

Пространственная система сил

Кинематика точки

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

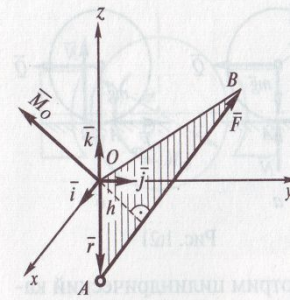


Рис. 1.22

Пространственной будем называть **систему сил**, линии действия которых имеют любые направления в пространстве.

Вектором момента силы F относительно некоторого центра **O** называется векторное произведение радиуса-вектора **r** точки приложения силы, проведенного из этого центра, на вектор силы.

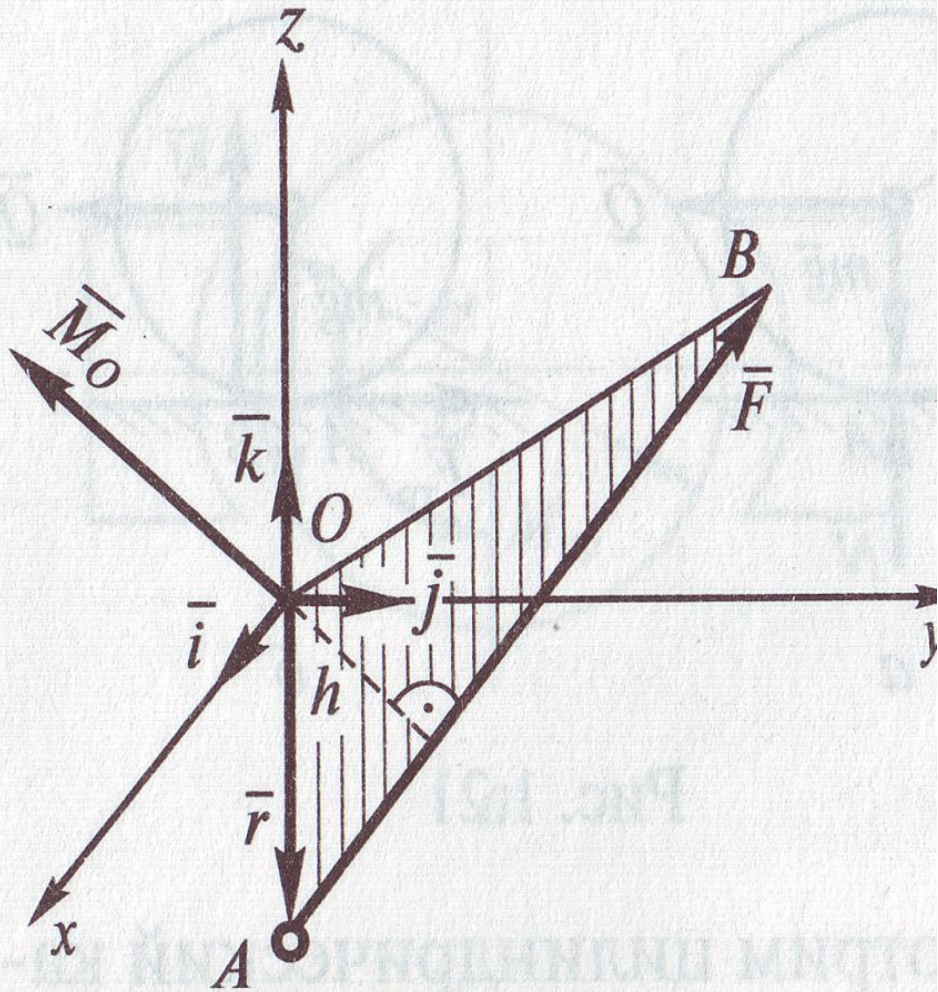
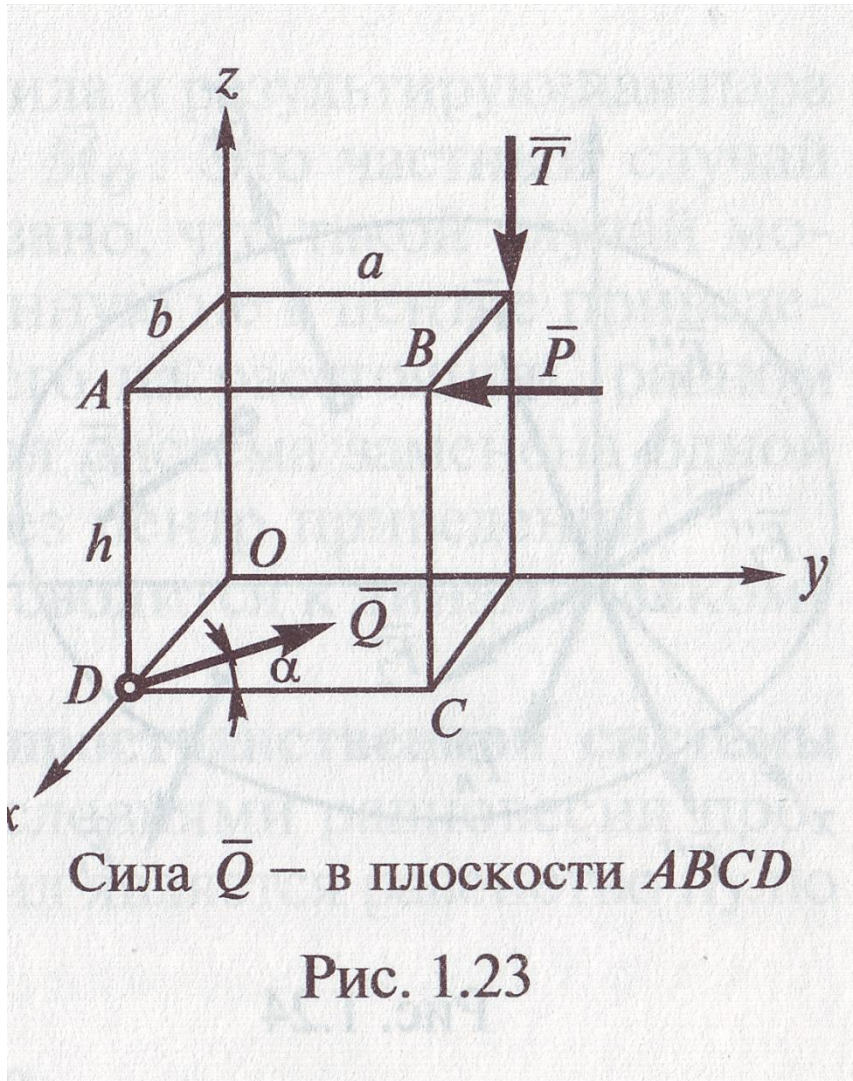


