

Синхронизация

Часть 1.

*Синхронизация периодических
автоколебаний.*

*Эффективная синхронизация в
присутствии шума*



Синхронизация автоколебаний – одно из фундаментальных явлений природы

Автоколебательная система (АК)

- период T (для периодических АК);
- основная частота автоколебаний ω_0 (для периодических АК $\omega_0 = 2\pi / T$);
- фаза колебаний Φ (для гармонических автоколебаний $\Phi = \omega_0 t + \phi_0$).

Вынужденная синхронизация



Взаимная синхронизация



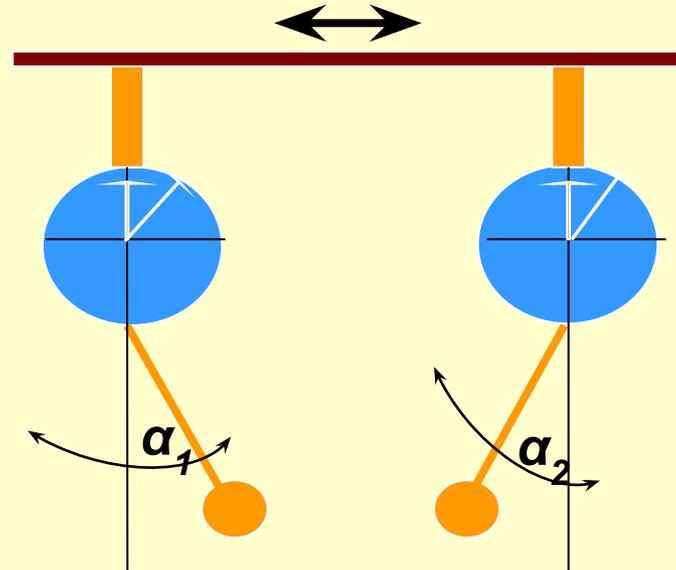
В результате взаимодействия происходит согласование периодов, захват частот и фаз автоколебаний.

Из истории вопроса

1665 г., Х. Гюйгенс – эффект взаимной синхронизации маятниковых часов.



Христиан Гюйгенс
1629 -- 1695



Маятники двух часов, подвешенных к одной и той же деревянной балке двигались всегда в противоположные стороны, а периоды колебаний точно совпадали. Если такой порядок искусственно нарушался, то он сам восстанавливался в короткое время. Т.е. часы синхронизовались в противофазе за счет связи через балку.

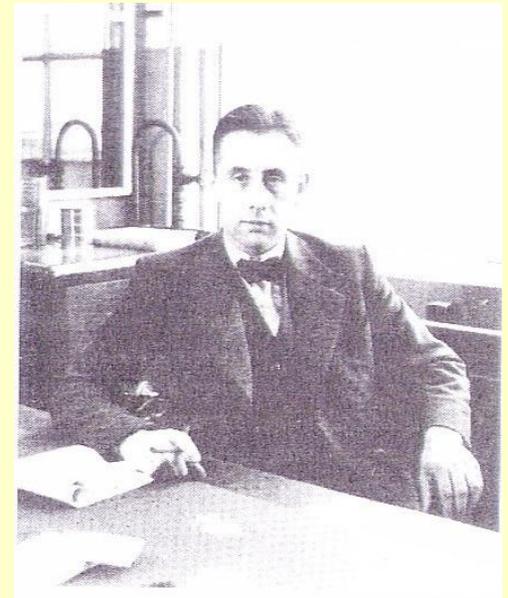
Середина XIX в., лорд Дж. Рэлей – синхронизация в акустических системах.

Рэлей наблюдал взаимную синхронизацию двух органичных труб. Различные, но схожие по параметрам, трубы, расположенные близко друг от друга, начинали звучать в унисон. Был также установлен эффект гашения колебаний, когда взаимодействие приводило к уменьшению колебаний.

Первая половина XX в. – исследование и применение синхронизации в радиотехнике.

1920 г., В. Экклес, Дж. Винсент – экспериментально установлен и исследована взаимная синхронизация двух триодных автогенераторов.

1927 г., Э. Эпплтон, Б. Ван дер Поль – основы теории эффекта синхронизации триодного автогенератора внешним гармоническим сигналом.



**Балтазар Вар дер Поль
1889 -- 1959**

**1930 г., А. А. Андро́нов, А. А. Витт --
создана законченная теория
синхронизации автогенератора
внешним гармоническим сигналом,
обоснованная с точки зрения теории
нелинейных колебаний.**

*Александр Александрович
Андро́нов
1901 -- 1952*



Синхронизация в живых системах

**Все биологические системы имеют внутренние биологические часы.
Эти часы могут подстраивать свои ритмы ко внешним сигналам.**

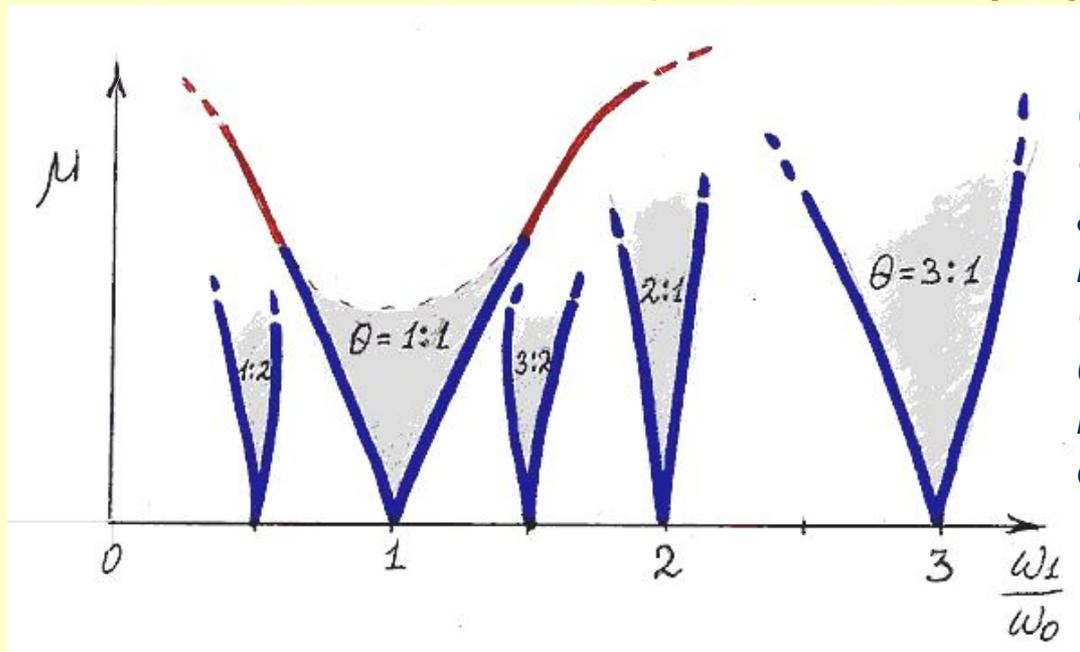
1727 г. Синхронизация свечения роя светлячков (Э. Кэмпфер).

