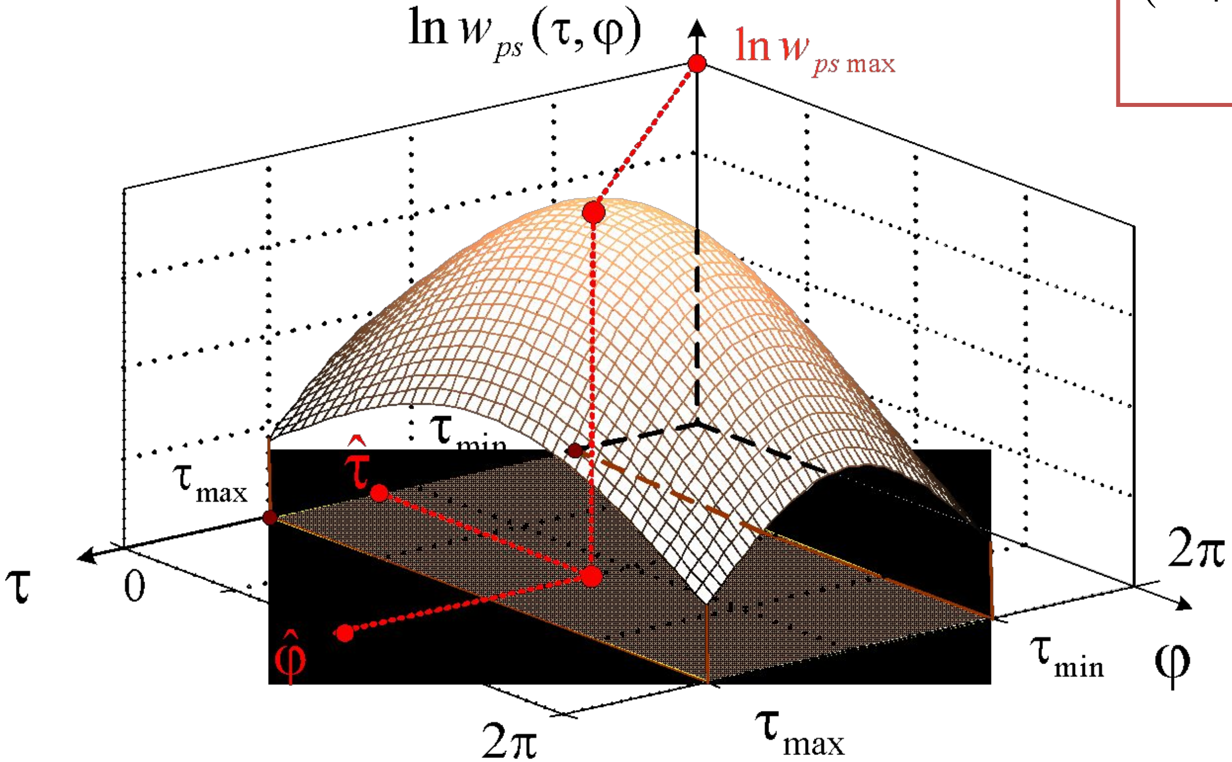
Оценка задержки радиосигнала с неизвестной начальной фазой (1)

Сигнал с неизвестной начальной фазой

$$s_{\tau,\varphi}(t) = \underbrace{U(t-\tau)}_{\text{закон АМ}}\cos\left(\omega_0(t-\tau) + \underbrace{\psi(t-\tau)}_{\text{закон ФМ}} + \varphi\right)$$

Совместная оценка задержки и фазы

$$\boxed{\left(\hat{\tau},\hat{\varphi}\right) = \underset{\substack{\tau\in\left[\tau_{\min},\tau_{\max}\right] \\ \varphi\in\left[\varphi_{\min},\varphi_{\max}\right]}}{\operatorname{argmax}} \ln w_{ps}\left(\tau,\varphi\right)}$$



Оценка задержки радиосигнала с неизвестной начальной фазой (2)

Усреднение по случайной начальной фазе

Апостериорная плотность вероятности задержки $w_{ps}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{ps}(\tau\,|\,\varphi) w_{pr}(\varphi) d\varphi$

Априорная плотность вероятности фазы $w_{pr}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

Условная апостериорная плотность вероятности:

$$w_{ps}(\tau\,|\,\varphi) = c \cdot e^{q(\tau,\varphi)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{E_c(\tau,\varphi)}{G_0}}}_{const} \cdot w_{pr}(\tau) = c' \cdot e^{q(\tau,\varphi)} \cdot w_{pr}(\tau)$$

Апостериорная плотность вероятности задержки:

$$\boxed{w_{ps}(\tau) = \int\limits_{0}^{2\pi} w_{ps}(\tau\,|\,\varphi)\, w_{pr}(\varphi)\, d\varphi = c' \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{q(\tau,\varphi)} d\varphi \cdot w_{pr}(\tau)}$$

Оценка задержки радиосигнала с неизвестной начальной фазой (3)

Корреляционный интеграл

$$q(\tau,\varphi)=\frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s_{\tau,\varphi}(t)\,dt=\frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)U(t-\tau)\cos\Bigl(\underbrace{\omega_0(t-\tau)+\psi(t-\tau)+\varphi}_{\omega_0 t+\psi(t-\tau)+\varphi-\omega_0\tau}\Bigr)dt=$$

$$\cos\bigl(\omega_0 t+\psi(t-\tau)+\varphi-\omega_0\tau\bigr)=\cos\bigl([\omega_0 t+\psi(t-\tau)]+(\varphi-\omega_0\tau)\bigr)=$$

$$=\cos\bigl(\omega_0 t+\psi(t-\tau)\bigr)\cdot\cos\bigl(\varphi-\omega_0\tau\bigr)-\sin\bigl(\omega_0 t+\psi(t-\tau)\bigr)\cdot\sin\bigl(\varphi-\omega_0\tau\bigr)$$

$$=\underbrace{\frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)U(t-\tau)\cos\bigl(\omega_0 t+\psi(t-\tau)\bigr)dt}_{Z^{\mathrm{c}}(\tau)}\cdot\cos\bigl(\varphi-\omega_0\tau\bigr)-$$

$$-\underbrace{\frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)U(t-\tau)\sin\bigl(\omega_0 t+\psi(t-\tau)\bigr)dt}_{Z^{\mathrm{s}}(\tau)}\cdot\sin\bigl(\varphi-\omega_0\tau\bigr)$$

Оценка задержки радиосигнала с неизвестной начальной фазой (4)

Корреляционный интеграл

$$q(\tau,\varphi)=\frac{2}{G_0}\left[Z^{c}(\tau)\cos\left(\varphi-\omega_0\tau\right)-Z^{s}(\tau)\sin\left(\varphi-\omega_0\tau\right)\right]=\frac{2}{G_0}Z(\tau)\cos\left(\theta(\tau)+\varphi-\omega_0\tau\right)$$

$$Z(\tau)=\sqrt{Z^{c}(\tau)^2+Z^{s}(\tau)^2},\quad Z^{c}(\tau)=Z(\tau)\cos\theta(\tau),\quad Z^{s}(\tau)=Z(\tau)\sin\theta(\tau)$$

Апостериорная плотность вероятности

$$w_{ps}(\tau)=c'\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{q(\tau,\varphi)}d\varphi\cdot w_{pr}(\tau)=c'\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\frac{2}{G_0}Z(\tau)\cos(\theta(\tau)+\varphi-\omega_0\tau)}d\varphi}_{I_0\left(\frac{2}{G_0}Z(\tau)\right)}\cdot w_{pr}(\tau)$$

$$\boxed{w_{ps}(\tau)=c'I_0\left(\frac{2}{G_0}Z(\tau)\right)\cdot w_{pr}(\tau)}$$

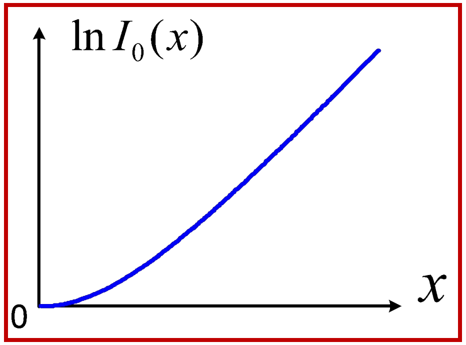
Оценка задержки радиосигнала с неизвестной начальной фазой (5)

Логарифм апостериорной плотности вероятности задержки

$$\ln w_{ps}(\tau) = \ln c' + \ln I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(\tau)\right) + \ln w_{pr}(\tau)$$

При равномерном априорном распределении задержки

$$\ln w_{ps}(\tau) = const + \ln I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(\tau)\right)$$



$\ln I_0(x)$ - *монотонно возрастающая функция*

Оценка задержки:

$$\hat{\tau} = \underset{\tau\in[\tau_{\min},\tau_{\max}]}{\operatorname{argmax}} \ln w_{ps}(\tau) = \underset{\tau\in[\tau_{\min},\tau_{\max}]}{\operatorname{argmax}} Z(\tau) =$$

$$= \underset{\tau\in[\tau_{\min},\tau_{\max}]}{\operatorname{argmax}} Z(\tau)^2 = \underset{\tau\in[\tau_{\min},\tau_{\max}]}{\operatorname{argmax}} \left(Z^{c}(\tau)^2 + Z^{s}(\tau)^2\right)$$

Оценка задержки радиосигнала с неизвестной начальной фазой (6)

Сигнал с задержкой τ_0: $s_{\tau_0,\varphi}(t) = U(t-\tau_0)\cos\left(\omega_0(t-\tau_0)+\psi(t-\tau_0)+\varphi\right)$

Алгоритм оценки задержки

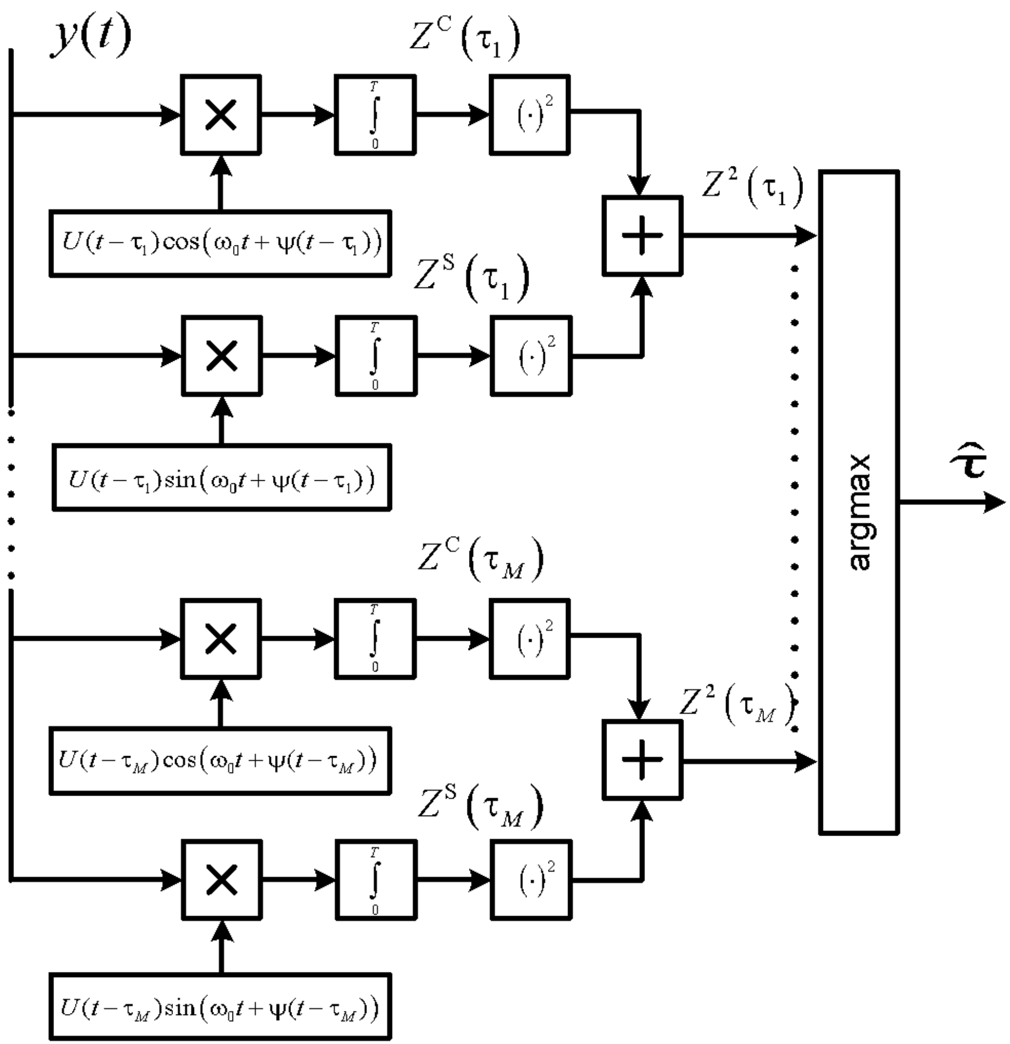
$$Z^{c}(\tau) = \int_0^T y(t)U(t-\tau)\cos\left(\omega_0 t + \psi(t-\tau)\right)dt$$

$$Z^{s}(\tau) = \int_0^T y(t)U(t-\tau)\sin\left(\omega_0 t + \psi(t-\tau)\right)dt$$

$$Z(\tau) = \sqrt{Z^{c}(\tau)^2 + Z^{s}(\tau)^2}$$

$$\hat{\tau} = \underset{\tau\in[\tau_{\min},\tau_{\max}]}{\operatorname{argmax}} Z(\tau) = \underset{\tau\in[\tau_{\min},\tau_{\max}]}{\operatorname{argmax}} \left(Z^{c}(\tau)^2 + Z^{s}(\tau)^2\right)$$

