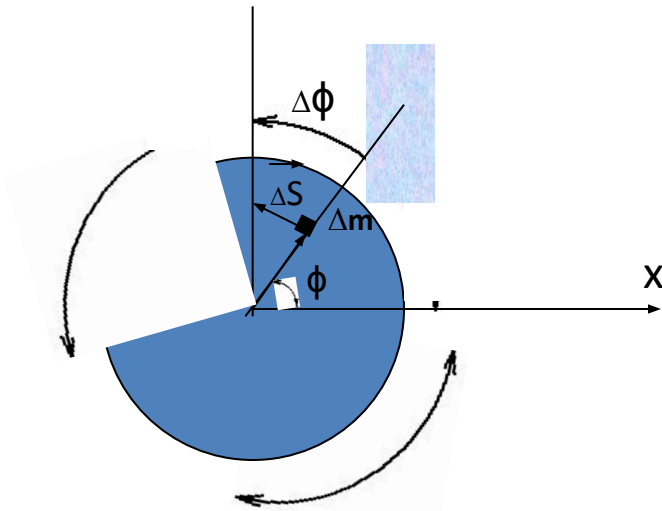


## *Лекция 3*

# Динамика абсолютно твердого тела

Момент импульса. Момент сил. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Штейнера. Уравнения движения и равновесия твердого тела. Энергия движущегося тела. Неинерциальные системы отсчёта

# Вращательное движение твердого тела



## Кинематические параметры

$$\varphi$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

## Связь угловых и линейных параметров

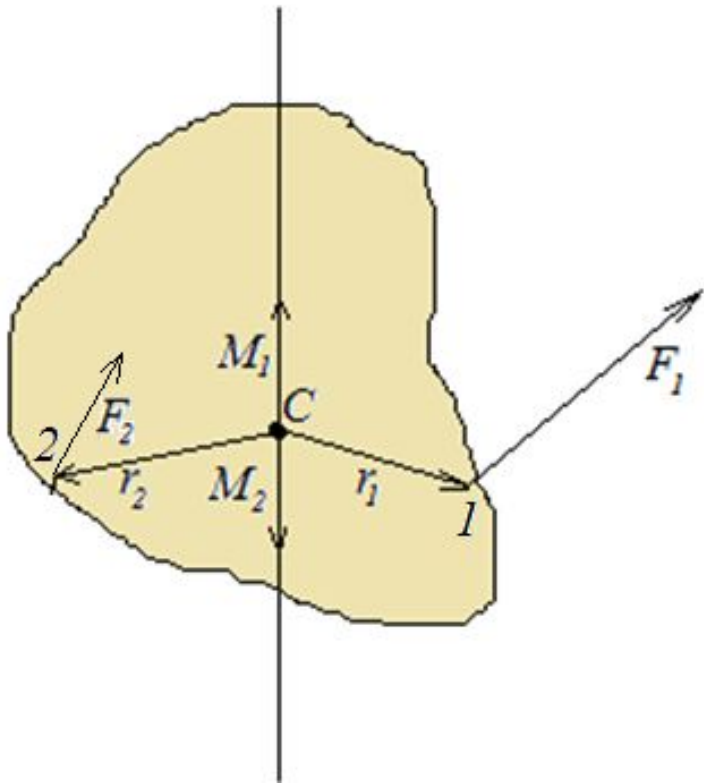
$$dS = R \cdot d\varphi, \quad \overset{\vee}{V} = \left[ \overset{\vee}{\omega} \times R \right]$$

$$\frac{dS}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad V = \omega \cdot R$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad a_\tau = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