**1729 г. Листья фасоли поднимаются и опускаются в соответствии со
сменой дня и ночи (Ж. Ж. Дорту де Меран).**

Синхронизация квазигармонических автоколебаний

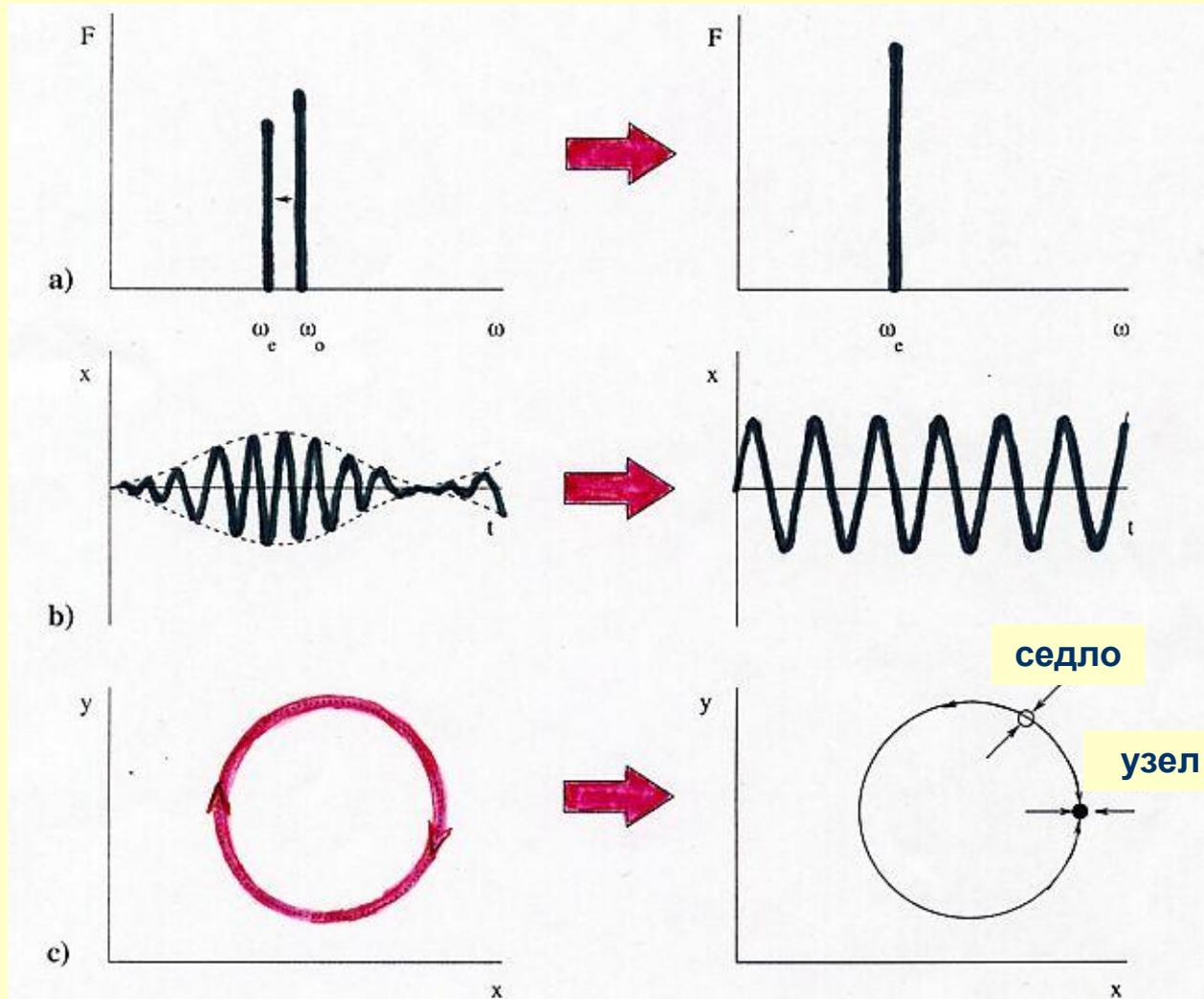


- $nT_1 = mT_2$,
- $n\omega_{01} = m\omega_{02}$,
- $n\Phi_1(t) - m\Phi_2(t) = \text{const}$,
где n и m – целые числа.