Оптимальный корреляционный приёмник радиосигнала с неизвестной начальной фазой



$$\hat{m} = \underset{m=\overline{1,M}}{\operatorname{argmax}}\, Z^2(\tau_m)$$

$$\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$$

Максимальное отношение сигнал-шум на выходе коррелятора при измерении задержки

Принимаемое колебание $y(t) = s(t-\tau_0) + n(t)$

Корреляционный интеграл $q(\tau) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s(t-\tau)dt = q_{\text{с}}(\tau) + q_{\text{ш}}(\tau)$

$q_{\text{с}}(\tau) = \frac{2}{G_0}\int_0^T s(t-\tau_0)s(t-\tau)dt$ *- сигнальная функция*

$q_{\text{ш}}(\tau) = \frac{2}{G_0}\int_0^T n(t)s(t-\tau)dt$ *- шумовая функция*

Максимальное отношение сигнал-шум по напряжению:

$$\boxed{\rho_{\max} = \frac{q_{\text{с}\max}}{\sigma_{q_{\text{ш}}}}}$$

Вычисление $q_{\text{c max}}$

Сигнальная функция как скалярное произведение векторов:

$$q_\text{c}(\tau)=\frac{2}{G_0}\int_0^T s(t-\tau_0)s(t-\tau)dt=\frac{2}{G_0}\left(\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0},\vec{\mathbf{s}}_\tau\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\left\|\vec{\mathbf{s}}_\tau\right\|&=\sqrt{\left(\vec{\mathbf{s}}_\tau,\vec{\mathbf{s}}_\tau\right)}=\sqrt{\int_0^T s^2(t-\tau)dt}=\sqrt{E_\text{c}}\\ \left\|\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}\right\|&=\sqrt{\left(\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0},\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}\right)}=\sqrt{\int_0^T s^2(t-\tau_0)dt}=\sqrt{E}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \left\|\vec{\mathbf{s}}_\tau\right\|=\left\|\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}\right\|\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \left(\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0},\vec{\mathbf{s}}_\tau\right)=\max$ при $\vec{\mathbf{s}}_\tau=\vec{\mathbf{s}}_{\tau_0}$, т.е. при $s(t-\tau)=s(t-\tau_0)$

$$q_{\text{c max}}=q_\text{c}(\tau_0)=\frac{2}{G_0}\int_0^T s(t-\tau_0)^2dt=\frac{2E_\text{c}}{G_0}$$

Вычисление $\sigma_{q_{\text{ш}}}$

Дисперсия шумовой функции:

$$\text{так как } \overline{q_{\text{ш}}(\tau)} = 0, \text{ то } \sigma^2_{q_{\text{ш}}} = \overline{q^2_{\text{ш}}(\tau)} = \overline{\frac{2}{G_0}\int_0^T n(t_1)s(t_1-\tau)dt_1 \cdot \frac{2}{G_0}\int_0^T n(t_2)s(t_2-\tau)dt_2} =$$

$$= \left(\frac{2}{G_0}\right)^2 \int_0^T\int_0^T \overline{n(t_1)n(t_2)}\, s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)dt_1dt_2$$

$$\text{АКФ шума } \overline{n(t_1)n(t_2)} = K_n\underbrace{(t_2-t_1)}_{\boxed{x}} = K_n(x) = \frac{G_0}{2}\delta(x)$$

$$\sigma^2_{q_{\text{ш}}} = \left(\frac{2}{G_0}\right)^2 \int_0^T\int_0^T \frac{G_0}{2}\delta(t_2-t_1)s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)dt_1dt_2 = \frac{2}{G_0}\int_0^T s(t_1-\tau)\underbrace{\left[\int_0^T \delta(t_2-t_1)s(t_2-\tau)dt_2\right]}_{s(t_1-\tau)}dt_1 =$$

$$= \frac{2}{G_0}\int_0^T s(t_1-\tau)^2 dt_1 = \frac{2E_{\text{c}}}{G_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{q_{\text{ш}}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}$$

$$\boxed{\rho_{\max} = \frac{q_{\text{c}\max}}{\sigma_{q_{\text{ш}}}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}}$$

3.2. Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал)

Принятая смесь сигнала и шума

$$y(t) = \lambda s(t) + n(t) = s_\lambda(t) + n(t)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если сигнал есть} \\ 0, & \text{если сигнала нет} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \text{обнаружение} \\ \text{сигнала} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{оценка} \\ \text{параметра } \lambda \end{bmatrix}}$$

Апостериорная вероятность параметра λ

$$p_{ps}(\lambda) = c\, e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} \cdot p_{pr}(\lambda)$$

$$q(\lambda) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\, s_\lambda(t)\, dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\, \lambda s(t)\, dt - \text{корреляционный интеграл}$$

$$E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t)\, dt = \int_0^T \lambda^2 s^2(t)\, dt - \text{энергия сигнала}$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал - 1)

$\lambda = 1$

$$s_\lambda(t) = \lambda s(t) = s(t)$$

$$q(1) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s(t)dt \overset{def}{=} q$$

$$E_c(1) = \int_0^T s^2(t)dt \overset{def}{=} E_c$$

$$p_{ps}(1) = p_{pr}(1)\, e^{q - \frac{E_c}{G_0}}$$

$\lambda = 0$

$$s_\lambda(t) = \lambda s(t) = 0$$

$$q(0) = 0$$

$$E_c(0) = 0$$

$$p_{ps}(0) = p_{pr}(0)$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал - 2)

Оценка параметра

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ (сигнал есть), если } & p_{ps}(1) > p_{ps}(0) \\ 0 \text{ (сигнала нет), если } & p_{ps}(1) < p_{ps}(0) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Случай, когда } p_{ps}(1) > p_{ps}(0)}$$

$$ce^{q}e^{-\frac{E_{\text{c}}}{G_0}}\, p_{pr}(1) > c\, p_{pr}(0) \quad \Rightarrow \quad e^{q} > \frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} e^{\frac{E_{\text{c}}}{G_0}} \quad \Rightarrow \quad q > \ln\frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} + \frac{E_{\text{c}}}{G_0}$$

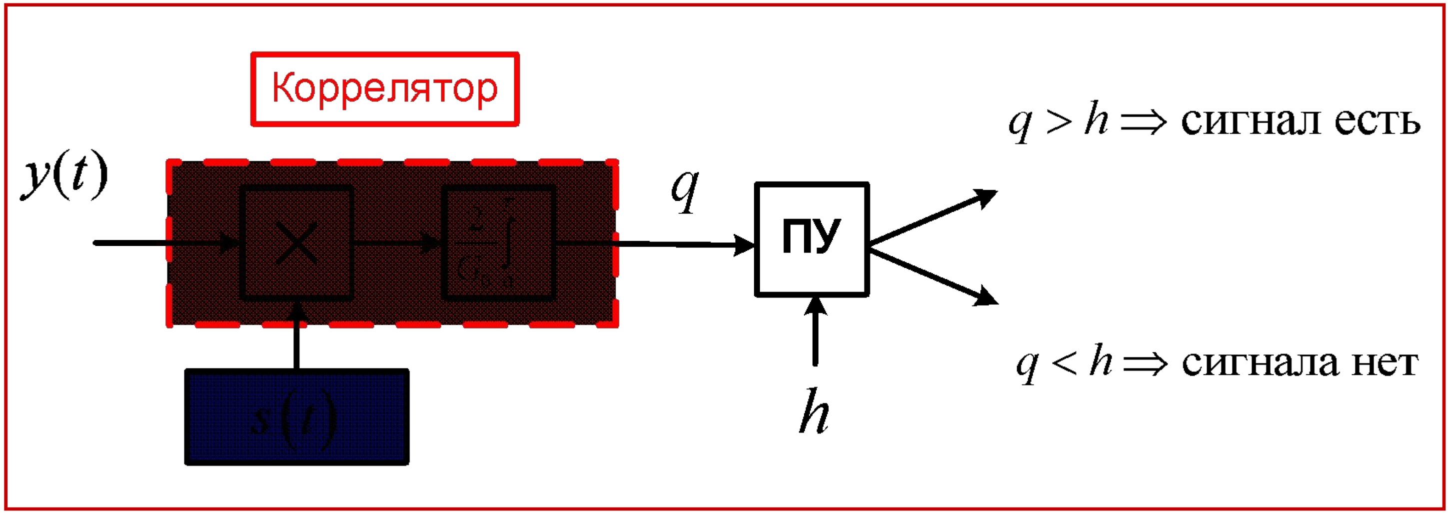
$$p_{pr}(1) \overset{def}{=} p_{pr} \quad \Rightarrow \quad p_{pr}(0) = 1 - p_{pr}$$

Алгоритм оптимального обнаружения

$$\boxed{q = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s(t)dt > \underbrace{\ln\frac{1-p_{pr}}{p_{pr}} + \frac{E_{\text{c}}}{G_0}}_{\text{порог } h}}$$

Оптимальный корреляционный обнаружитель

(полностью известный сигнал)



Оптимальный порог

$$h = \frac{E_c}{G_0} + \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал - 1)

Возможные ситуации при обнаружении

$\hat{\lambda}$ \ λ	1	0
1	правильное обнаружение $p_{\text{обн}}$	ложное срабатывание [ложная тревога (ЛТ)] $p_{\text{ЛТ}}$
0	пропуск сигнала $p_{\text{проп}}$	правильное необнаружение $p_{\text{необн}}$

$$p_{\text{проп}} + p_{\text{обн}} = 1$$

$$p_{\text{необн}} + p_{\text{ЛТ}} = 1$$

Независимые вероятности:

$$p_{\text{обн}} = \mathbb{P}\{q > h | \lambda = 1\} = D \ (\mathbf{D}\text{etection} - \text{обнаружение})$$

$$p_{\text{ЛТ}} = \mathbb{P}\{q > h | \lambda = 0\} = F \ (\mathbf{F}\text{alse Alarm} - \text{ложная тревога})$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал - 2)

Статистические характеристики корреляционного интеграла

Корреляционный интеграл $q(\lambda) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s(t)dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T \left[\lambda s(t) + n(t)\right]s(t)dt =$

$$= \lambda \frac{2}{G_0}\int_0^T s^2(t)dt + \frac{2}{G_0}\int_0^T n(t)s(t)dt = \lambda \frac{2E_\text{с}}{G_0} + q_\text{ш}$$

