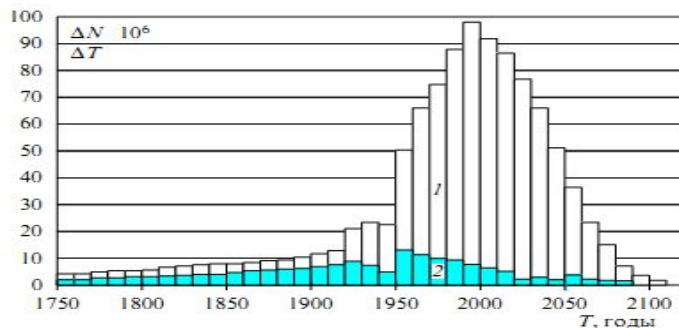
Пітер Брейгель Старший
“Тріумф смерті”, 1562 рік

Чумний стовп у Відні

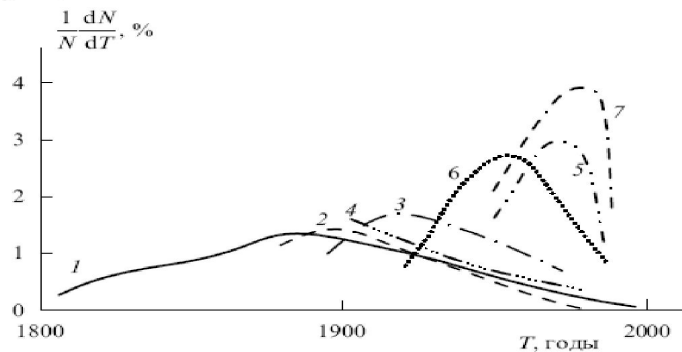
1346, Кафу,
Хан Джанібек

демографічний перехід

1965 г. ↔ 2049 г.
84 г



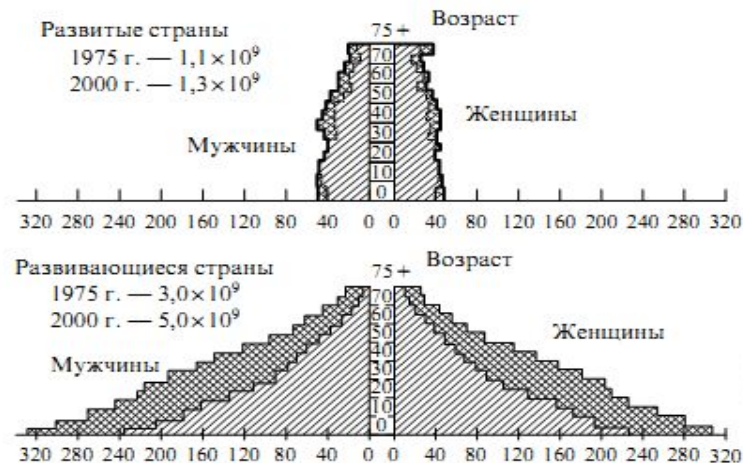
Демографический переход. Прирост населения мира с 1750 г. по 2100 г. осредненный за декады. 1 — развивающиеся, 2 — развитые страны



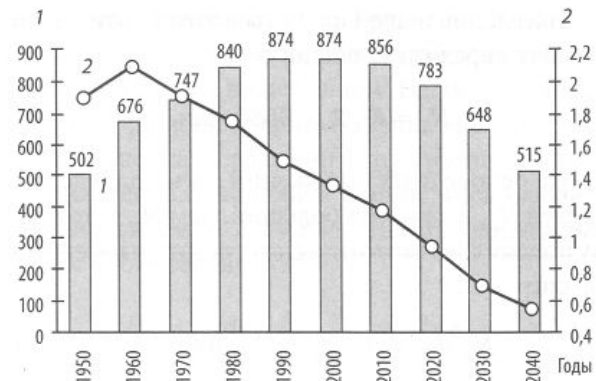
Прохождение населения стран через демографический переход. 1 — Швеция, 2 — Германия, 3 — СССР, 4 — США, 5 — Маврикий, 6 — Шри Ланка, 7 — Коста Рика

Таблица 1. Данные ООН (1992 г.)