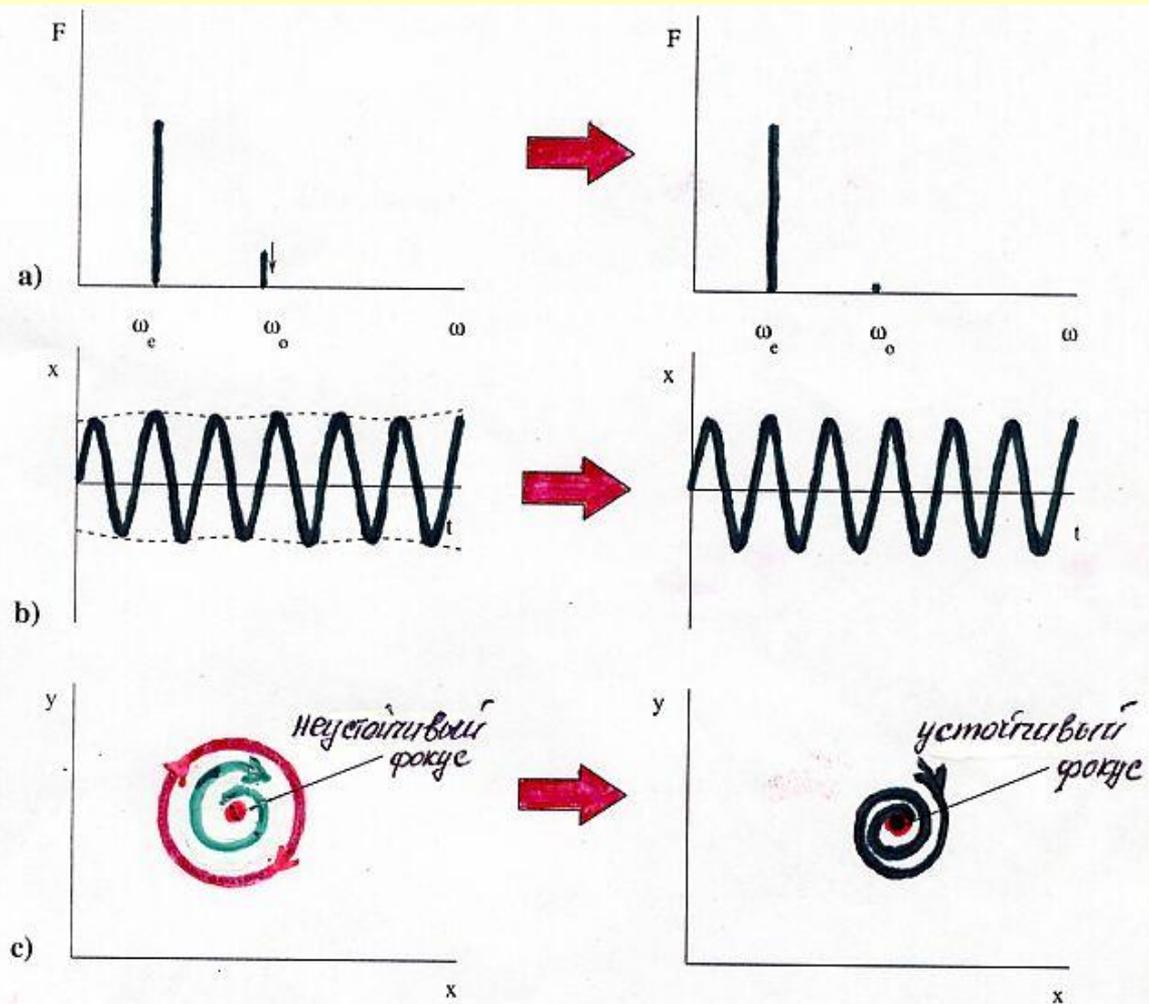
Синие линии – синхронизация через захват фазы автоколебаний;
красные линии синхронизация через подавление автоколебаний.
 θ -- отношение частот парциальных систем в области синхронизации

Синхронизация автоколебаний через захват фазы



Изменения в спектрах (а), временных реализациях (б) и в структуре фазового пространства, взятого в стробоскопическом сечении (с), происходящие в результате синхронизации при захвате частоты.

Синхронизация автоколебаний через подавление



Изменения в спектрах (а), временных реализациях (б) и в структуре фазового пространства, взятого в стробоскопическом сечении (с), происходящие в результате синхронизации при подавлении собственной частоты.

Вынужденная синхронизация автогенератора. Классическая теория

Модель -- генератор Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0 x = a \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (1)$$

a и ω_1 – амплитуда и частота внешней силы, φ_0 – начальная фаза внешней силы (положим, для простоты, $\varphi_0 = 0$).

Рассмотрим синхронизацию на основном тоне.
Считаем малыми

- расстройку частот $\Delta = \omega_0 - \omega_1$,
- нелинейность ε .

Решение ищется на частоте воздействия.

Замена переменных:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi(t)), \quad \dot{x}(t) = -\omega_1 A(t) \sin(\omega_1 t + \varphi(t)), \quad (2)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся функции по сравнению с $\sin(\omega_1 t)$, $\cos(\omega_1 t)$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение и усредняя за период воздействия, получаем **укороченные уравнения** для амплитуды $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$.

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right) - \mu \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \Delta - \frac{\mu}{A} \cos \varphi, \quad (3)$$

где $\mu = a/2\omega_1$, $\Delta = \omega_0 - \omega_1$ – расстройка частот, A_0 – невозмущенная амплитуда.

Состояния равновесия системы (3) соответствуют периодическим решениям системы (1). Существует область значений μ и Δ , для которых система (3) имеет устойчивое состояние равновесия.

В системе (1), соответственно, наблюдаются устойчивые колебания на частоте воздействия. Эта область -- есть **область синхронизации**.

Фазовое приближение

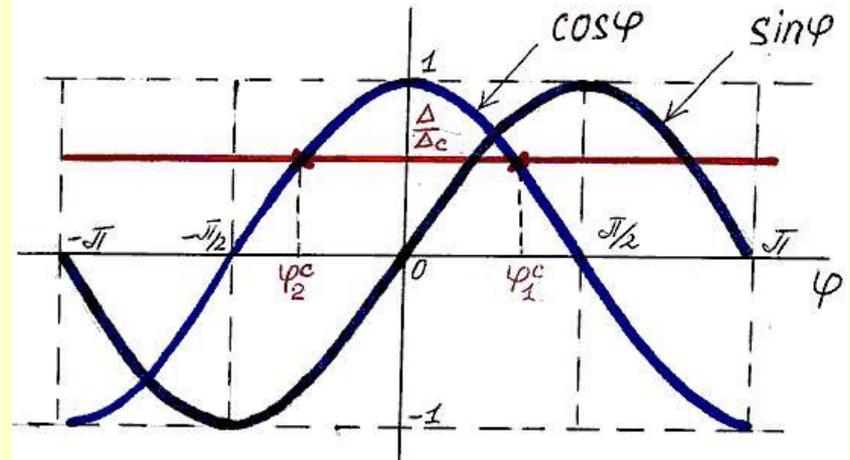
Считаем, что амплитуда воздействия a мала. Тогда $A(t) \approx A_0$ и можно записать уравнение только для фазы ϕ :

$$\ddot{\phi} = \Delta - \Delta_c \cos \phi, \quad (4)$$

где $\Delta_c = \mu / A_0$.