$$a_n = \frac{V^2}{R}, \quad a_n = \omega^2 \cdot R$$

# Момент силы



$$\vec{M} = [\vec{F} \cdot \vec{r}]$$

$$\sum \vec{M}_i = \vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2$$

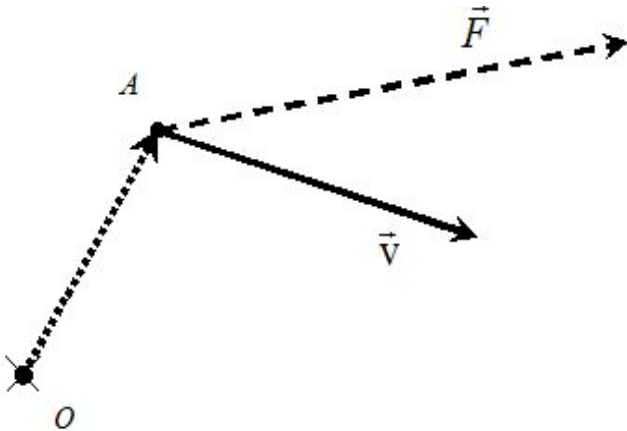
Состояние покоя

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

# Момент импульса

Материальная точка



$$\vec{L} = [\vec{p} \cdot \vec{r}] = m \cdot [\vec{v} \cdot \vec{r}]$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M} = [\vec{F} \cdot \vec{r}] = \left[ \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{r} \right] = \left[ \frac{d(\vec{p} \cdot \vec{r})}{dt} \right] = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

с другой стороны

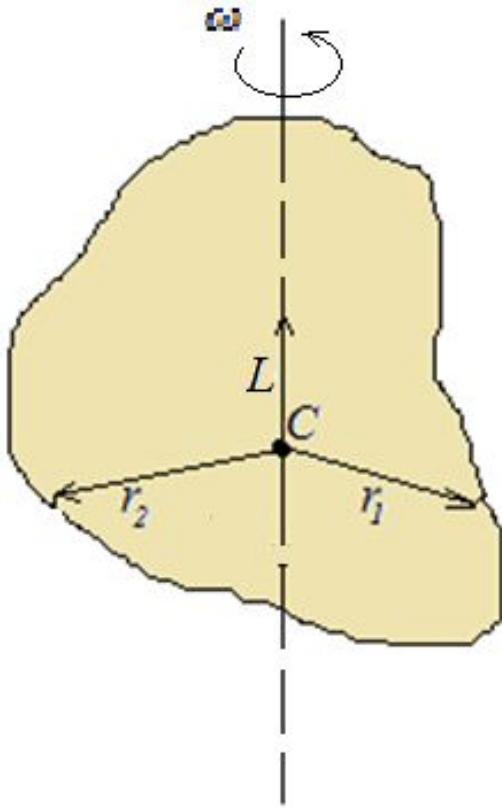
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$$

$$\vec{M} = \frac{d([\vec{p} \cdot \vec{r}])}{dt} = \frac{d([m \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] \cdot \vec{r}])}{dt} = \frac{d(m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega})}{dt} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$m \cdot r^2 = I$  – момент инерции

$$\vec{M} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

# Твёрдое тело



$$L = \sum \vec{L}_i = \left( \sum m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \vec{\omega} = I \cdot \vec{\omega}$$

$$I = \left( \sum m_i \cdot r_i^2 \right)$$

*Момент инерции твердого тела – физическая величина характеризующая массу тела и характер распределения её относительно оси вращения*

$$I = \left( \sum m_i \cdot r_i^2 \right)$$



# Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела







материальная точка

$$E_{\text{к}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} = m \cdot r^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

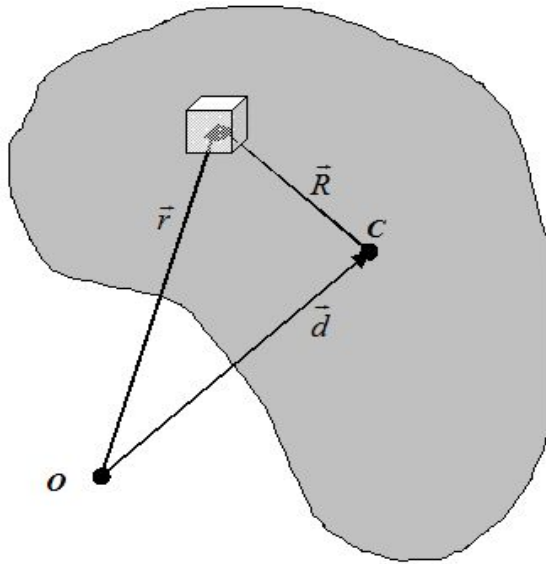
твёрдое тело

$$E_{\text{к}} = \sum E_{\text{к}i} = \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m_i \cdot r_i^2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