Регион	Население (млрд.)			Проценты населения (середина 1990-х годов)			
	1990	2000	2025	Дети (0 ÷ 4)	Молодежь (15 ÷ 24)	Пожилые > 65	Городские жители
Население мира	5,3	6,3	8,5	12	19	6	45
Развитые страны	1,2	1,3	1,4	7	15	12	73
Развивающиеся	4,1	5	7,1	13	20	4	37
Европа	0,50	0,51	0,51	6	15	13	73



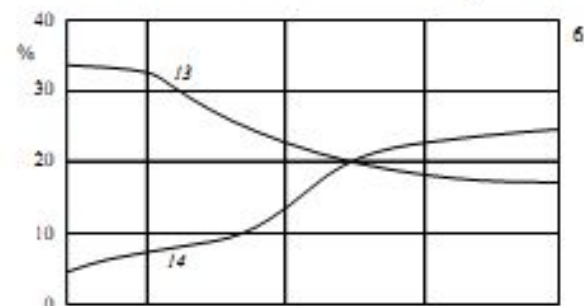
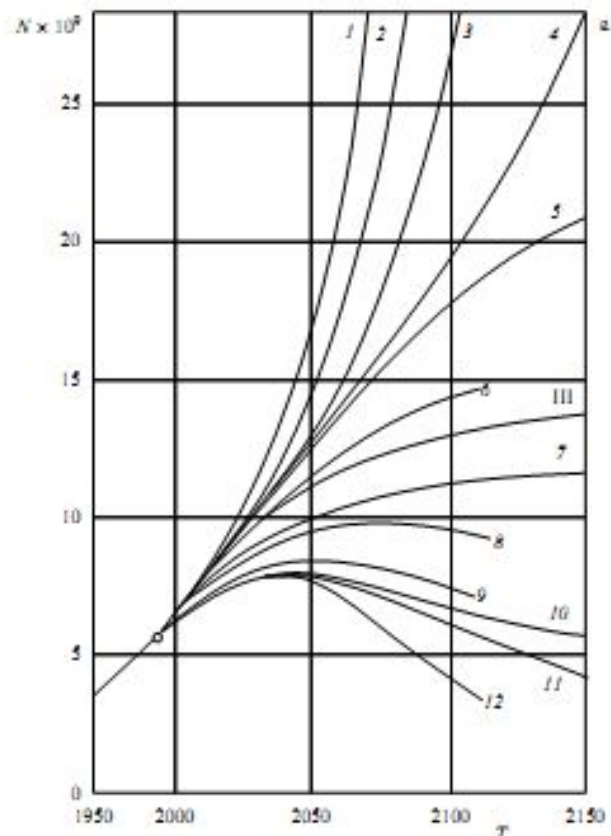
Распределение населения по возрастам и полу для 1975-го и 2000-го годов по расчетам Национального бюро переписей США.



1 — абсолютный прирост населения, усредненный за декаду, млн; 2 — относительный прирост, % в год (данные ООН)