Состояния равновесия (4):

$$\phi_{1,2}^c = \pm \arccos \left(\frac{\Delta}{\Delta_c} \right).$$



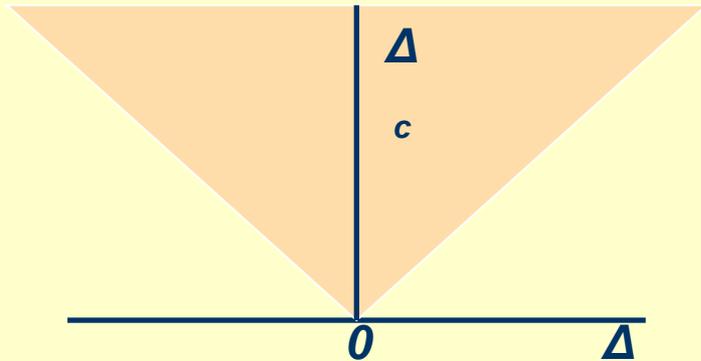
Уравнение для малого отклонения θ фазы ϕ от состояния равновесия.

$$\ddot{\theta} = (\Delta_c \sin \phi_{1,2}^c) \theta.$$

Решение ϕ_{2}^c -- устойчиво, а ϕ_{1}^c -- неустойчиво.

Область существования состояний равновесия уравнения (4) определяется условием $|\Delta| < \Delta_c$ (оно задает границы области синхронизации у её основания).

Область синхронизации



В этой области в системе (1) существуют устойчивые и неустойчивые периодические колебания на частоте воздействия. Разность фаз между колебаниями и воздействием постоянна.

На границе области синхронизации происходит слияние и исчезновение точек равновесия ϕ_{12}^c . Вне области синхронизации уравнение (4) имеет решение

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\Delta - \Delta_c}{\Delta + \Delta_c}} \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2} \right) \right].$$

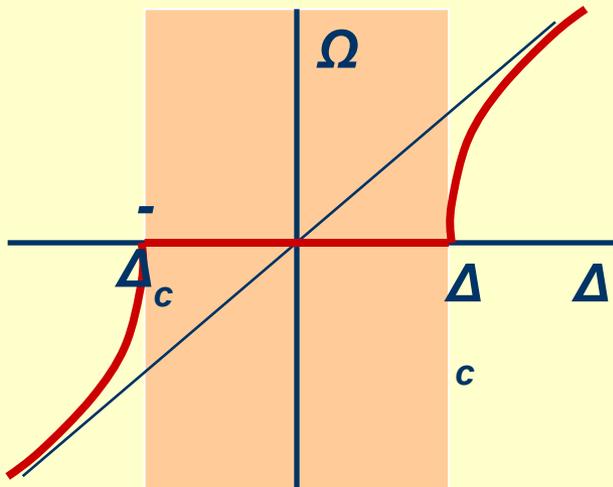
Мгновенная частота биений

$$\phi(t) = \frac{\Delta^2 - \Delta_c^2}{\Delta + \Delta_c \cos\left(t\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}\right)}$$

есть периодическая функция с периодом $T_b = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}}$.

Средняя частота биений $\Omega = \frac{2\pi}{T_b} = \sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}$

характеризует расстройку частоты автоколебаний и воздействия.



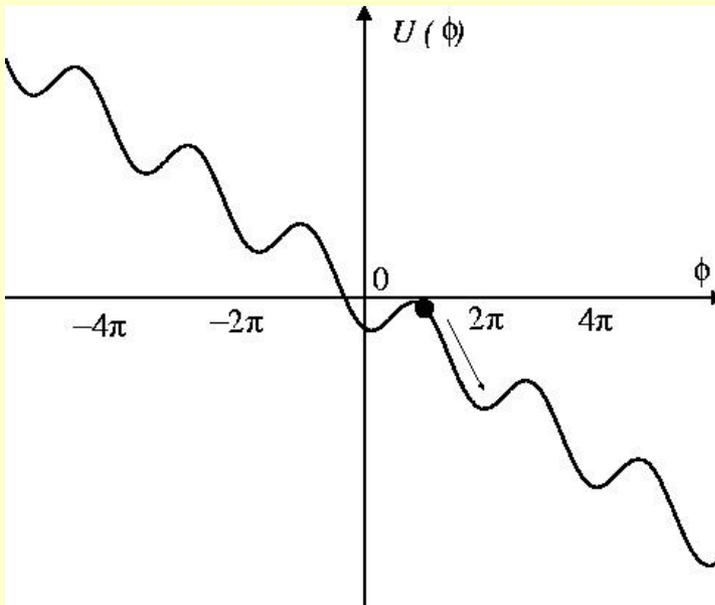
Модель (4) качественно описывает синхронизацию АК через захват фазы и частоты, но не описывает эффект подавления автоколебаний сигналом воздействия.

Зависимость средней частоты биений в модели (4) от расстройки

Интерпретация захвата фазы

Модель (4) можно рассматривать, как уравнение движения передемпфированной частицы в заданном потенциале.