Рис. 1.22

- В соответствии с определением
- $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \text{mom}_O(F)$
-
- $M_O = hF = rF \sin(\angle r, F) = 2 \text{ площ. } \triangle OAB$

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ



Определить \bar{M}
моменты сил \bar{Q} ,
 \bar{T} , \bar{P}
относительно
осей координат,
если известны
точки
приложения этих
сил.

РЕШЕНИЕ:

1. Определяем моменты силы \bar{T} относительно осей координат:

- $\text{mom}_x(\bar{T}) = -\bar{T}a$;
- $\text{mom}_y(\bar{T}) = 0$ (так как сила \bar{T} пересекает ось Oy)
- $\text{mom}_z(\bar{T}) = 0$ (так как сила \bar{T} параллельна оси Oz).

2. Определяем моменты силы \bar{P} относительно осей координат:

- $\text{mom}_x(\bar{P}) = +\bar{P}h$;
- $\text{mom}_y(\bar{P}) = 0$ ((так как сила \bar{T} параллельна оси Oy)
- $\text{mom}_z(\bar{P}) = -\bar{P}b$.

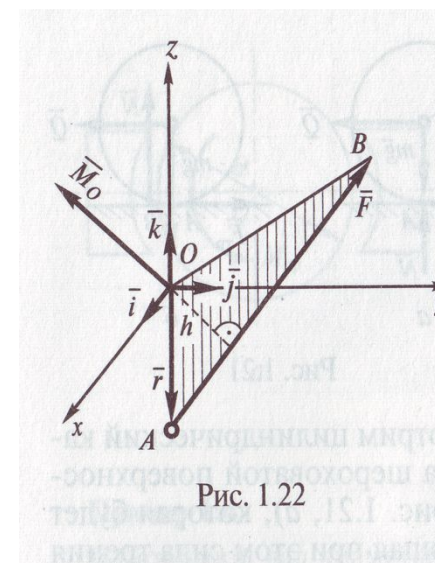
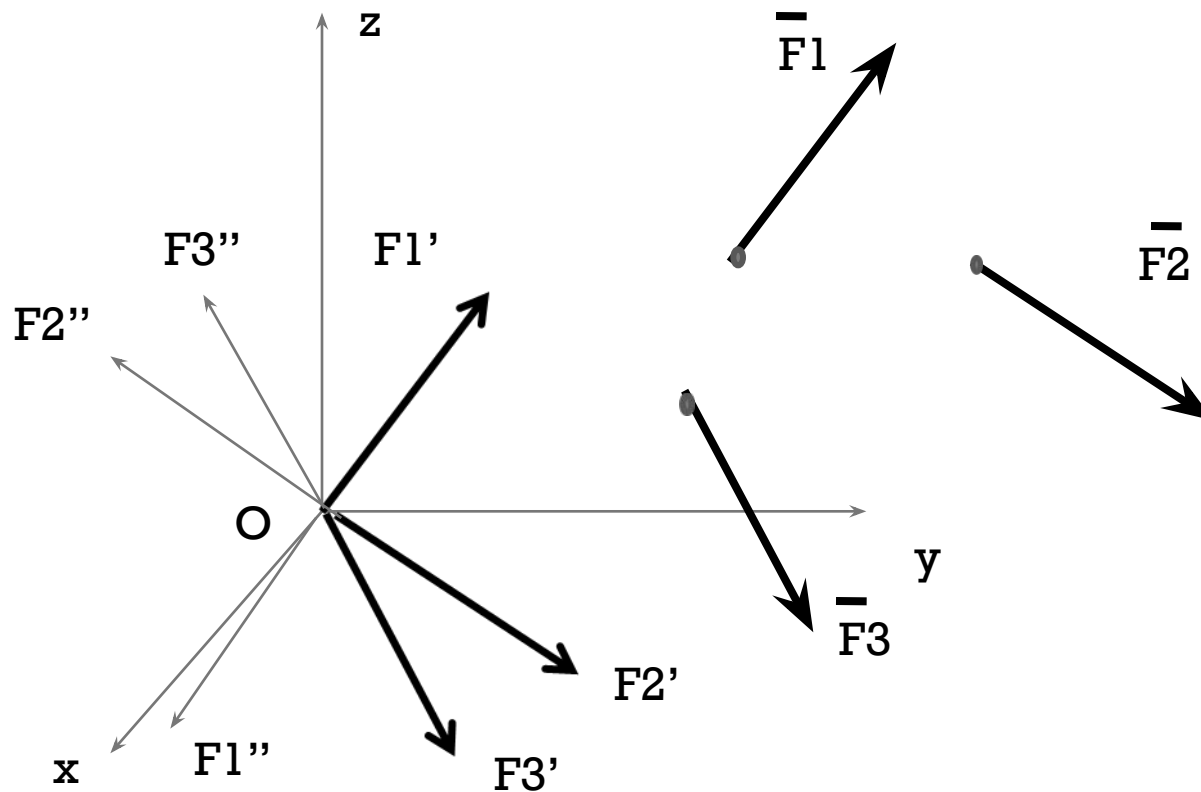
3. Вычисляем моменты силы \bar{Q} относительно осей координат:

- $\text{mom}_x(\bar{Q}) = 0$; (так как сила \bar{Q} пересекает ось Ox)
- $\text{mom}_y(\bar{Q}) = -(\bar{Q} \sin \alpha)b$;
- $\text{mom}_z(\bar{Q}) = +(\bar{Q} \cos \alpha)b$.

ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ

• Пространственная система сил, действующих на АТТ, может быть заменена одной силой \bar{R} , равной сумме всех действующих сил, приложенных в произвольно выбранном центре O , и вектором-моментом \bar{M}_O , равным геометрической сумме моментов всех сил относительно центра приведения.

На АТТ действует пространственная произвольная система сил. В качестве центра – точка O . Приложим к этой точке уравновешенную систему сил.



Заменяем действующую систему пространственных сходящихся сил равнодействующей $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_2' + \mathbf{F}_3'$.

Вычислим моменты всех оставшихся сил относительно центра приведения O . Моменты сил \mathbf{F}_1'' , \mathbf{F}_2'' , \mathbf{F}_3'' относительно центра O равны 0.

Векторы-моменты заданных сил относительно центра приведения будут равны:

$$\overline{mom}_O(\mathbf{F}_1) = \overline{m}_1;$$

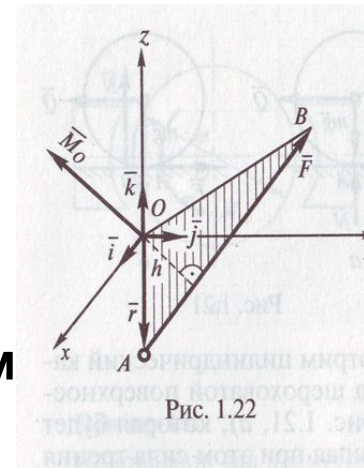
$$\overline{mom}_O(\mathbf{F}_2) = \overline{m}_2;$$

$$\overline{mom}_O(\mathbf{F}_3) = \overline{m}_3.$$

Найдем геометрическую сумму моментов и получим главный вектор-момент \mathbf{M}_O .

$$\mathbf{M}_O = \sum mom_O(\mathbf{F}_i) = \sum \overline{m}_i$$

На тело действует одна результирующая сила \mathbf{R} и один результирующий момент \mathbf{M}_O



АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА

**Определяем главный вектор и
главный момент аналитически,
находя проекции всех сил на оси z,
y, x.**

$$R_x = \sum F_{ix}; \quad R_y = \sum F_{iy}; \quad R_z = \sum F_{iz};$$

$$M_x = \sum m_{ix}; \quad M_y = \sum m_{iy}; \quad M_z = \sum m_{iz}.$$

АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

$$\mathbf{R}=\mathbf{0}; \mathbf{M}_o = \mathbf{0}$$

Поскольку $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0,$

то R_x, R_y, R_z должны быть равны нулю.

$$\Sigma F_{ix} = 0; \Sigma F_{iy} = 0; \Sigma F_{iz} = 0$$

$$\Sigma \text{mom}_x(F_i) = 0; \Sigma \text{mom}_y(F_i) = 0; \Sigma \text{mom}_z(F_i) = 0;$$

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

- Момент силы относительно точки как вектор
- Момент силы относительно точки в пространстве определяем как векторную величину в виде векторного произведения, где \vec{r} - радиус-вектор, проведённый из точки O в точку приложения силы \vec{F} (рис. 1.24).
- Итак, вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ направлен перпендикулярно к плоскости, содержащей линию действия силы и точку O , так что с его конца вращение силы вокруг точки видно происходящим против часовой стрелки. Модуль вектора равен произведению модуля силы на расстояние от данной точки до линии действия силы (плечо силы), т.е.