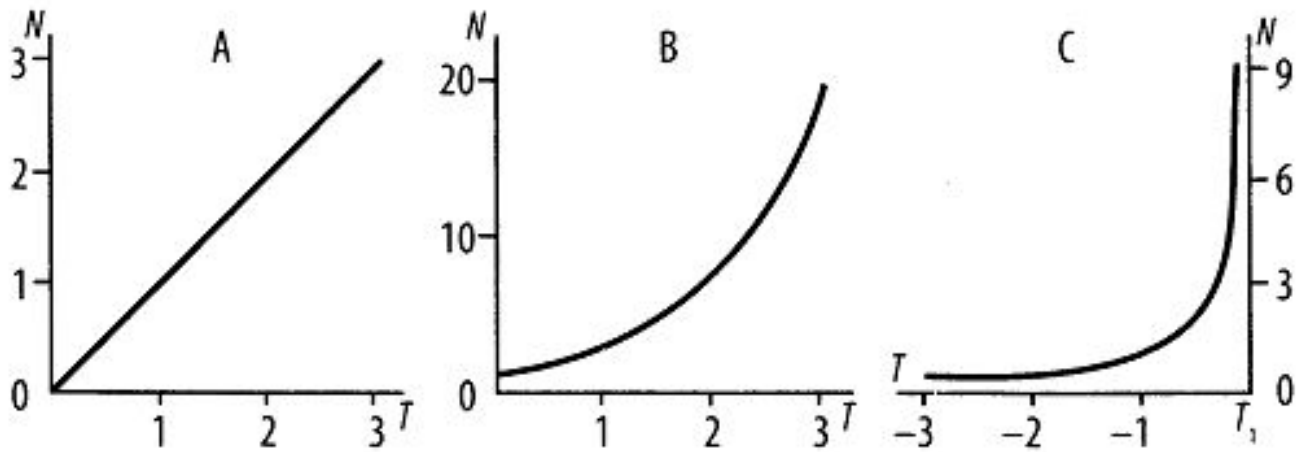
Таблица Рост населения мира

Год	$10^{-6}N$	$10^{-6}N_{III}$
$-4,4 \times 10^6$	(0)	0
$-1,6 \times 10^6$	0,1	0,1
-35000	1+5	5
-15000	3+10	11
-7000	10+15	21
-2000	47	46
0	100+230	93
1000	275	185
1500	450	366
1650	550	519
1750	728	717
1800	907	887
1850	1170	1158
1900	1617	1656
1920	1811	1992
1930	2020	2211
1940	2295	2480
1950	2515	2812
1955	2752	3009
1960	3019	3230
1965	3336	3478
1970	3698	3758
1975	4080	4073
1980	4450	4426
1985	4854	4820
1990	5292	5253
1995	5765	5724
2000	6251	6265
2005	6729	6746
2010	7561	7572
2025	8504	8749
2050	10019	10427
2075	10841	11462
2100	11185	12034
2125	11390	12398
2150	11543	12648
2200	11600	12946
2500	LNT	13536



(а) Проекция населения мира согласно прогнозам ООН [27] и НАСА [28]. 1 — постоянная фертильность, 2 — постоянная скорость роста, 3 — кризис III Мира, 4 — высокий вариант ООН, 5 — средневисокий вариант ООН, 6 — медленный спад фертильности, 7 — средний спад фертильности, 8 — медленное снижение смертности, 9 — постоянная смертность, 10 — средневисокий вариант ООН, 11 — низкий вариант ООН, 12 — быстрое снижение фертильности, III — модель III, o — настоящее время. (б) Изменения возрастного состава населения мира при демографическом переходе. 13 — моложе 15 лет, 14 — старше 65 лет по среднему варианту ООН [27]

Закони зростання



$$\frac{dN}{dT} = A, N = AT \quad \frac{dN}{dT} = \frac{N}{T_e}, N = N_0 \exp \frac{T}{T_e}, \quad \frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C}, N = \frac{C}{T_1 - T}$$

математична модель росту народонаселення Землі

$$N = \frac{179 \times 10^9}{(2027 - T)^{0,99}} \quad C = (179 \pm 0,14) \times 10^9, \quad T_1 = 2027 \pm 5$$

$$\alpha = -0,99 \pm 0,009$$

Foerster, von H *et al.*
Doomsday : Friday, 13th November, AD 2026.
Science **132** 1291 (1960)

$$N = \frac{C}{T_1 - T} = \frac{200 \times 10^9}{2025 - T}$$

Hoerner, von S J. of *British Interplanetary Society* **28** 691 (1975)