$$U(\varphi) = -\Delta \cdot \varphi + \Delta_c \sin \varphi.$$



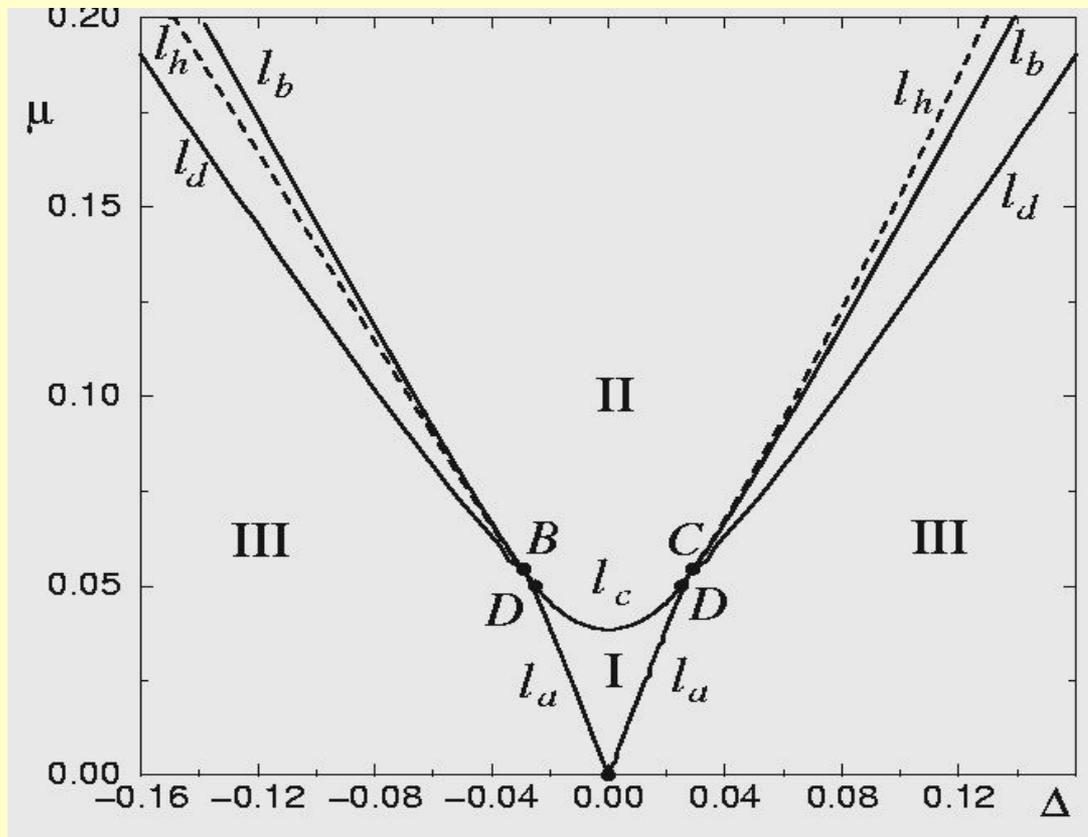
Синхронизация соответствует наличию потенциальных ямок. В этом случае частица все время остается на дне ямки (разность фаз $\varphi = const$). В отсутствии синхронизации нет минимумов потенциала и частица скатывается вниз по потенциальному профилю.

Профиль потенциала $U(\varphi)$ в случае захвата фазы при $\Delta \neq 0$

Численное исследование модели (3)

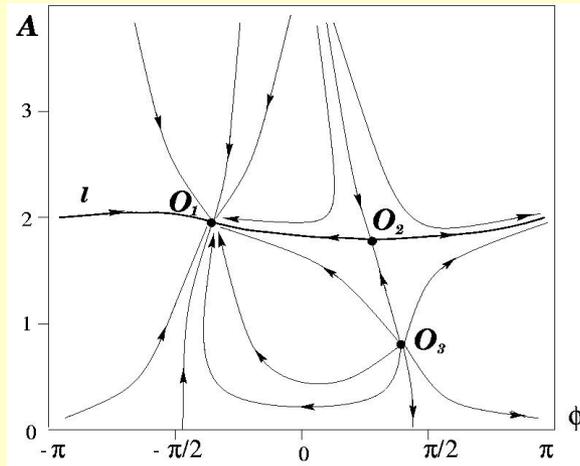
Фазовое пространство системы (3) – двумерный цилиндр. В системе (3) возможны три или одно состояния равновесия: O_1, O_2, O_3 (устойчивый узел, седло и репеллер).

Бифуркационная диаграмма системы (3).

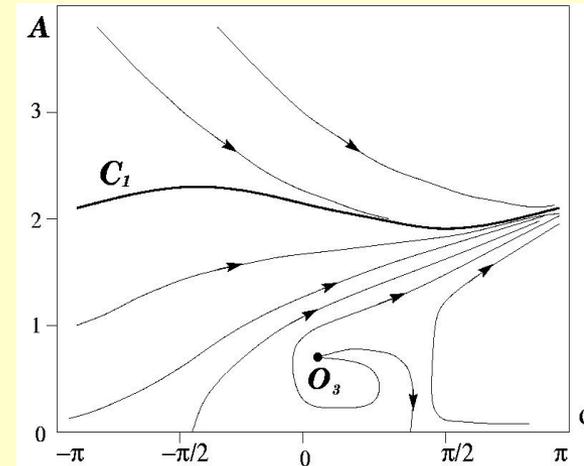


Линии l_a и l_c соответствуют седло—узловой бифуркации в (3);
 l_b обозначает линию бифуркации Андронова – Хопфа;
 l_d -- линия перестройки C_1 в C_2 ;
 l_h -- бифуркация рождения тора из резонансного цикла в исходной систем (1);
 B и C -- точки сборки, куда входят линии l_a и l_c ;
 D -- точки Богданова – Такенса, в которых сходятся линии l_a и l_b

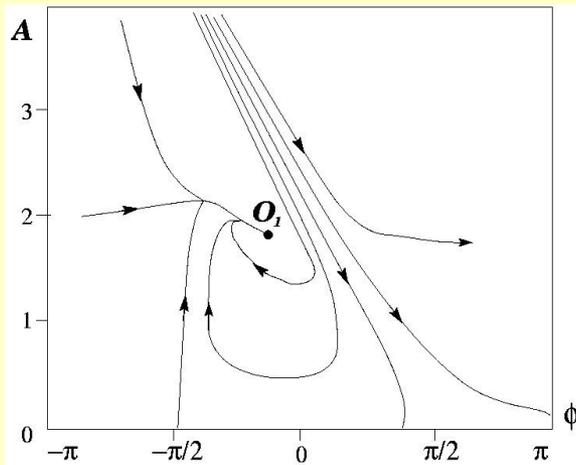
Структура фазового пространства системы (3) в различных областях бифуркационной диаграммы



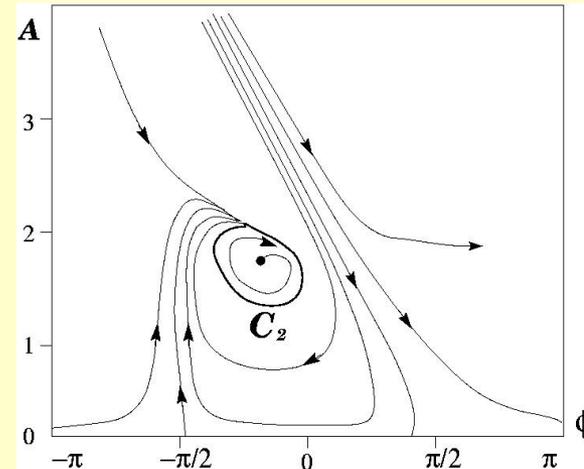
Область I



Область III (ниже I_d)