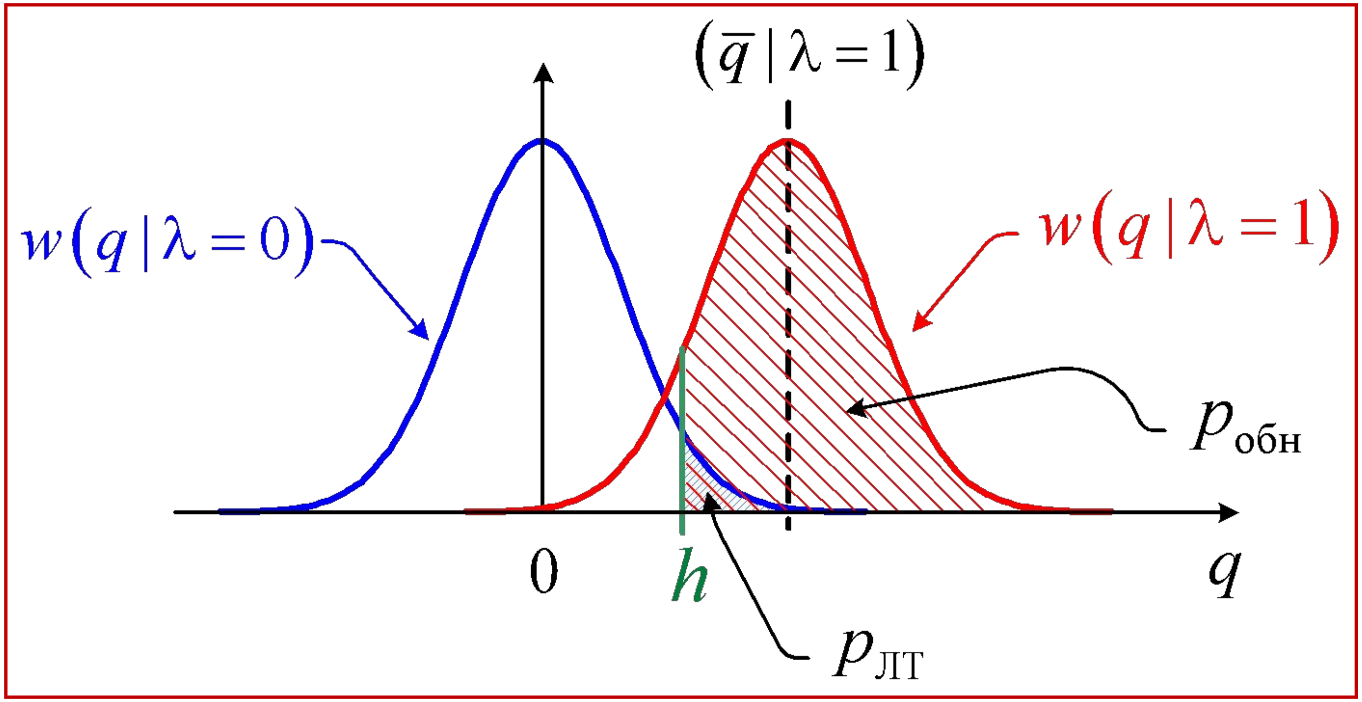
$$\left.\begin{aligned} &\overline{q_\text{ш}} = 0 \\ &\mathbf{D}\{q_\text{ш}\} = \frac{2E_\text{с}}{G_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{мат. ожидание} \quad \overline{q(\lambda)} = (\overline{q} \mid \lambda) = \lambda \dfrac{2E_\text{с}}{G_0} \\ \text{дисперсия} \qquad \mathbf{D}\{q(\lambda)\} = \sigma_q^2 = \dfrac{2E_\text{с}}{G_0} \end{cases}$$

Условная плотность вероятности корреляционного интеграла (нормальное распределение):

$$\boxed{w(q \mid \lambda) = \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(q - (\overline{q}|\lambda)\right)^2}{2\sigma_q^2}}}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал - 3)



Вероятность ложной тревоги

$$p_{\text{ЛТ}} = \mathbb{P}\{q > h | \lambda = 0\} = \int_h^{\infty} w(q\,|\,\lambda=0)\,dq$$

Вероятность обнаружения

$$p_{\text{обн}} = \mathbb{P}\{q > h | \lambda = 1\} = \int_h^{\infty} w(q\,|\,\lambda=1)\,dq$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал - 4)

Вероятность ложной тревоги

$$p_{\text{ЛТ}} = \int_h^{\infty} w(q \mid \lambda = 0)\, dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{h} w(q \mid \lambda = 0)\, dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma_q^2}} dq =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right) = 1 - \Phi\left(h \Big/ \sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}\right)$$

$$\boxed{p_{\text{ЛТ}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right)}$$

Вероятность обнаружения

$$p_{\text{обн}} = \int_h^{\infty} w(q \mid \lambda = 1)\, dq = 1 - \int_{-\infty}^{h} w(q \mid \lambda = 1)\, dq =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q - (\overline{q} \mid \lambda = 1))^2}{2\sigma_q^2}} dq = 1 - \Phi\left(\frac{h - (\overline{q} \mid \lambda = 1)}{\sigma_q}\right) =$$

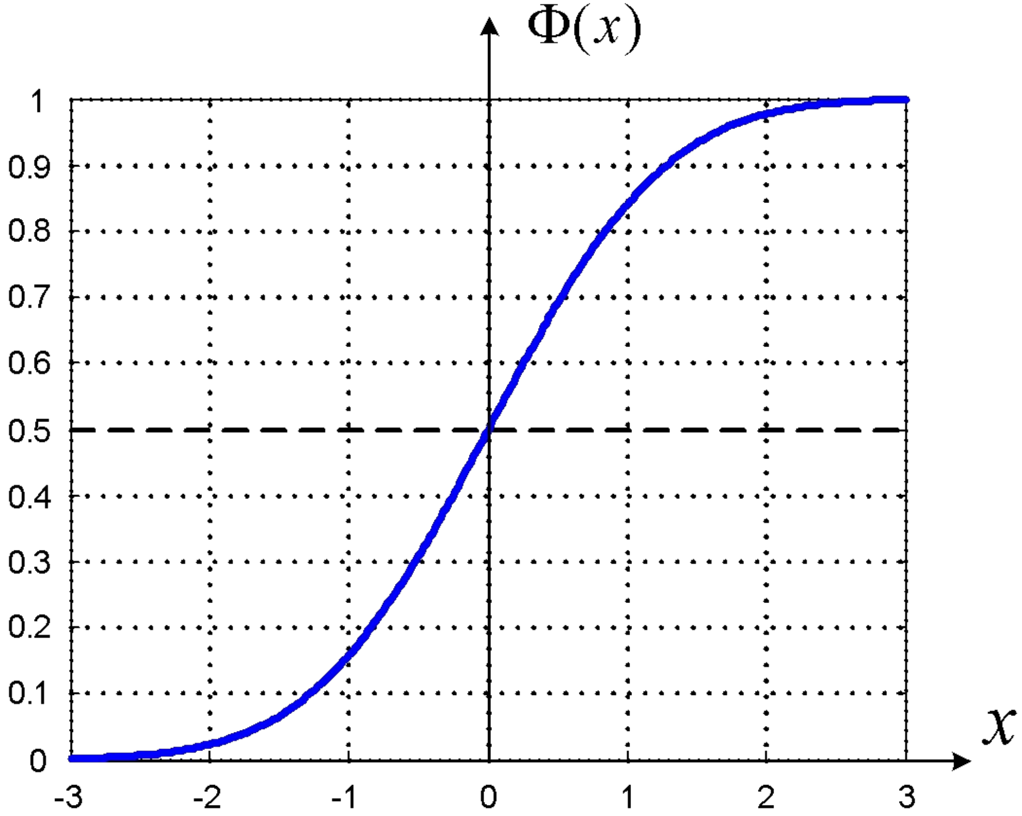
$$= 1 - \Phi\left(\frac{h - \dfrac{2E_{\text{c}}}{G_0}}{\sqrt{\dfrac{2E_{\text{c}}}{G_0}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{\dfrac{2E_{\text{c}}}{G_0}}} - \sqrt{\frac{2E}{G_0}}\right)$$

$$\boxed{p_{\text{обн}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q} - \sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}\right)}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал - 5)

Интеграл вероятности $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$



$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал - 6)

Обнаружение по критерию максимума апостериорной вероятности

Полная вероятность ошибки $p_{\text{ош}} = p_{\text{проп}} \cdot p_{pr} + p_{\text{ЛТ}} \cdot \left(1 - p_{pr}\right) = \min$

при оптимальном пороге $h = \ln \dfrac{1 - p_{pr}}{p_{pr}} + \dfrac{E_{\text{c}}}{G_0}$

Обнаружение по критерию Неймана-Пирсона

$p_{\text{обн}} = \max$ при заданной допустимой $p_{\text{ЛТ}}$

$$p_{\text{обн}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q} - \sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}} - \frac{h}{\sigma_q}\right)$$

$$p_{\text{ЛТ}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{\sigma_q} = \Phi^{-1}\left(1 - p_{\text{ЛТ}}\right)$$ - нормированный порог

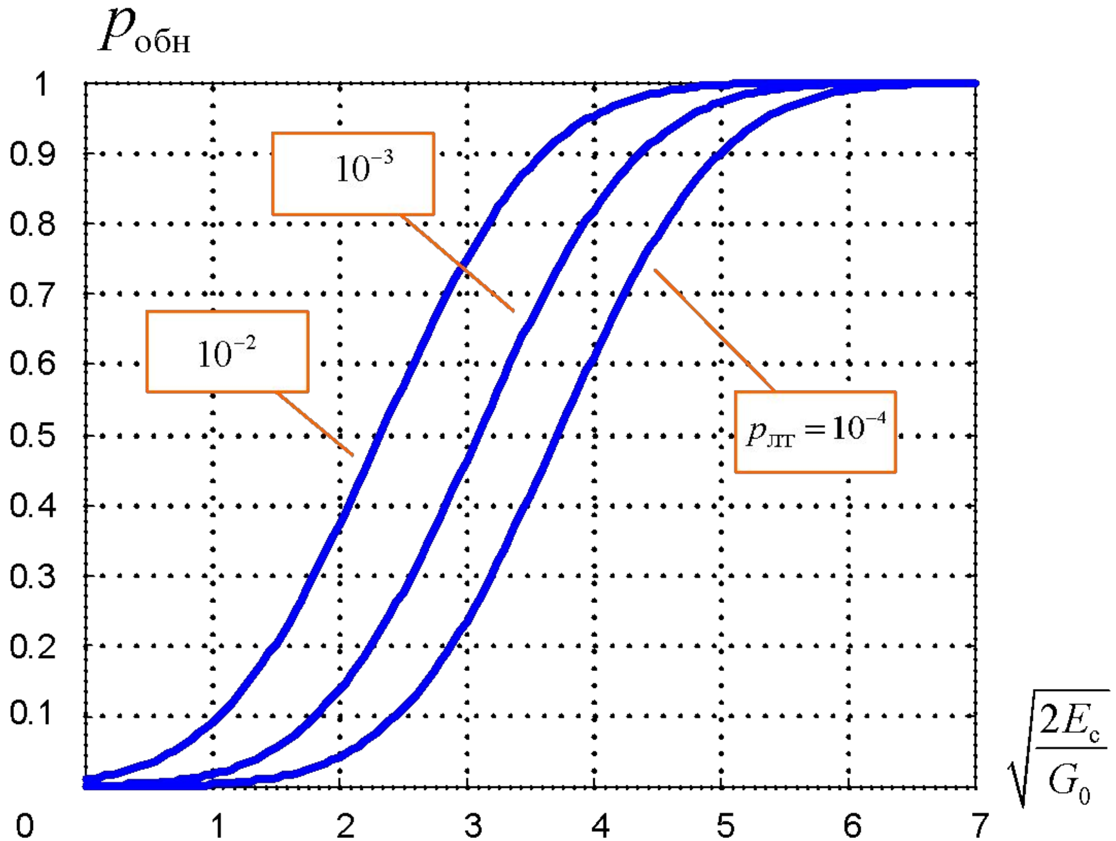
$$\boxed{p_{\text{обн}} = \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}} - \Phi^{-1}\left(1 - p_{\text{ЛТ}}\right)\right)}$$

Характеристики оптимального обнаружителя:

(полностью известный сигнал - 7)

Характеристики (кривые) обнаружения

по критерию Неймана-Пирсона



Оптимальное обнаружение сигнала

(сигнал с неизвестной начальной фазой - 1)