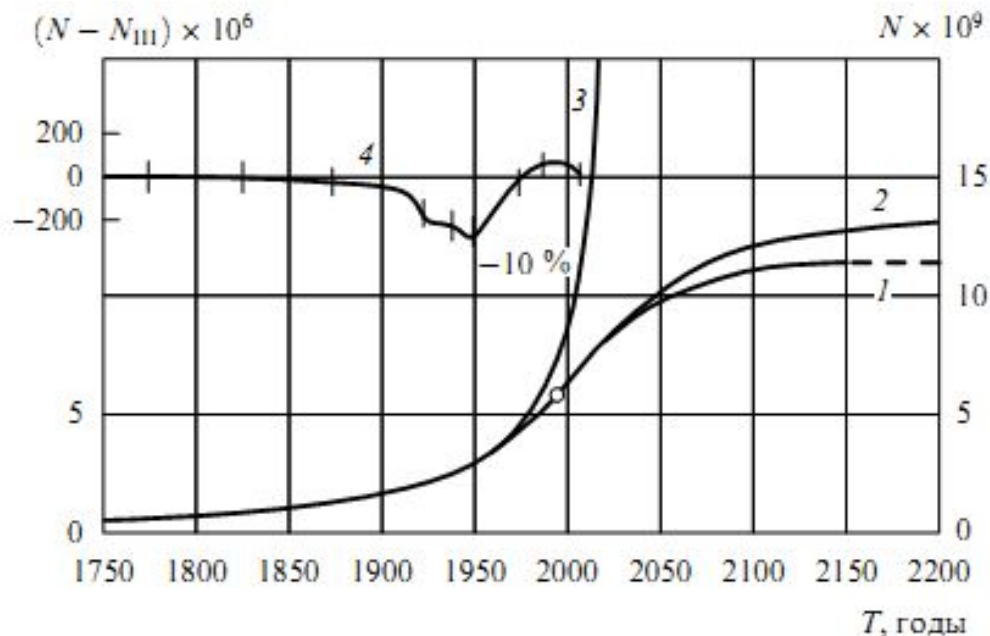
A: $\frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C} + \frac{1}{\tau}$

B: $\frac{dN}{dT} = \frac{C}{(T_1 - T)^2}$

C: $\frac{dN}{dT} = \frac{C}{(T_1 - T)^2 + \tau^2}$

$$C = (186 \pm 1) \times 10^9, \quad T_1 = 2007 \pm 1$$

$$\tau = 42 \pm 1, \quad K = \left(\frac{C}{\tau}\right)^{1/2} = 67000.$$



Рост населения мира с 1750 г. по 2200 г. 1 — прогноз ООН и IIASA, 2 — модель, 3 — уход на бесконечность (2), 4 — разница между населением мира и расчетом по модели III.
o — настоящее время

математична модель росту народонаселення Землі

$$T_0 = -4,4 \times 10^6$$

$$T_0 = T_1 - \frac{\pi}{2} K\tau = T_1 - \frac{\pi}{2} \sqrt{C\tau} \longrightarrow \Delta T_A = K\tau = 2,8 \text{ миллиона лет}$$

Homo habilis

$$N_{A,B} = 1,04 \times 10^5$$

$$1965 = (\pi/4)K^2 = 3,5 \text{ миллиарда}$$

$$N_\infty = \pi K^2 = 14 \times 10^9$$

$$P_{01} \simeq K^2 \ln K = 100 \times 10^9.$$

$$T_* = T_1 - \tau\sqrt{K} \simeq 9000 \text{ лет до н.э.} \longrightarrow 1/2$$

$$P_A = 5,5 \times 10^9$$

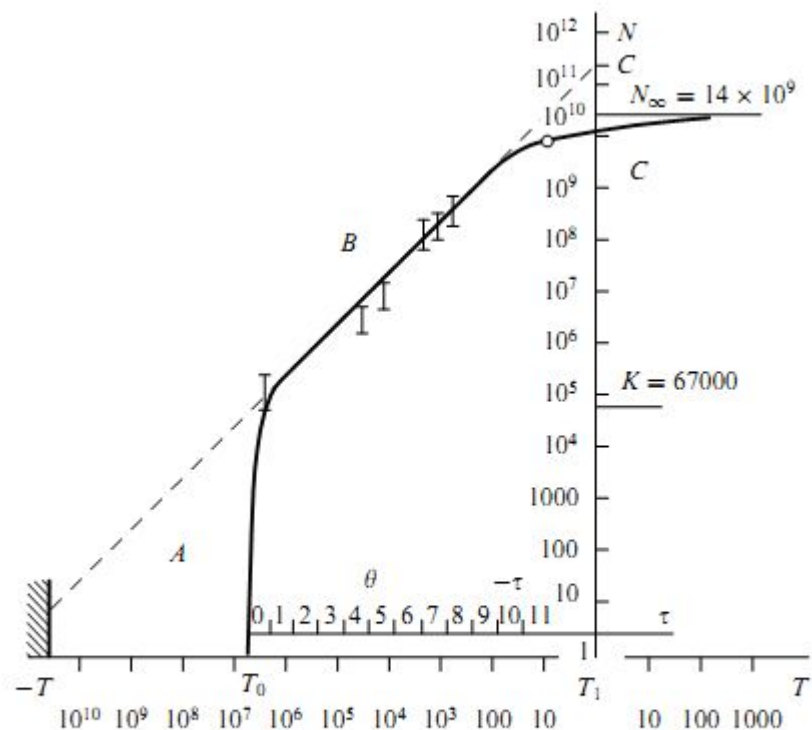


Рис. 5. Население мира от возникновения человечества до предвидимого будущего.