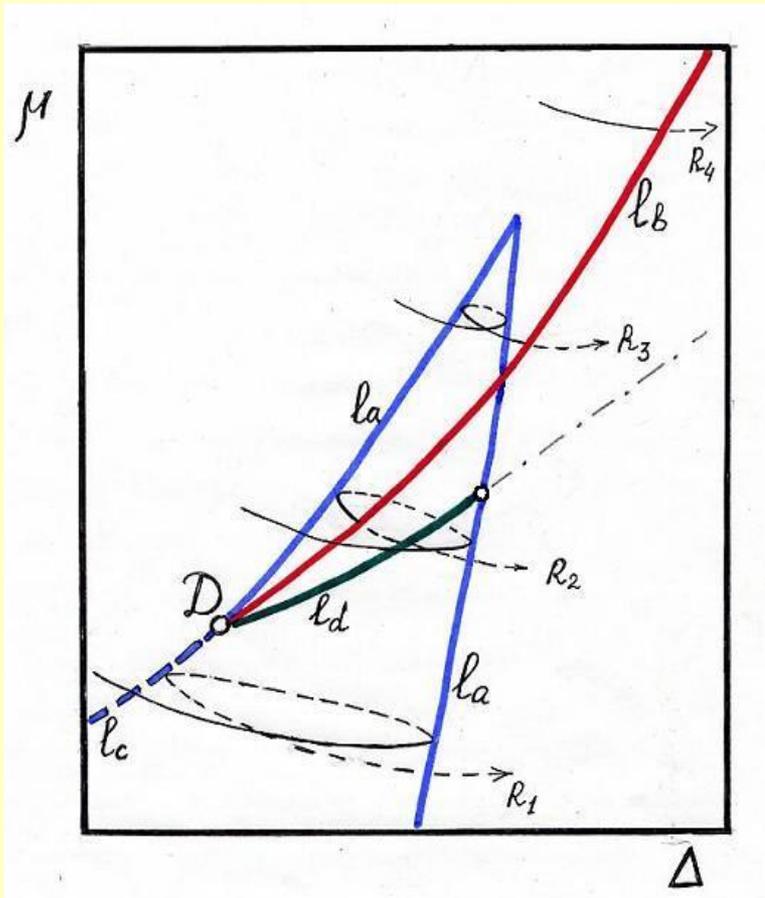
Область II



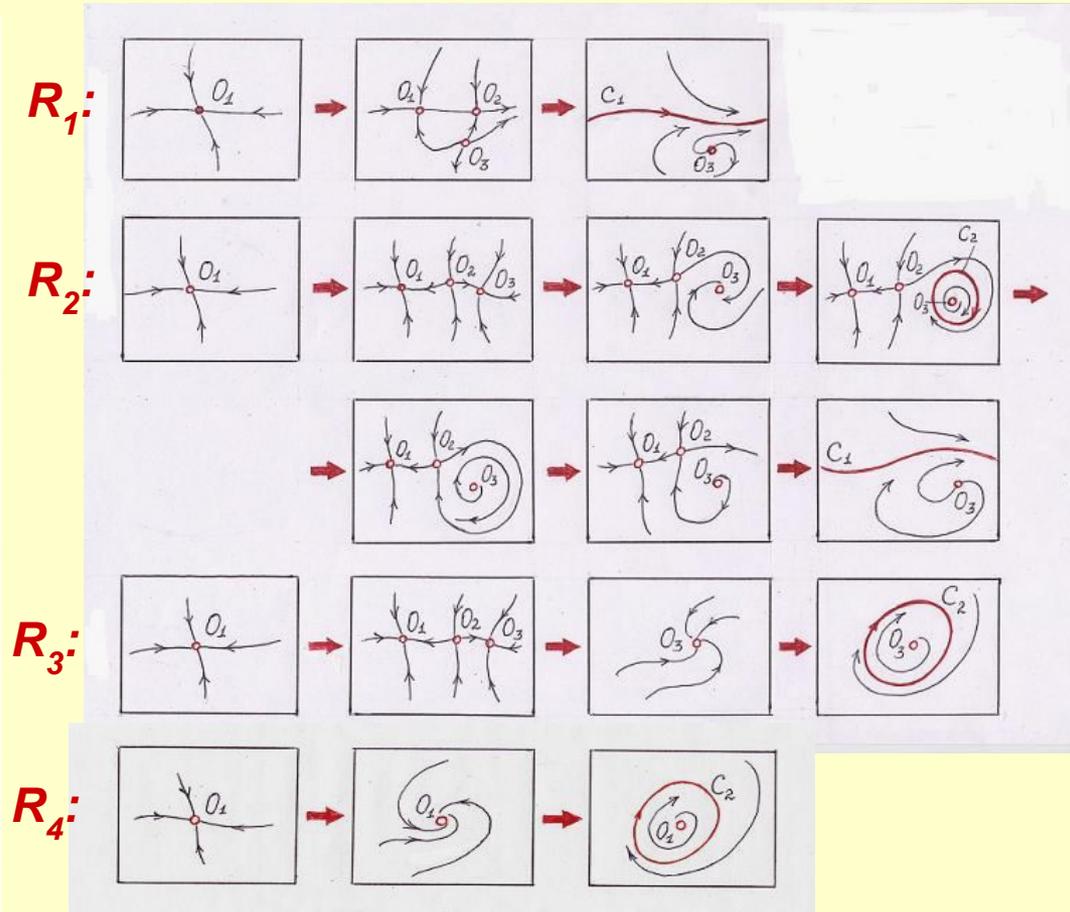
Область III (выше I_d)

Окрестность точки Богданова - Такенса

Фрагмент бифуркационной диаграммы (качественный вид)



Эволюция фазовых портретов при движении по различным направлениям

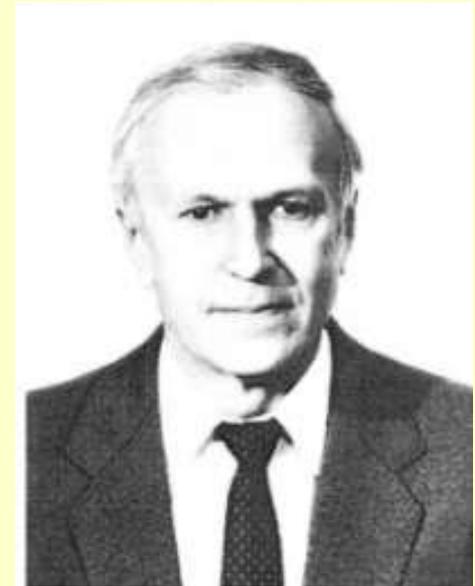


Линия l_d соответствует образованию петли сепаратрисы седла и кризису инвариантной кривой C_2 в области синхронизации. Вне области синхронизации на продолжении этой линии (штрих—пунктир) в полной системе (1) бифуркации не наблюдается. Тор C_2 эволюционирует в C_1 .