Сигнал $s_{\lambda,\varphi}(t) = \lambda \underbrace{U(t)}_{\text{закон АМ}} \cos\left(\omega_0 t + \underbrace{\psi(t)}_{\text{закон ФМ}} + \varphi\right)$

Апостериорная вероятность параметра λ

$$p_{ps}(\lambda) = \int_0^\infty p_{ps}(\lambda \mid \varphi) w_{pr}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_{ps}(\lambda \mid \varphi) d\varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {}^{q(\lambda,\varphi)} \quad \varphi\right)^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} {}_{pr}(\lambda)$$

$$q(\lambda,\varphi) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t) s_{\lambda,\varphi}(t)\, dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\lambda U(t)\cos\left(\omega_0 + \psi(t) + \varphi\right) dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{q(\lambda,\varphi)}\, d\varphi = I_0\left(\frac{2}{G_0} Z(\lambda)\right) \qquad Z(\lambda) = \sqrt{Z^c(\lambda)^2 + Z^s(\lambda)^2}$$

$$Z^c(\lambda) = \int_0^T y(t)\lambda U(t)\cos\left(\omega_0 t + \psi(t)\right) dt \qquad Z^s(\lambda) = \int_0^T y(t)\lambda U(t)\sin\left(\omega_0 t + \psi(t)\right) dt$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(сигнал с неизвестной начальной фазой - 2)

$$p_{ps}(\lambda) = cI_0\left(\frac{2}{G_0}Z(\lambda)\right)e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}}p_{pr}(\lambda)$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$p_{ps}(1) = cI_0\left(\frac{2}{G_0}Z(1)\right)e^{-\frac{E_c}{G_0}}p_{pr}$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$Z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0(0) = 1$$

$$p_{ps}(0) = c\,p_{pr}(0) = c\left(1 - p_{pr}\right)$$

$\boxed{\text{Случай, когда } p_{ps}(1) > p_{ps}(0):}$

$$cI_0\left(\frac{2}{G_0}Z(1)\right)e^{-\frac{E_c}{G_0}}p_{pr} > c\left(1 - p_{pr}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln I_0\left(\frac{2}{G_0}Z(1)\right) > \underbrace{\frac{E_c}{G_0} + \ln\frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}}_{h}$$

Оптимальное обнаружение сигнала:

(сигнал с неизвестной начальной фазой - 3)

Алгоритм оптимального обнаружения

$$\boxed{\ln I_0\left(\frac{2}{G_0}Z\right) > h}$$

$$\text{порог } h = \frac{E_\text{c}}{G_0} + \ln\frac{1-p_{pr}}{p_{pr}}$$

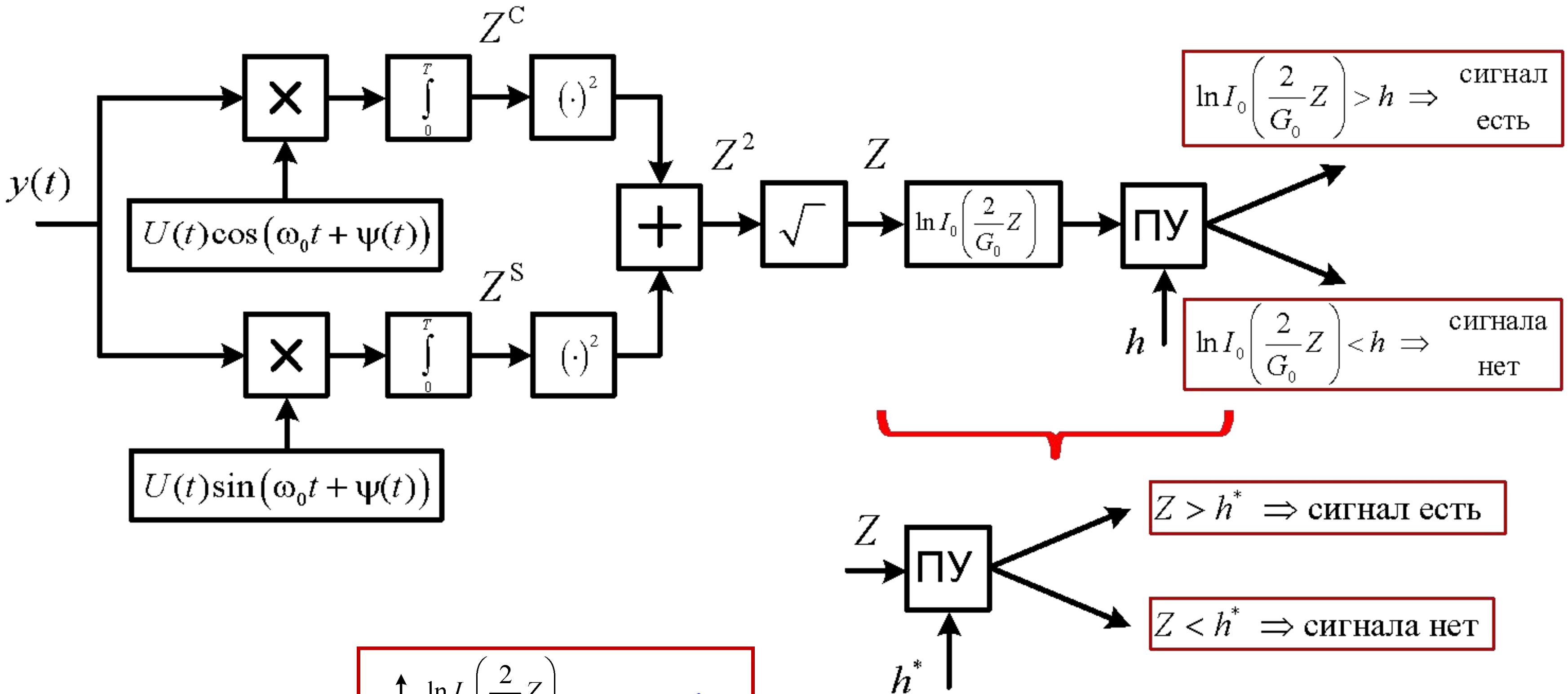
$$Z = \sqrt{{Z^\text{c}}^2 + {Z^\text{s}}^2}$$

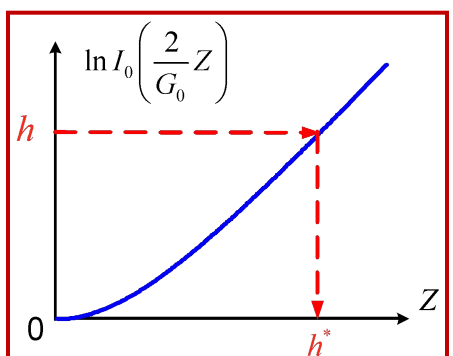
$$Z^\text{c} = \int_0^T y(t)U(t)\cos\left(\omega_0 t + \psi(t)\right)dt$$

$$Z^\text{s} = \int_0^T y(t)U(t)\sin\left(\omega_0 t + \psi(t)\right)dt$$

Оптимальный корреляционный обнаружитель

(сигнал с неизвестной начальной фазой)





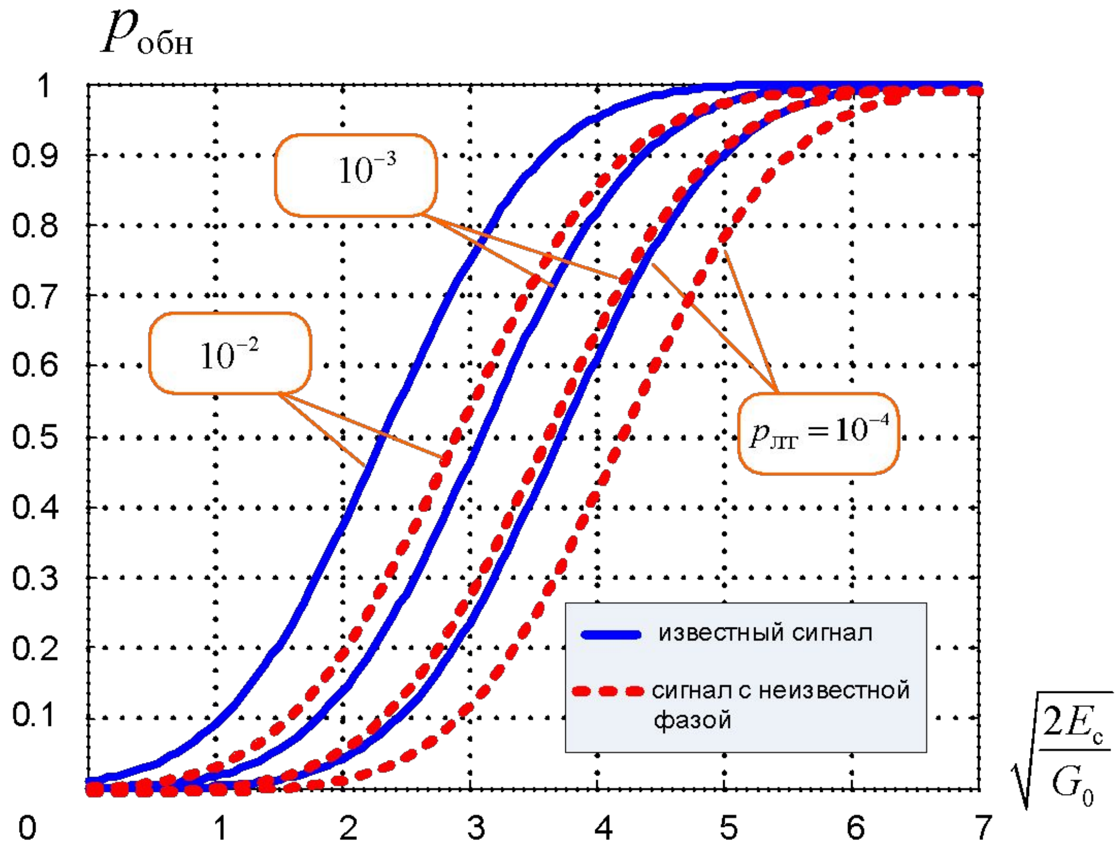
Оптимальный порог

$$h = \frac{E_c}{G_0} + \ln\frac{1-p_{pr}}{p_{pr}}, \quad h^* = \frac{G_0}{2} I_0^{-1}\left(e^h\right)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

Характеристики (кривые) обнаружения

по критерию Неймана-Пирсона



3.3. Оптимальное различение полностью известных сигналов

Принятая смесь сигнала и шума

$$y(t) = s_\lambda(t) + n(t)$$

$$s_\lambda(t) = \lambda s_1(t) + \left(1-\lambda\right) s_2(t)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если сигнал } s_1(t) \\ 0, & \text{если сигнал } s_2(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \text{различение} \\ \text{сигналов} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{оценка} \\ \text{параметра } \lambda \end{bmatrix}}$$

Апостериорная вероятность параметра λ

$$p_{ps}(\lambda) = e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda)$$

$$q(\lambda) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t) s_\lambda(t)\,dt \text{ — корреляционный интеграл}$$

$$E_c(\lambda) = \int_0^T s_\lambda^2(t)\,dt \text{ — энергия сигнала}$$

Оптимальное различение двух полностью известных сигналов (1)

$\boxed{\lambda = 1}$

$$s_\lambda(t) = s_1(t)$$

$$q(1) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s_1(t)dt \overset{def}{=} q_1$$

$$E_c(1) = \int_0^T s_1^2(t)dt \overset{def}{=} E_{c1}$$

$$\underbrace{p_{ps}(1)}_{p_{ps1}} = ce^{q_1}e^{-\frac{E_{c1}}{G_0}}\underbrace{p_{pr}(1)}_{p_{pr1}}$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$s_\lambda(t) = s_2(t)$$

$$q(0) = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)s_2(t)dt \overset{def}{=} q_2$$

$$E_c(0) = \int_0^T s_2^2(t)dt \overset{def}{=} E_{c2}$$

$$\underbrace{p_{ps}(0)}_{p_{ps2}} = ce^{q_2}e^{-\frac{E_{c2}}{G_0}}\underbrace{p_{pr}(0)}_{p_{pr2}}$$

Оптимальное различение двух полностью известных сигналов (2)

Оценка параметра

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 1 \text{ (сигнал } s_1(t)\text{), если } & p_{ps1} > p_{ps2} \\ 0 \text{ (сигнал } s_2(t)\text{), если } & p_{ps1} < p_{ps2} \end{cases}$$