зміна масштабу історичного часу

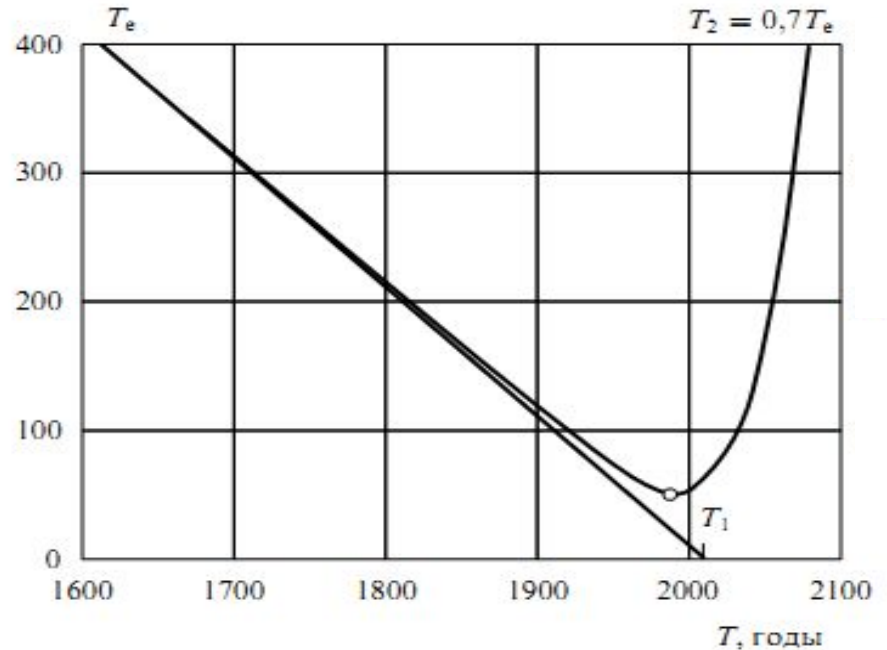
-1,6 млн	0,0001%	→	за 1 млн	150000
-100000	0,001%			
-2000	0,05%			
1900	1%			

$$T_e = \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dT} \right)^{-1} = \frac{1}{\tau} [(T_1 - T)^2 + \tau^2] \operatorname{arccotg} \frac{T_1 - T}{\tau}$$

$$T_e(T) \simeq T_1 - T$$

1 миллиона лет → 42 лет

$\Delta P = 2K^2 = 9$ миллиардов людей



Зависимость мгновенного времени экспоненциального роста T_e от T

зміна масштабу історичного часу

Таблиця 4. Розвиток людства в логарифмічному масштабі. Оледеніння: 1 — Відрі 10–54 тис. лет, 2 — Ріс 200–250 тис. лет, 3 — Міндель 400–500 тис. лет, 4 — Гюнц 600–800 тис. лет, 5 — Дунай 800–2000 тис. лет. Останні дані вказують на більш складну послідовність оледенінь [5]. Замітьте, що для далекого минулого оцінки численності існують тільки по порядку величини, тоді як датировка існують порівняльно краще.