Синхронизация в присутствии шума

В реальных системах всегда присутствует шум (внутренний шум и случайные воздействия со стороны внешней среды). Каково влияние шума на эффект синхронизации?

Проблема синхронизации генератора типа Ван дер Поля в присутствии шума была решена в начале 60-х годов XX в. в работах Р.Л. Стратоновича и А. Н. Малахова. Рассматривалась задача при условии, что мощность шума гораздо меньше мощности гармонического воздействия и источник шума можно описать гауссовским δ -коррелированным процессом.



*Руслан Леонтьевич
Стратонович
1930 -- 1997*

Вынужденная синхронизация автогенератора в присутствии шума. Классическая теория

Модель -- генератор Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием и источником шума:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0 x = a \cos(\omega_1 t) + \sqrt{2D_0} \xi(t), \quad (5)$$

где $\xi(t)$ – гауссовский шум со средним $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$ и корреляционной функцией $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$. Величина D_0 характеризует интенсивность шума.

Решение стохастического уравнения (5) есть **случайный процесс** $x(t)$. Считая $x(t)$ гармоническим (узкополосным) шумом ищем решение в виде (2), где $A(t)$ и $\phi(t)$ – **случайные функции**, медленно меняющиеся по сравнению с $\sin(\omega_1 t)$, $\cos(\omega_1 t)$.

Стохастические укороченные уравнения для амплитуды $A(t)$ и фазы $\phi(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\varepsilon A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right) - \mu \sin \varphi + \frac{D}{A} + \sqrt{2D} \xi_1(t), \\ \dot{\phi} &= \Delta - \frac{\mu}{A} \cos \varphi + \frac{\sqrt{2D}}{A} \xi_2(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где ϕ -- мгновенная разность фаз автоколебаний и внешней силы, $\mu = a/2\omega_1$, $\Delta = \omega_0 - \omega_1$, $D = D_0/2\omega_1^2$. Случайные воздействия $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – независимые гауссовские источники белого шума: $\langle \xi_{1,2}(t) \rangle \equiv 0$, $\langle \xi_{1,2}(t) \xi_{1,2}(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$.

Если $a \ll \varepsilon$, $D \ll \varepsilon$, то возмущением амплитуды автоколебаний можно пренебречь и считать $A = A_0$. В этом случае поведение разности фаз можно приближенно описать следующим стохастическим уравнением

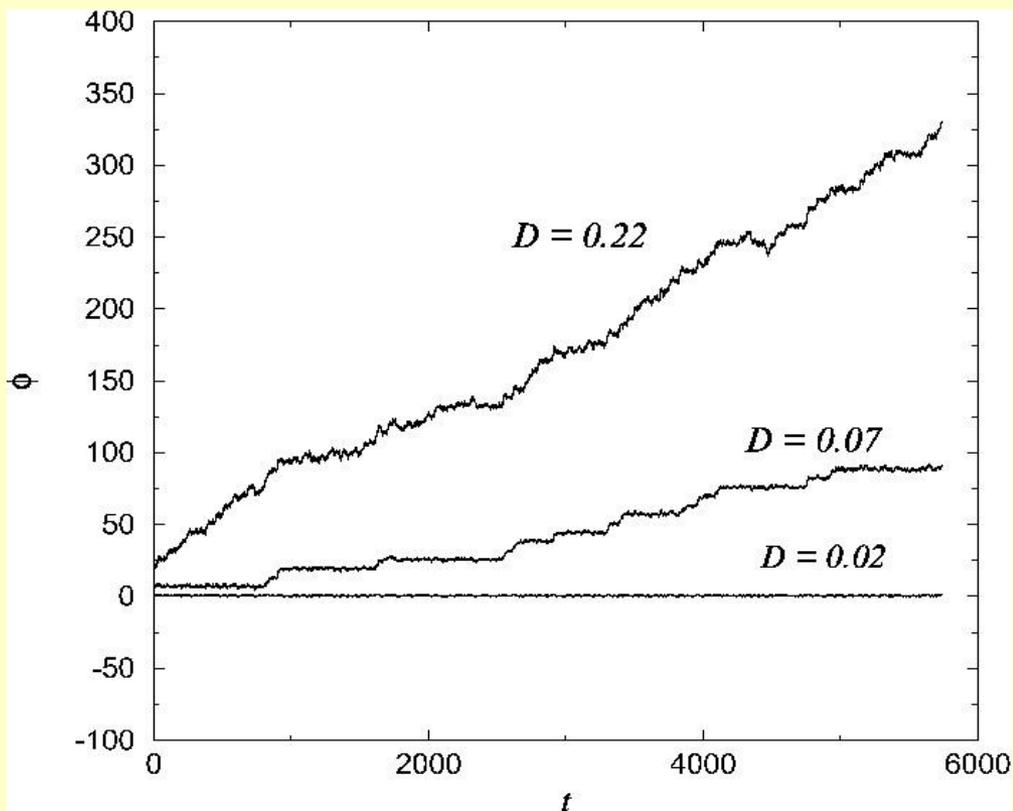
$$\dot{\phi} = \Delta - \Delta_c \cos \varphi + \frac{\sqrt{2D}}{A_0} \xi_2(t), \quad (7)$$

где $\Delta_c = \mu / A_0$.

Уравнение (7) описывает броуновское движение частицы с координатой ϕ в одномерном наклонном периодическом потенциале

$$U(\varphi) = -\Delta \cdot \varphi + \Delta_c \sin \varphi.$$

Наличие шума приводит к диффузии разности фаз ϕ : фаза ϕ флуктуирует вблизи минимумов потенциала и совершает случайные переходы из одной потенциальной ямы в другую, меняясь скачком на 2π .