Случай, когда $p_{ps1} > p_{ps2}$:

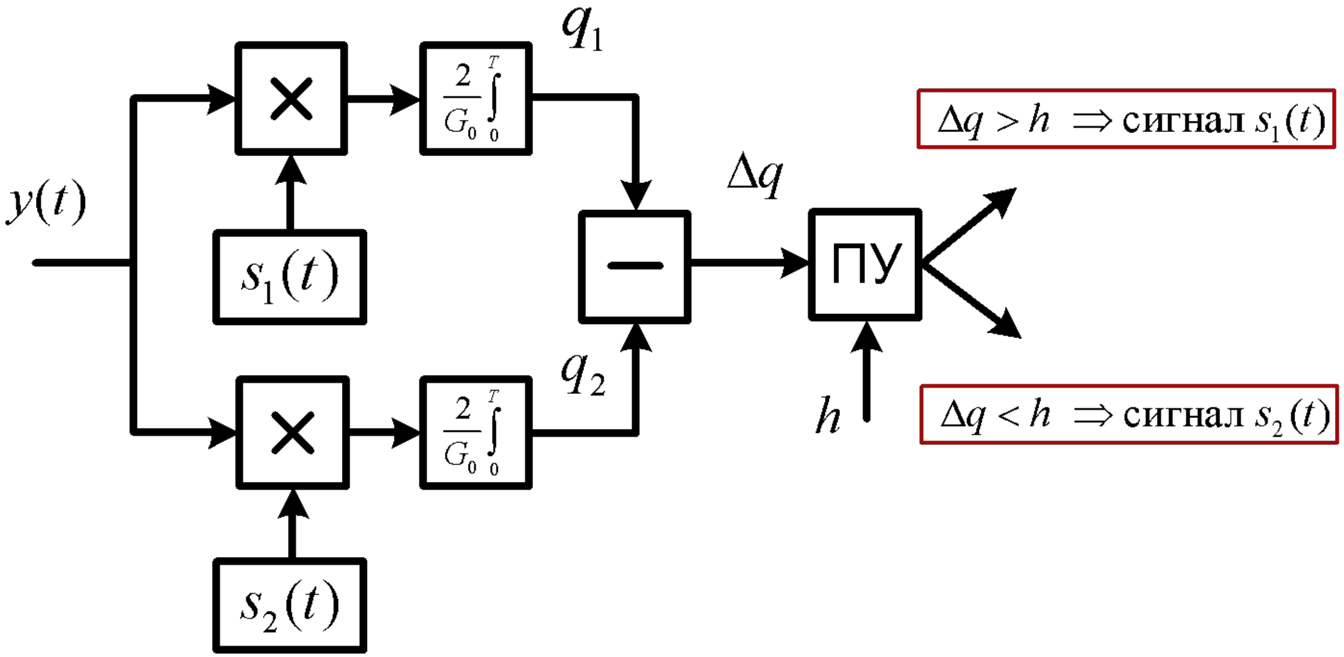
$$ce^{q_1} e^{-\frac{E_{c1}}{G_0}} p_{pr1} > ce^{q_2} e^{-\frac{E_{c2}}{G_0}} p_{pr2} \quad \Rightarrow \quad e^{q_1 - q_2} > \frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} e^{\frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0}}$$

$$\underbrace{q_1 - q_2}_{\Delta q} > \underbrace{\ln \frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} + \frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0}}_{\text{порог } h}$$

Алгоритм оптимального различения

$$\boxed{\Delta q = q_1 - q_2 = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_1(t) dt - \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s_2(t) dt > h}$$

Оптимальный приёмник различения двух известных сигналов



Оптимальный порог

$$h = \ln \frac{p_{pr2}}{p_{pr1}} + \frac{E_{c1} - E_{c2}}{G_0}$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (1)

Равновероятные сигналы с одинаковой энергией

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} p_{pr1} &= p_{pr2} = \frac{1}{2} \\ E_{c1} &= E_{c2} = E_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = 0}$$

Вероятность ошибки различения

$$p_{ош} = p(s_2 \mid s_1) \cdot p_{pr1} + p(s_1 \mid s_2) \cdot p_{pr2} = \frac{1}{2}\left[p(s_2 \mid s_1) + p(s_1 \mid s_2)\right]$$

условные вероятности ошибок
при приёме сигналов

$$p(s_1 \mid s_2) = \mathbf{P}\{\Delta q > h \mid s_2\} = \int_{h=0}^{\infty} w(\Delta q \mid s_2)\, d(\Delta q)$$

$$p(s_2 \mid s_1) = \mathbf{P}\{\Delta q < h \mid s_1\} = \int_{-\infty}^{h=0} w(\Delta q \mid s_1)\, d(\Delta q)$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (2)

Статистические характеристики напряжения на входе ПУ

$$\Delta q = q_1 - q_2 = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\underbrace{\left(s_1(t) - s_2(t)\right)}_{\Delta s(t)}dt = \frac{2}{G_0}\int_0^T y(t)\Delta s(t)dt = \Delta q_{\text{с}} + \Delta q_{\text{ш}}$$

Математическое ожидание
$$\overline{\Delta q} = \Delta q_{\text{с}} = \begin{cases} \left(\Delta q_{\text{с}} \mid s_1\right) = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T s_1(t)\Delta s(t)dt, \text{ если действует } s_1(t) \\ \left(\Delta q_{\text{с}} \mid s_2\right) = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T s_2(t)\Delta s(t)dt, \text{ если действует } s_2(t) \end{cases}$$

Дисперсия $\mathbf{D}\{\Delta q\} = \sigma^2_{\Delta q} = \sigma^2_{\Delta q_{\text{ш}}} = \overline{\left(\Delta q_{\text{ш}}\right)^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Шумовая составляющая } \Delta q_{\text{ш}} = \dfrac{2}{G_0}\displaystyle\int_0^T n(t)\Delta s(t)dt \\ \text{не зависит от того, какой сигнал действует} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma^2_{\Delta q} = \frac{2E_{\Delta s}}{G_0}$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (3)

Условные плотности вероятности

$$w\left(\Delta q \mid s_1\right) = \frac{1}{\sigma_{\Delta q}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\Delta q - (\Delta q_{\text{c}} \mid s_1)\right)^2}{2\sigma_{\Delta q}^2} \right)$$

$$w\left(\Delta q \mid s_2\right) = \frac{1}{\sigma_{\Delta q}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\Delta q - (\Delta q_{\text{c}} \mid s_2)\right)^2}{2\sigma_{\Delta q}^2} \right)$$

Условное математическое ожидание

$$\left(\Delta q_{\text{c}} \mid s_1\right) = \frac{2}{G_0}\int_0^T s_1(t)\Delta s(t)dt \qquad \left(\Delta q_{\text{c}} \mid s_2\right) = \frac{2}{G_0}\int_0^T s_2(t)\Delta s(t)dt$$

Дисперсия $\sigma_{\Delta q}^2 = \dfrac{2E_{\Delta s}}{G_0}$, где $E_{\Delta s} = \displaystyle\int_0^T \Delta s(t)^2 dt$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (4)

$$E_{\Delta s}=\int_0^T \Delta s(t)^2\,dt=\int_0^T\left[s_1(t)-s_2(t)\right]^2 dt=\underbrace{\int_0^T s_1(t)^2\,dt}_{E_{c1}=E_c}-2\int_0^T s_1(t)s_2(t)\,dt+\underbrace{\int_0^T s_2(t)^2\,dt}_{E_{c2}=E_c}=$$

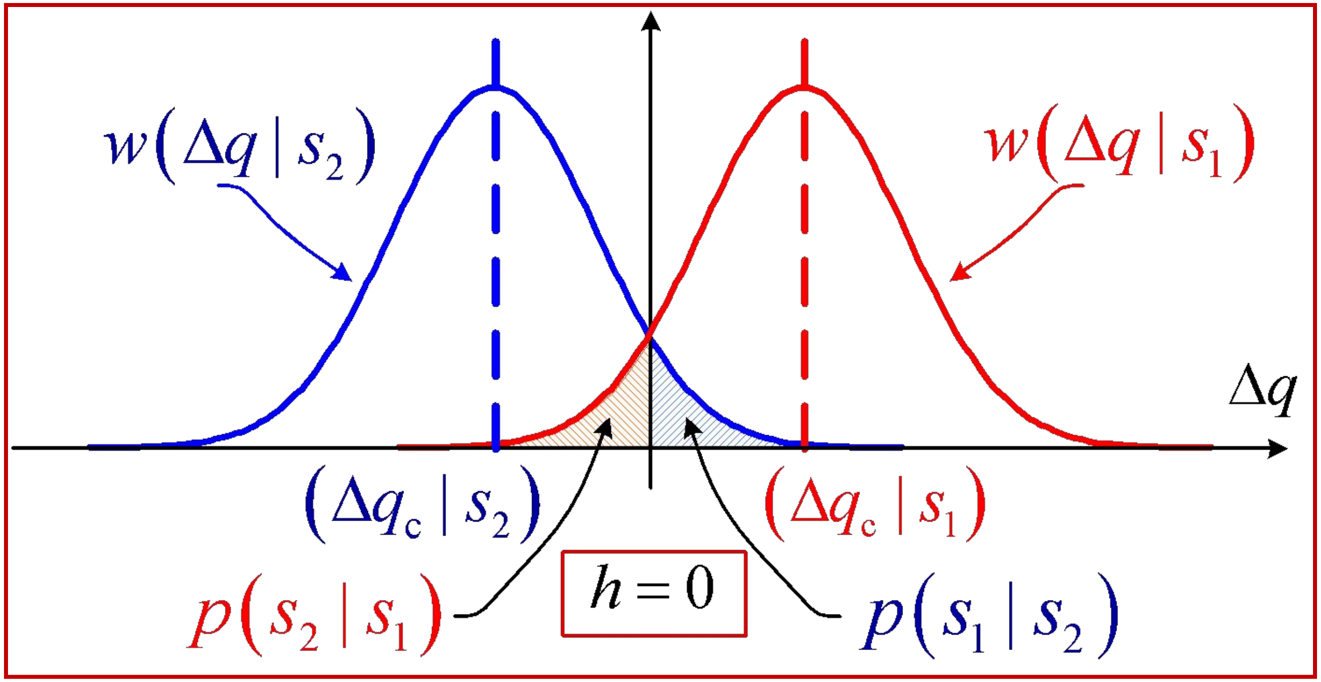
$$=2E_c\left(1-\underbrace{\frac{1}{E_c}\int_0^T s_1(t)s_2(t)\,dt}_{r_{12}\text{ – коэфф.взаимной корреляции сигналов}}\right)=2E_c\left(1-r_{12}\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\sigma^2_{\Delta q}=\frac{4E_c\left(1-r_{12}\right)}{G_0}}$$

$$\left(\Delta q_c\mid s_1\right)=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_1(t)\Delta s(t)\,dt=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_1(t)\left(s_1(t)-s_2(t)\right)dt=\frac{2E_c\left(1-r_{12}\right)}{G_0}$$

$$\left(\Delta q_c\mid s_2\right)=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_2(t)\Delta s(t)\,dt=\frac{2}{G_0}\int_0^T s_2(t)\left(s_1(t)-s_2(t)\right)dt=\frac{2E_c\left(r_{12}-1\right)}{G_0}=-\left(\Delta q_c\mid s_1\right)$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (5)

Условные плотности вероятности и условные вероятности ошибок



$$p(s_1 \mid s_2) = \int_{h=0}^{\infty} w(\Delta q \mid s_2)\, d(\Delta q) \qquad p(s_2 \mid s_1) = \int_{-\infty}^{h=0} w(\Delta q \mid s_1)\, d(\Delta q)$$

$$\boxed{p(s_2 \mid s_1) = p(s_1 \mid s_2)}$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (6)

$$p(s_2 \mid s_1) = \int\limits_{-\infty}^{0} w(\Delta q \mid s_1)\, d(\Delta q) = \Phi\left(\frac{0-(\Delta q_{\text{с}} \mid s_1)}{\sigma_{\Delta q}}\right) = \Phi\left(\frac{-\dfrac{2E_{\text{с}}}{G_0}(1-r_{12})}{\sqrt{\dfrac{4E_{\text{с}}(1-r_{12})}{G_0}}}\right) =$$

$$= \Phi\left(-\sqrt{\frac{E_{\text{с}}}{G_0}(1-r_{12})}\right) \underset{\text{т.к. } \Phi(-x)=1-\Phi(x)}{\overset{\uparrow}{=}} 1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E_{\text{с}}}{G_0}(1-r_{12})}\right) = p(s_1 \mid s_2)$$