# Моменты инерции геометрических тел.

$I_c = \frac{1}{12} ML^2$  <p>Твердый стержень</p>	$I_c = \frac{2}{5} MR^2$  <p>Шар</p>	$I_c = \frac{2}{3} MR^2$  <p>Тонкостенная сферическая оболочка</p>
$I_c = MR^2$  <p>Тонкостенный цилиндр</p>	$I_c = \frac{1}{2} MR^2$  <p>Диск</p>	$I_c = \frac{1}{4} MR^2$  <p>Диск</p>

# Теорема Гюйгенса-Штейнера.



**Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме моменту инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.**

$$I = m \cdot d^2 + I_C$$

**Любой набор взаимодействующих тел именуется *системой тел*.**

Если на тела, входящие в систему, не действуют другие тела, не входящие в эту систему (или действие других тел на каждое тело скомпенсировано), то такая система тел называется ***замкнутой***.

Если суммарный момент сил действующий на систему равен нулю, то такая система также будет ***замкнутой***.

Закон сохранения момента импульса

$$I \cdot \vec{\omega} = L = \text{const}$$

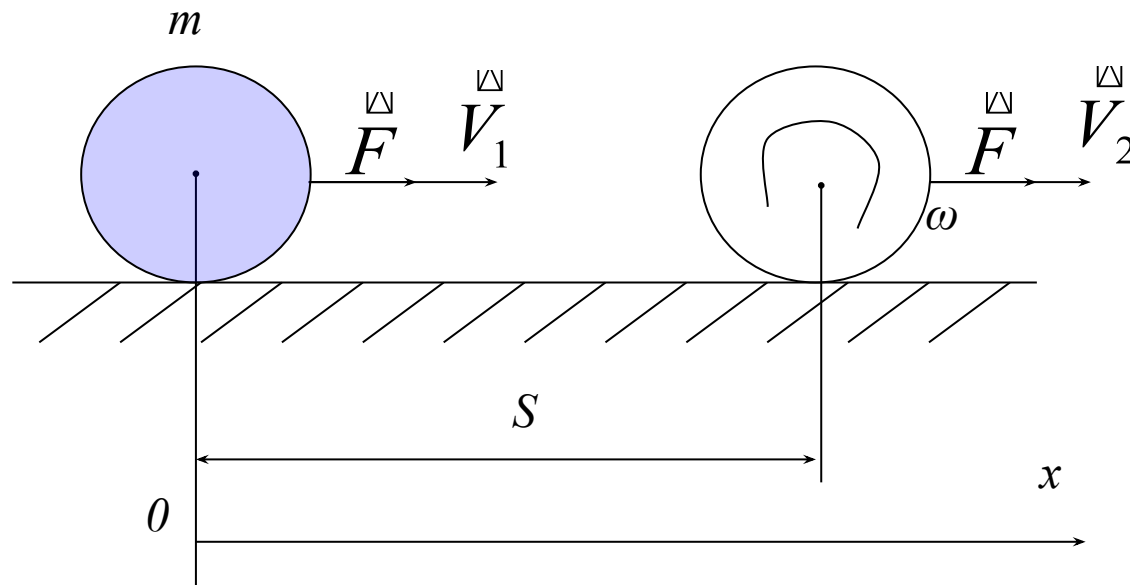
**Момент импульса замкнутой системы всегда остаётся неизменным.**

$$I \cdot \vec{\omega} = \text{const}$$

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

# Энергия движущегося твёрдого тела

Качение по плоскости без проскальзывания (плоское движение)



$$E = E_k = E_k^{\text{пост}} + E_k^{\text{вращ}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$