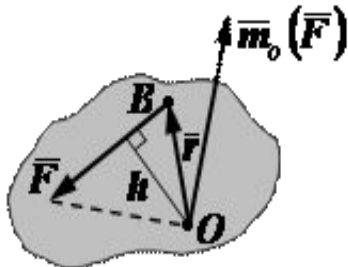
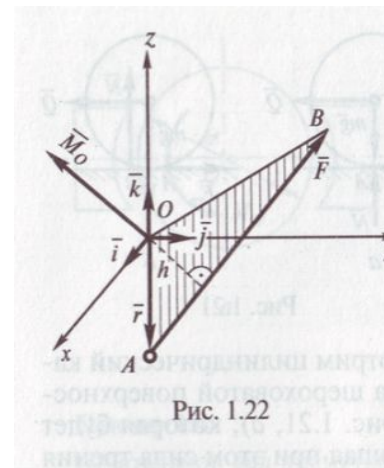


Рис. 1.24

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{M}_O(\vec{F})| = F \cdot h$$

- Известно, что всякий вектор можно разложить по осям координат:
- $\vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей координат Ox, Oy, Oz .
- Также раскладываем по осям координат радиус-вектор \vec{r} точки приложения силы и силу \vec{F} :
- $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$.
- Перемножив \vec{r} на \vec{F} , получим:
- $\vec{M}_O = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$.
- $M_x = yF_z - zF_y$; $M_y = zF_x - xF_z$; $M_z = xF_y - yF_x$.



МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

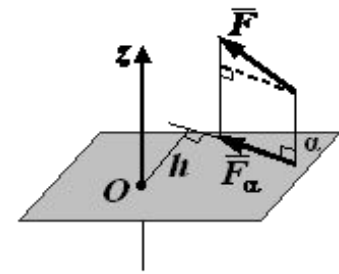


Рис. 1.25

- Моментом силы \mathbf{F} относительно оси \mathbf{z} (рис. 1.25), называется алгебраическая величина, абсолютное значение которой равняется произведению модуля проекции силы \mathbf{F}_α на плоскость α , перпендикулярную к оси \mathbf{z} , на расстояние h от точки пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы на плоскость, т.е. .
- Знак "**плюс**" - если направление вращения силы вокруг точки с конца оси видно происходящим против часовой стрелки, если по часовой стрелке, то знак "**минус**".
- Очевидно, что момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

- В случае пространственной системы сил главным моментом относительно точки называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно той же точки:

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \bar{F}_i$$

Главным моментом пространственной системы сил относительно оси называется сумма моментов всех сил системы относительно этой оси:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_x(\bar{F}_i)$$

Зная главные моменты системы сил относительно осей декартовых координат, можно вычислить модуль главного момента относительно начала координат и его направляющие косинусы

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos(\bar{i}, \hat{M}_o) = \frac{M_x}{M_o}$$

$$\cos(\bar{j}, \hat{M}_o) = \frac{M_y}{M_o}$$

$$\cos(\bar{k}, \hat{M}_o) = \frac{M_z}{M_o}$$

РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

- Для равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех слагаемых сил на произвольно выбранные оси декартовых координат x, y, z и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю:

- $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$; $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$; $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$;
- $\sum_{i=1}^n m_x(F_i) = 0$; $\sum_{i=1}^n m_y(F_i) = 0$; $\sum_{i=1}^n m_z(F_i) = 0$

- В случае произвольной пространственной системы сил задача является статически определенной, если число алгебраических неизвестных не более шести.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1. Какие силы называются пространственными?
- 2. Как определяется вектор момента силы F , расположенной в пространстве, относительно точки O ?
- 3. Как определить главный вектор и главный момент пространственной системы сил аналитически?

Задача 4. Определить моменты сил Q , T , P относительно осей координат x, y, z , если известны точки приложения этих сил.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика – это раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения вне связи с силами, вызывающими это движение.

Механическое движение – простейшая форма движения. Система отсчета может быть подвижной или неподвижной.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Траектория – линия движения.

Естественный способ, если известны:

- 1) траектория точки;
- 2) зависимость изменения длины дуги от времени $\overline{OM}=S=f(t)$ – **уравнение движения материальной точки;**
- 3) начало движения;
- 4) начало отсчета;
- 5) направление отсчета.