Вероятность ошибки различения

$$\boxed{p_{\text{ош}} = \frac{1}{2}\left[p(s_2 \mid s_1) + p(s_1 \mid s_2)\right] = p(s_2 \mid s_1) = 1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E_{\text{с}}}{G_0}(1-r_{12})}\right)}$$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (7)

Противоположные сигналы: $r_{12} = -1$

$$\boxed{p_{\text{ош. пр}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}\right) = p_{\text{ош min}}}$$

Ортогональные сигналы: $r_{12} = 0$

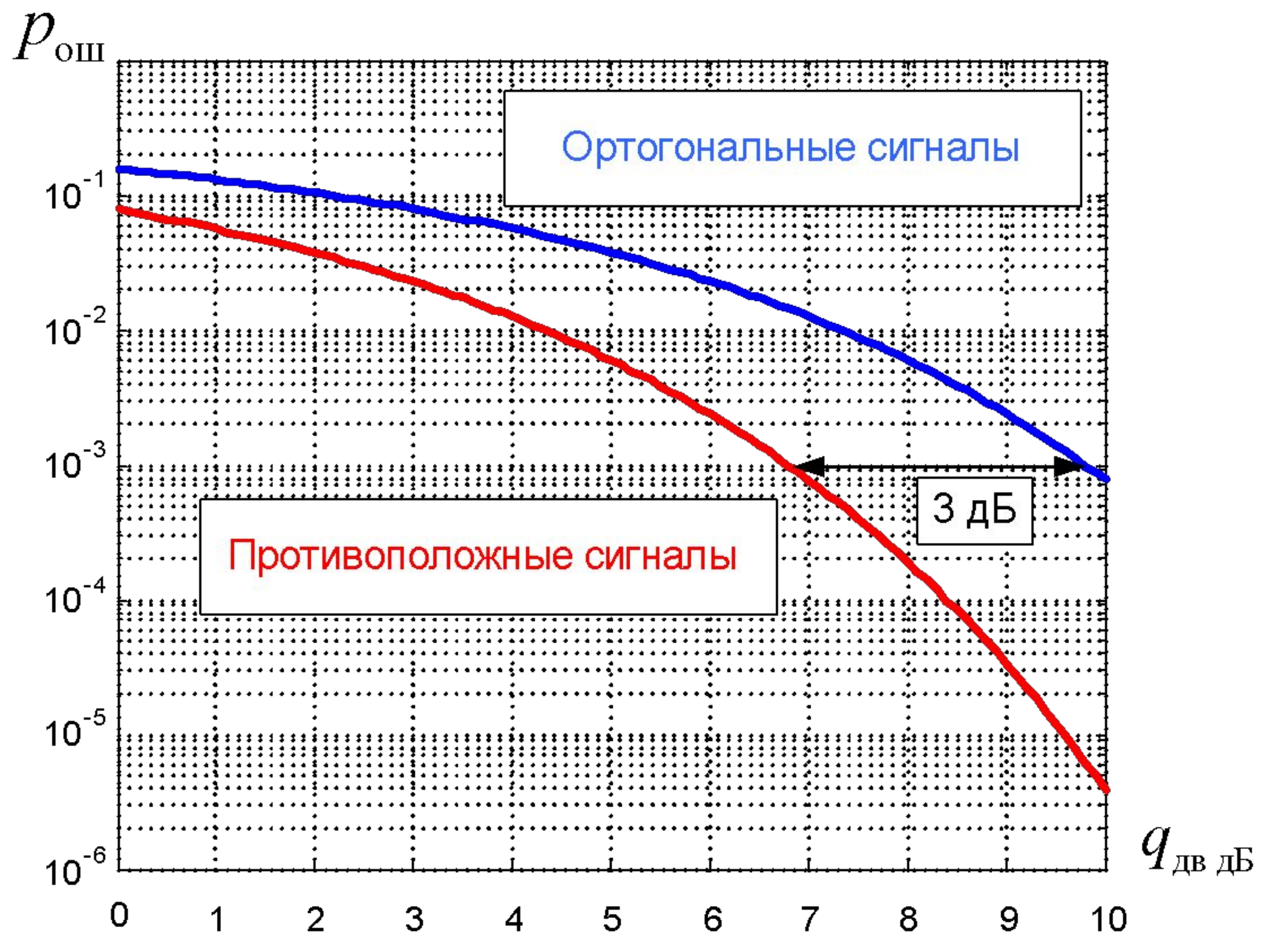
$$\boxed{p_{\text{ош. орт}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_{\text{c}}}{G_0}}\right)}$$

Неразличимые сигналы: $r_{12} = 1$

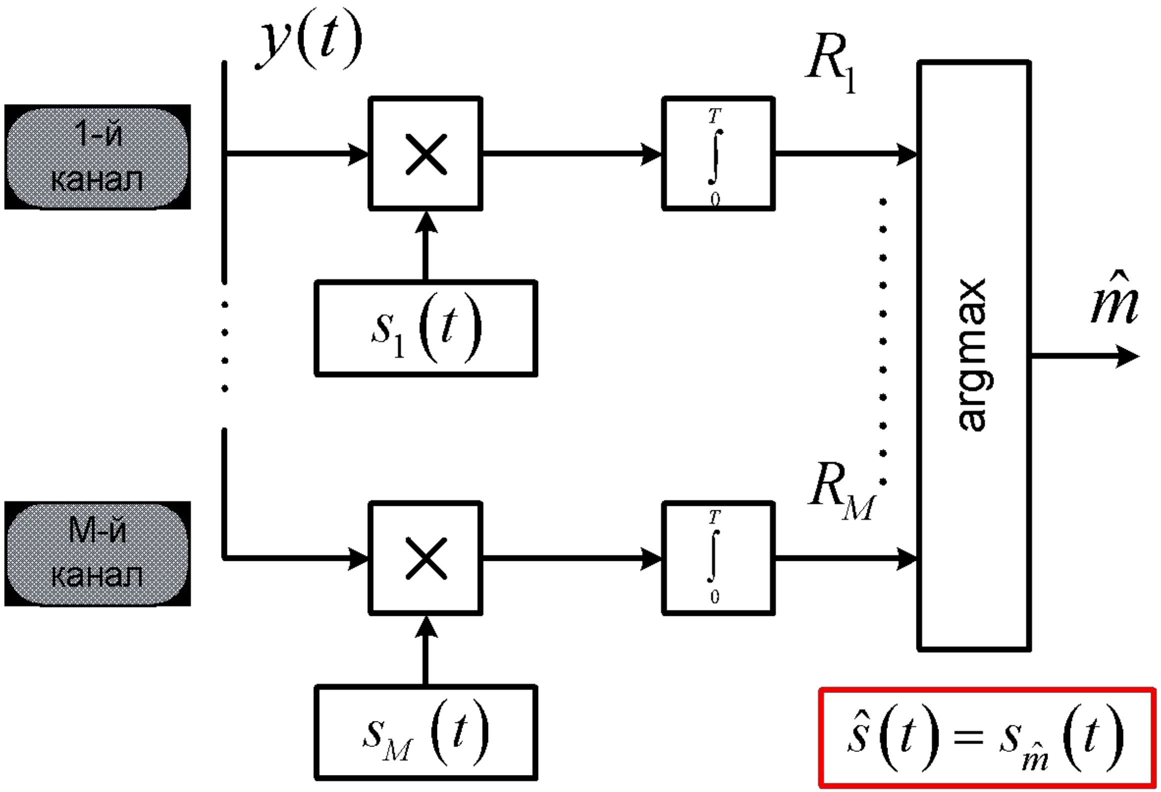
$$\boxed{p_{\text{ош}} = \frac{1}{2} = p_{\text{ош max}}}$$

"Двоичное" отношение сигнал-шум $q_{\text{дв}} = \frac{E_{\text{c}}}{G_0}$, $q_{\text{дв дБ}} = 10\lg\frac{E_{\text{c}}}{G_0}$

Вероятность ошибки при оптимальном различении двух известных сигналов (8)



Оптимальный приёмник различения M равновероятных сигналов с одинаковой энергией



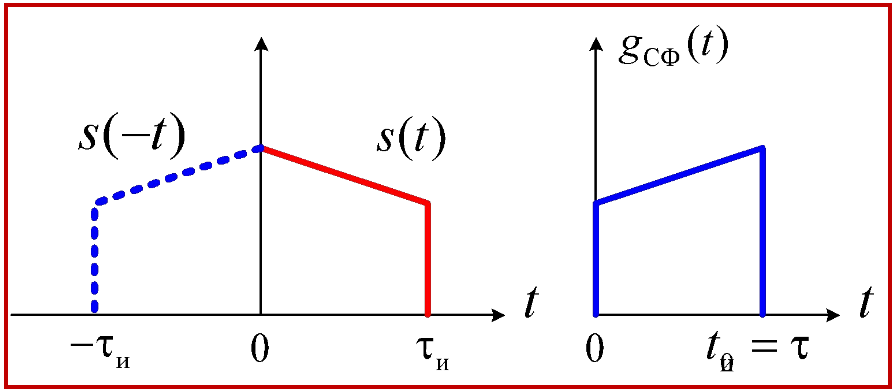
$$\hat{s}(t) = s_{\hat{m}}(t)$$

$$R_m = \int_0^T y(t) s_m(t)\, dt$$

3.4. Оптимальная обработка сигналов с использованием согласованных фильтров

Импульсная характеристика

$$\boxed{g_{\text{Ф}}(t) = cs(t_0 - t)}$$



Передаточная функция

$$\dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega) = \mathsf{F}\{g_{\text{СФ}}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} cs(t_0 - t)e^{-j\omega t}dt = \left\{\begin{matrix} t_0 - t = x \\ t = t_0 - x \\ dt = -dx \end{matrix}\right\} = c\int_{-\infty}^{+\infty} s(x)e^{-j\omega(t_0 - x)}d(-x) =$$

$$= -c\int_{+\infty}^{-\infty} s(x)e^{-j\omega t_0}e^{j\omega x}dx = ce^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} s(x)e^{j\omega x}dx = c\dot{S}^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

АЧХ

$$\boxed{K_{\text{СФ}}(\omega) = \left|\dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega)\right| = cS(\omega)}$$

ФЧХ

$$\boxed{\varphi_{\text{СФ}}(\omega) = \arg \dot{K}_{\text{СФ}}(j\omega) = -\Phi(\omega) - \omega t_0}$$

Характеристики согласованного фильтра (1)

Отклик СФ

$$y_{\text{вых}}(t) = y(t) * g_{\text{СФ}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\underbrace{g_{\text{СФ}}(t-\tau)}_{cs(t_0-(t-\tau))}d\tau = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)s(\tau+t_0-t)d\tau$$

$$\boxed{y_{\text{вых}}(t_0) = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)s(\tau)d\tau}$$

Корреляционный интеграл

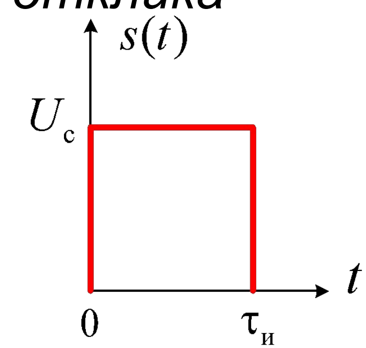
$$\boxed{q(\lambda) = \frac{2}{G_0}\int\limits_0^T y(t)s_\lambda(t)dt}$$