Геологія		Демографія і антропологія							Історія і техніка		
Період	Період оледеніння	Епоха	Вік	θ	T (роки)	N	Період	ΔT (роки)			
ГОЛОЦЕН		С	И С Т О Р И Я		2175	13×10^9	Стабілізація	125	Перехід к 14×10^9 челока, змінення вікового складу, урбанізація — T_1 — нинішнє время компьютери мирові війни електроенергія промислова революція французька революція, великі географічні откриття, книгопечатание		
					2050	$10,5 \times 10^9$					
					2007	7×10^9	Мировий демографічний перехід	42			
				11	1965	$3,5 \times 10^9$					
					10		Новейша	125			
					1840						
					9		Нова	340			
			1500	10^9							
			8		Середні века	1000					
			500 н.з.								
			7		Древній мир	2500					
			2000 до н.з.	10^9							
		ПЛЕЙСТОЦЕН	1 2 3 4 5	В	К А М Е Н Н Ы Й В Е К	6			Неоліт	7000	Египет, Китай, Індія Одомашнювання животних Кераміка, бронза мінераліти
						5		10^9	Мезоліт	20000	Заселення Америки
4							Мустьє	51000	<i>Ното Боріат</i> реча, оладание огнем		
3						10^9	Ашель	140000	Заселення Європи, Азії		
2							Шель	380000			
1						10^9	Олдувай	1000000	Рубіла <i>Ното Навіа</i>		
						А	0		(1)		2800000

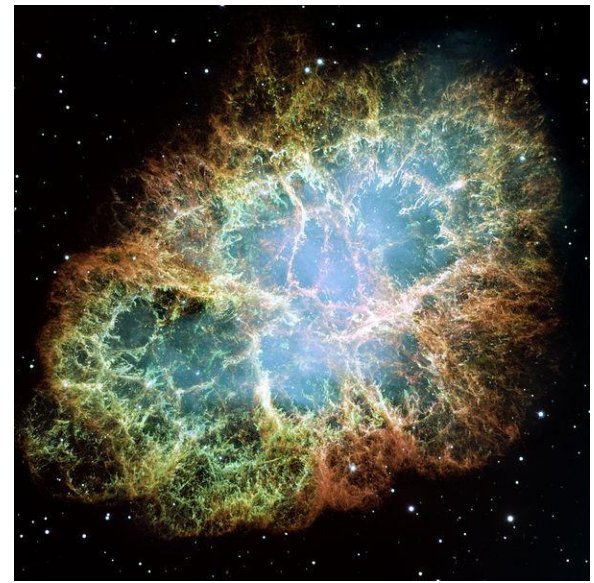
Історична хронологія і астрономія

D відстань до рештка
 φ кутовий розмір рештка
 V_{exp} швидкість розширення рештка

P період пульсара
 P' швидкість зміни періоду пульсара
 $\rho_0(\mathbf{r})$ просторовий розподіл густини міжзіркової речовини

$t_a = \frac{2}{5} \frac{R}{V_{\text{exp}}}$ модель сильного вибуху
Л.І Седова

$R \rightarrow R = 0,5D\varphi$ радіус рештка



крабовидна туманність як залишок
наднової SN1054

Седов
Леонид Иванович
1907-1999



параметри історичних наднових

Обозначение исторической сверхновой	Обозначение остатка СН по КATALOGУ галактических сверхновых	D , кпк	φ , угл. мин	R , пк	V_{exp} , км/с	t_a , лет (t_{CH} , лет)
→ СН 837	G189.1 + 3.0; 3C157; IC443	1,5	40	9	3000	1170 (1156)
→ СН 1006	G327.6 + 14.6; PKS1459-41	1,2	30	5	2300	850 (980)
СН 1054	G184.6 - 5.8; 3C144; Crab	2,0	6	1,75	1500	456 (932)
СН 1181	G130.7 + 3.1; 3C58	2,6	8	3	1000	1170 (805)
СН 1408	G69.0 + 2.7; CTB80	3,0	8	3,5	2000	684 (585)
→ СН 1572	G120.1 + 1.4; 3C10; Tycho	3,0	3,6	3,3	3600	359 (414)
→ СН 1604	G4.5 + 6.8; 3C358; Kepler	3,2	1,3	1,3	≤ 300	1695 (382)
СН 1604*	—	—	—	—	3040	418 (395)

$$t_p = \frac{P^2 - P_0^2}{2PP'}$$

$$P \gg P_0 \longrightarrow t_p \approx P/2P'$$

P P' сучасні значення періоду і швидкості зміни періоду радіопульсара
 P_0 початкове значення періоду

СН 1054 NP 0531

$$P = 0,033$$

$$P' = 4,17 \times 10^{-13} \text{ с/с.}$$

$$P_0 = 0$$

$$t_p = 1250 \text{ лет}$$

$$P_0 = 0,017 \text{ с}$$