Зависимость мгновенной разности фаз ϕ от времени для нескольких значений интенсивности шума. Параметры: $\Delta = 0.06$, $\mu = 0.15$

Увеличение интенсивности шума приводит к уменьшению длительности пребывания ϕ одной потенциальной ямке. Частица быстрее скатывается по потенциальному профилю. Соответственно, при отличной от нуля расстройке значение $|\phi|$ быстрее растет во времени и средняя частота биений $\langle \Omega(t) \rangle = \langle \omega(t) \rangle \approx \omega_1$ увеличивается.

Распределение разности фаз ϕ описывается уравнением Фоккера – Планка -- Колмогорова

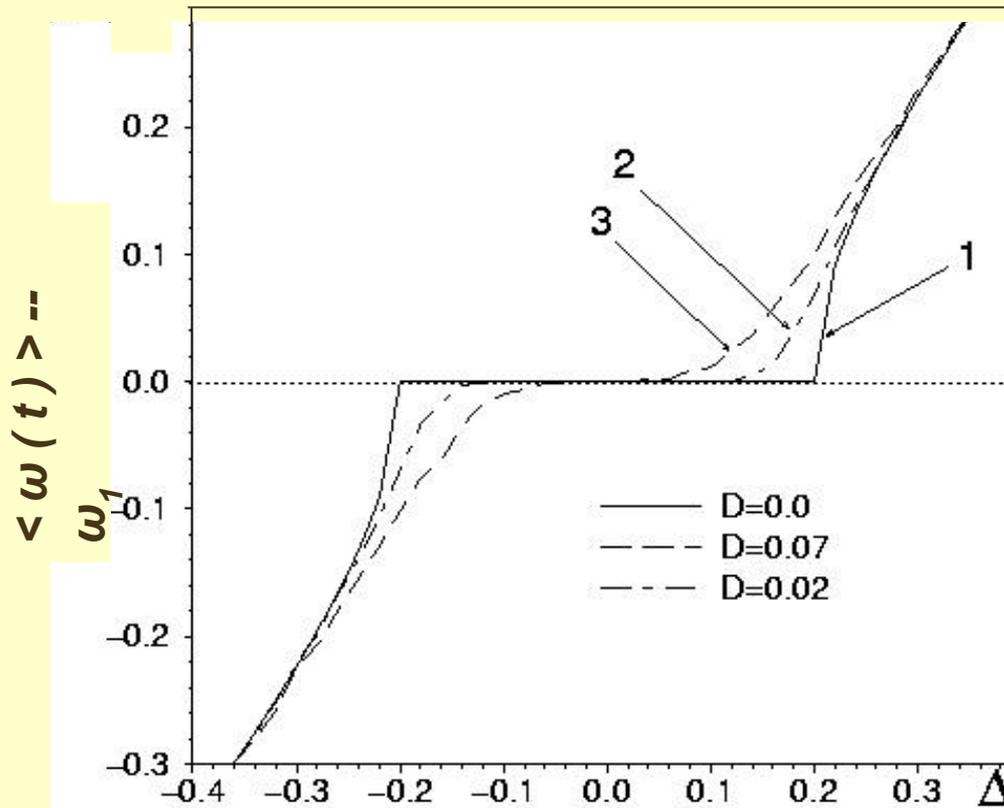
$$\frac{\partial p(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\Delta - \Delta_c \cos \varphi) p(\varphi, t) - Q \frac{\partial p(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right], \quad (8)$$

где $Q = D/A_0^2$. Если считать, что $\phi \in [-\pi, \pi]$ и рассматривать уравнение (8) при периодических граничных условиях, то можно найти стационарное решение в виде:

$$p_{st}(\varphi) = C \exp\left(\frac{\varphi\Delta - \Delta_c \sin \varphi}{Q}\right) \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \exp\left(-\frac{\psi\Delta - \Delta_c \sin \psi}{Q}\right) d\psi,$$

где C – нормировочная константа.

Зная стационарную плотность вероятности $p_{st}(\phi)$ можно рассчитать среднюю частоту $\langle \Omega(t) \rangle = \langle \omega(t) \rangle \approx \omega_1$:



Зависимость разности средней частоты автоколебаний в системе (7) и частоты воздействия от параметра расстройки Δ при различных значениях интенсивности шума D .

Хотя распределение величины $\phi(t)$ (если считать, что $\phi \in [-\infty, \infty]$), задаваемой СДУ (7), не является гауссовским, и, соответственно, $\phi(t)$ нельзя считать винеровским процессом, однако дисперсия $\langle \phi^2(t) \rangle - \langle \phi(t) \rangle^2$ растет во времени по линейному закону. Соответствующий Угловой коэффициент называют **коэффициентом эффективной диффузии разности фаз**:

$$D_{eff} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\langle \varphi^2(t) \rangle - \langle \varphi(t) \rangle^2 \right).$$

Величина D_{eff} характеризует среднее число сбоев разности фаз на 2π в единицу времени. Она возрастает с ростом интенсивности шума и частотной расстройки.

Таким образом, наличие случайных гауссовских возмущений приводит к тому, что синхронизация автоколебаний оказывается нестрогой. Разность частот $\langle \omega(t) \rangle - \omega_1$ отлична от нуля при любой сколь угодно малой расстройке Δ . Однако, в случае слабого шума можно выделить область **эффективной синхронизации**, исходя из выполнения неравенства $|\langle \omega(t) \rangle - \omega_1| \leq \delta$ или $D_{eff} \leq D_{eff}^{min}$, где δ и D_{eff}^{min} -- некоторые заданные значения.

Литература

- 1.** И. И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике* (Наука, Москва, 1981).
- 2.** А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва, 2003).
- 3.** П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (Наука, Москва, 1980).
- 4.** Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс, *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*, (Институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск, 2002).
- 5.** А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин, *Нелинейные колебания* (Физматлит, Москва, 2002).
- 6.** В. С. Анищенко и др., *Нелинейные эффекты в хаотически и стохастических системах* (Институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск, 2003).
- 7.** Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*, (Сов. Радио, Москва, 1961).
- 8.** В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, *Радиотехника и электроника*, Т. 47, № 2, С.133 (2002).