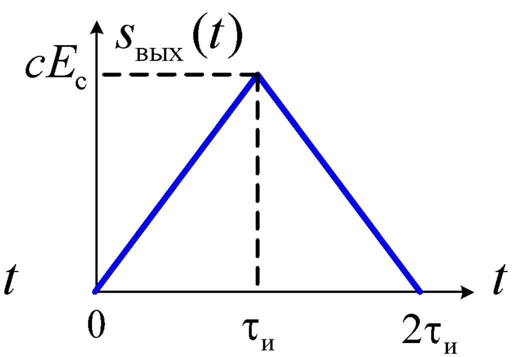
<u>Отклик СФ на сигнал</u>

$$s_{\text{вых}}(t) = s(t) * g_{\text{СФ}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\underbrace{g_{\text{СФ}}(t-\tau)}_{cs\left(t_0-(t-\tau)\right)}d\tau = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)s\left(\tau-(t-t_0)\right)d\tau = c\underbrace{R_s(t-t_0)}_{\substack{\text{АКФ сигнала,} \\ \text{сдвинутая на } t_0}}$$

Пиковое значение отклика

$$s_{\text{вых max}} = s_{\text{вых}}(t_0) = cR_s(0) = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^2(\tau)d\tau = cE_{\text{с}}$$





$$E_{\text{с}} = U_{\text{с}}^2\tau_{\text{и}}$$

Характеристики согласованного фильтра (2)

Отношение сигнал-шум на выходе СФ $\rho_{\text{СФ}} = \dfrac{s_{\text{вых.max}}}{\sigma_{\text{ш.вых}}}$

$$\boxed{s_{\text{вых max}} = cE_{\text{c}}}$$

Дисперсия шума $\sigma^2_{\text{ш. вых}} = \int\limits_0^{\infty} G_{\text{ш. вых}}(f)df = \int\limits_0^{\infty} G_0 K^2_{\text{СФ}}(f)df = \dfrac{G_0}{2}\cdot\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2_{\text{СФ}}(\omega)d\omega =$

$$\underset{\text{по теореме Парсеваля}}{=} \frac{G_0}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2_{\text{СФ}}(t)dt = \frac{G_0}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2 s^2\left(t_0 - t\right)dt = c^2\frac{G_0}{2}E_{\text{c}}$$

$$\boxed{\sigma_{\text{ш.вых}} = c\sqrt{\frac{G_0}{2}E_{\text{c}}}}$$

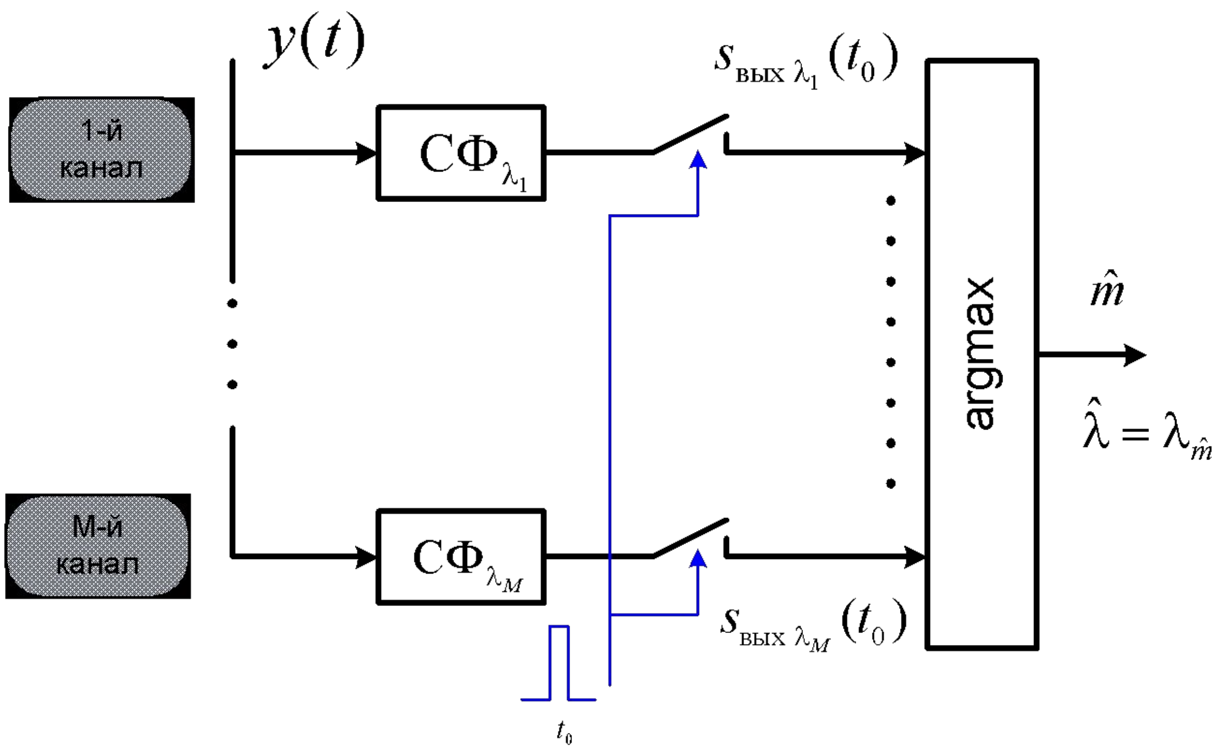
Теорема Парсеваля:

$$\text{если } \dot{X}(j\omega) = \mathrm{F}\{x(t)\}, \text{ то } \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{X}(j\omega)\right|^2 d\omega$$

$$\boxed{\rho_{\text{СФ}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{c}}}{G_0}}}$$

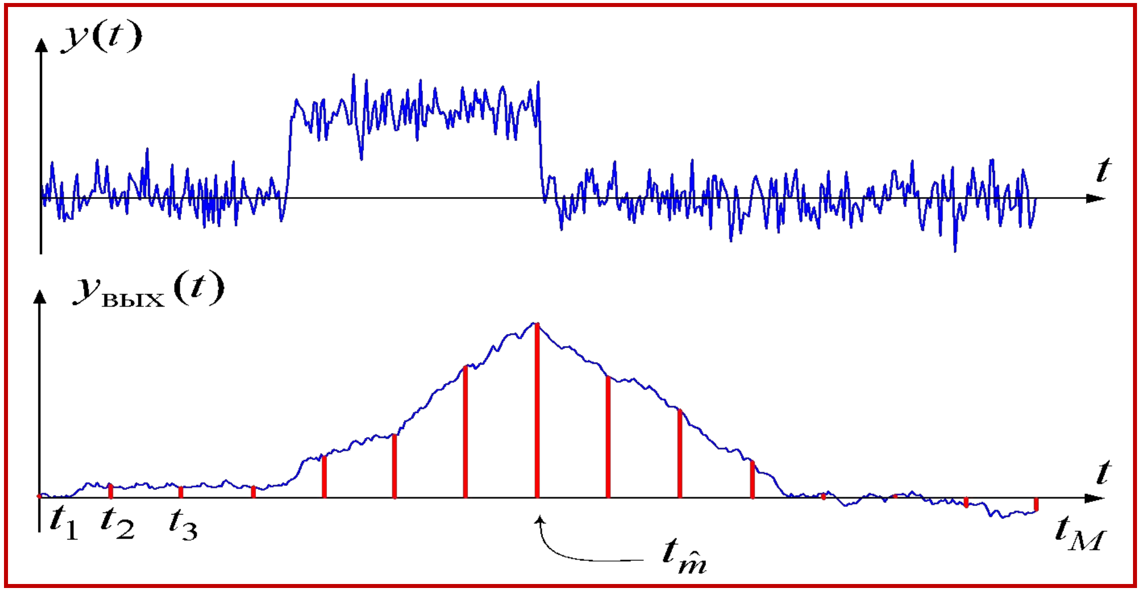
Максимальное отношение сигнал-шум на выходе СФ не зависит от вида сигнала и определяется только отношением его энергии к спектральной плотности шума

Оптимальные приёмники с СФ:
оценка неэнергетического параметра

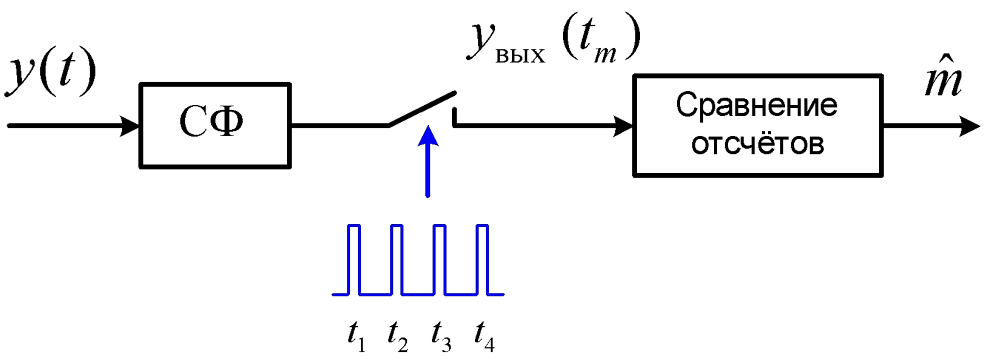


Априорное распределение вероятностей параметра - равномерное

Оптимальные приёмники с СФ:
оценка задержки видеоимпульса



Априорное распределение вероятностей задержки - равномерное

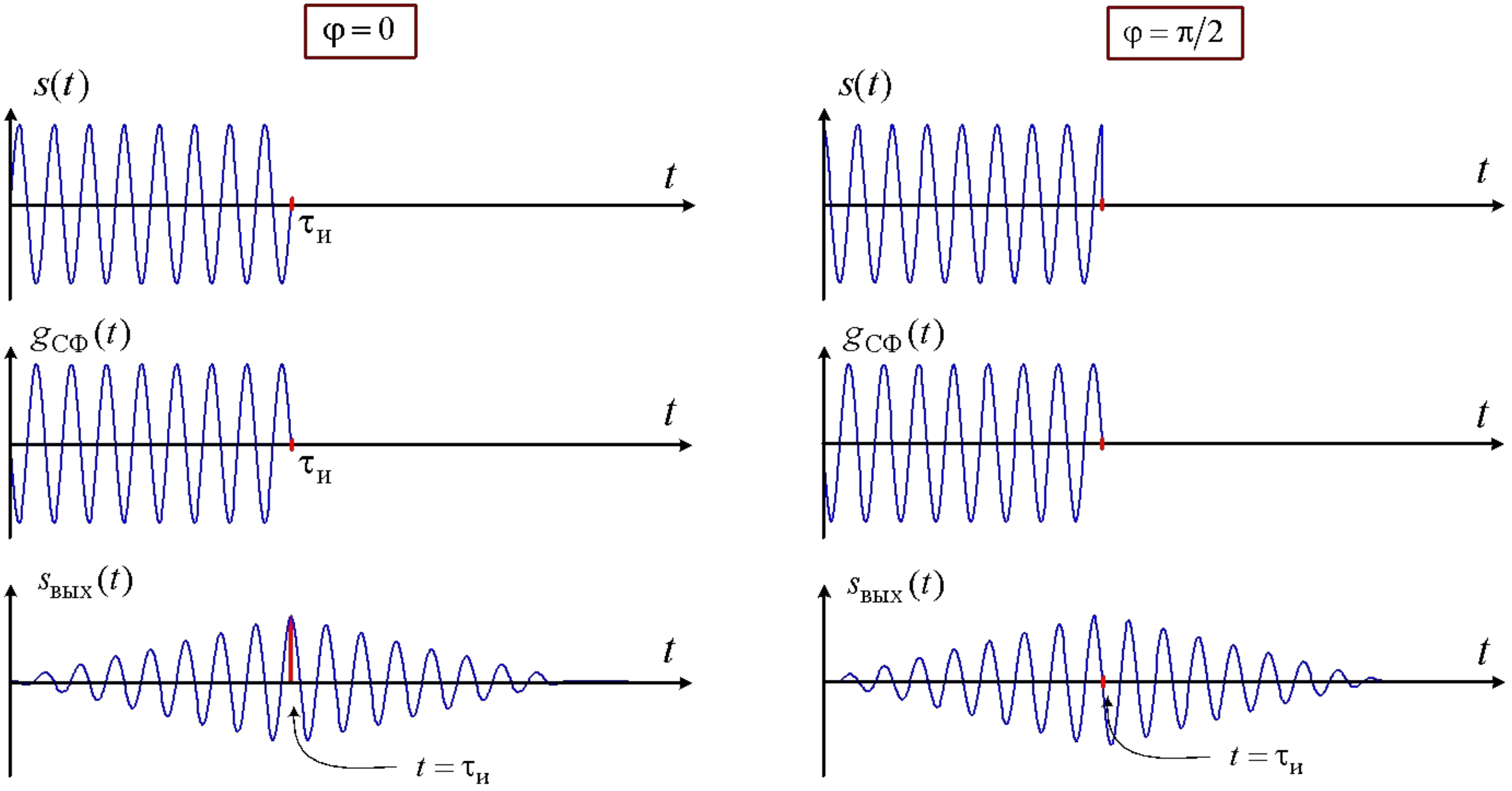


$$\hat{m} = \arg\max_{m=\overline{1,M}} y_{\text{вых}}(t_m)$$

$$\boxed{\hat{\tau} = t_{\hat{m}} - \tau_{\text{и}}}$$

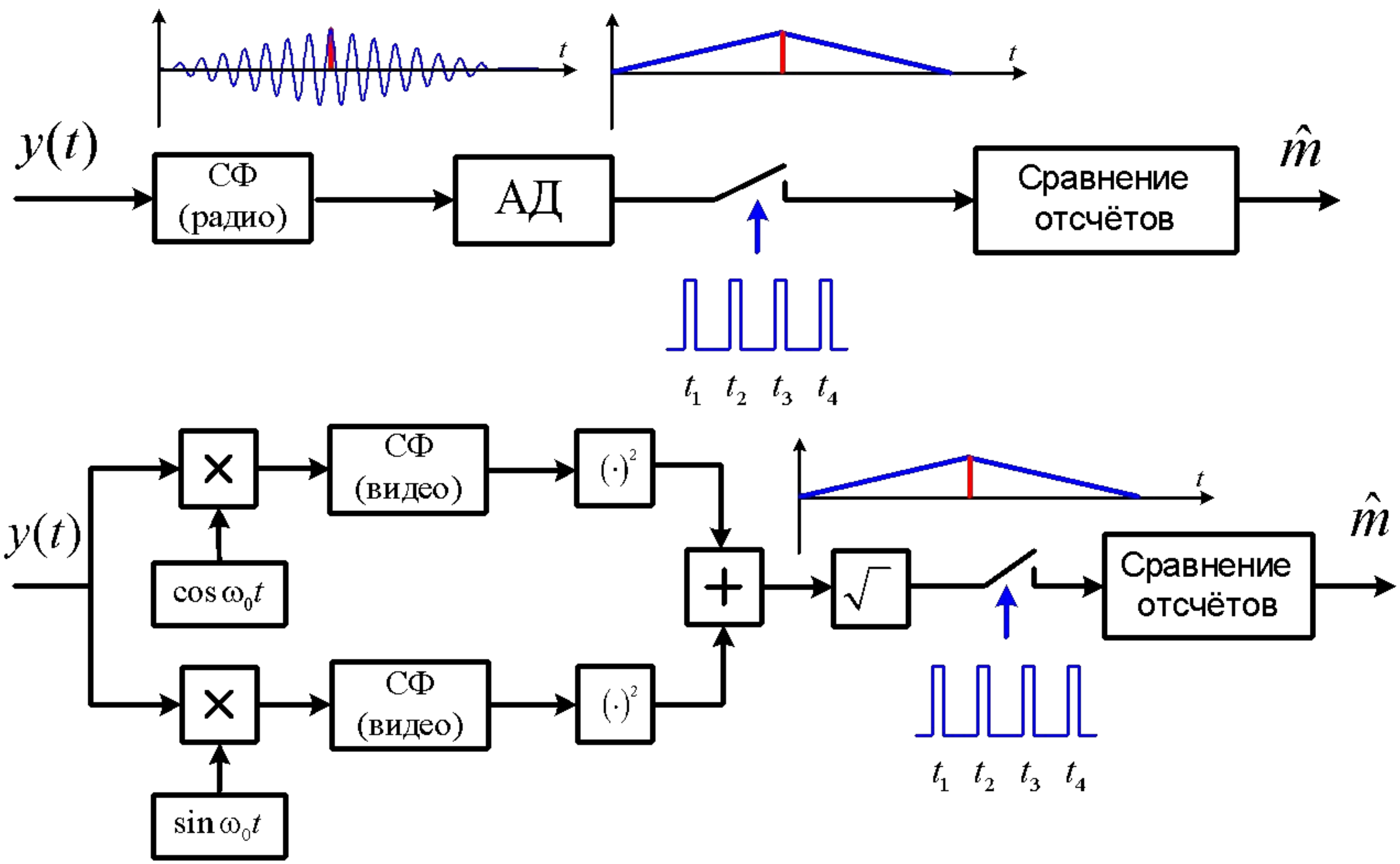
Оптимальные приёмники с СФ:
оценка задержки радиоимпульса (1)

Влияние начальной фазы сигнала

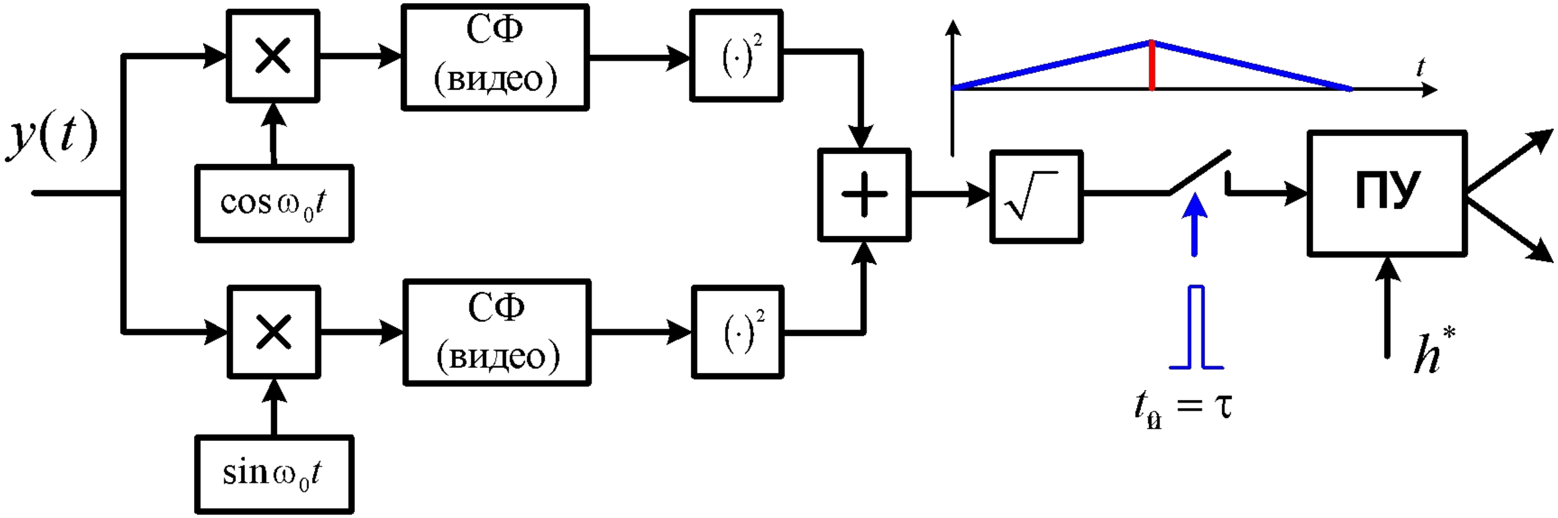


Оптимальные приёмники с СФ:
оценка задержки радиоимпульса (2)

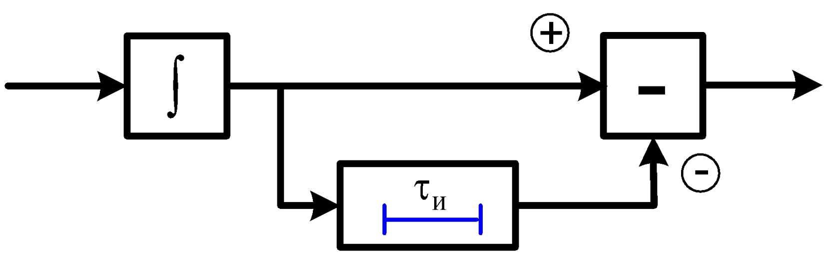
Сигнал со случайной начальной фазой



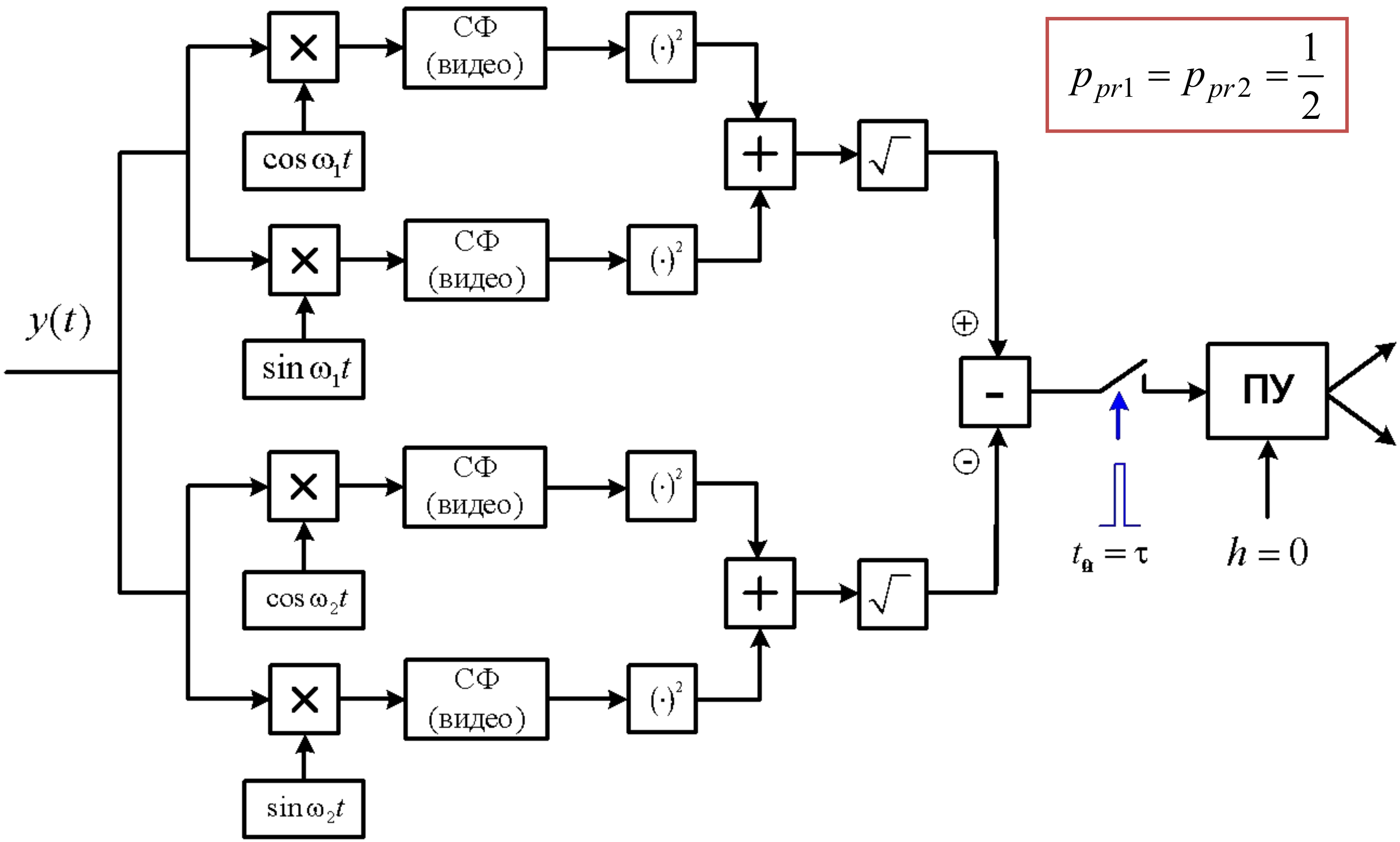
Оптимальные приёмники с СФ:
обнаружитель радиоимпульса



Согласованный фильтр для видеоимпульса (СФ (видео))



Оптимальные приёмники с СФ:
некогерентный сигнал с бинарной частотной манипуляцией



$$p_{pr1} = p_{pr2} = \frac{1}{2}$$