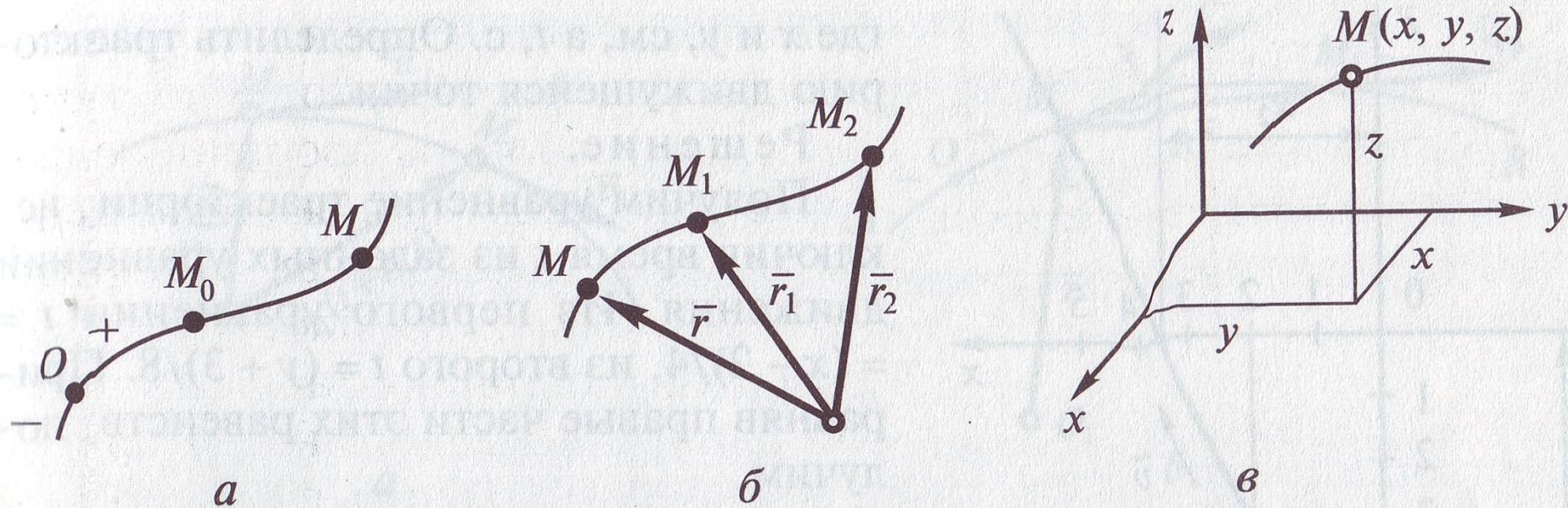


Рис. 1.30

- **Векторный способ задания движения : $\vec{r} = \vec{r}(t)$.**
 Положение точки определяется радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из центра **O** в точку **M**.
- Положение точки определяется **Годографом**.

КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Должны быть известны зависимости, показывающие изменения во времени координаты в пространстве:

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t); \quad z=f_3(t).$$

Движения точки в декартовых координатах.

Если точка движется на плоскости, то ее положение описывается двумя уравнениями:

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t).$$

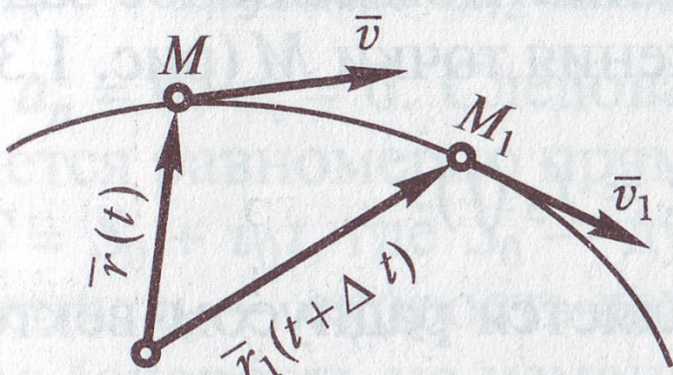
Если по прямой, то $x=f(t);$

СКОРОСТЬ ТОЧКИ

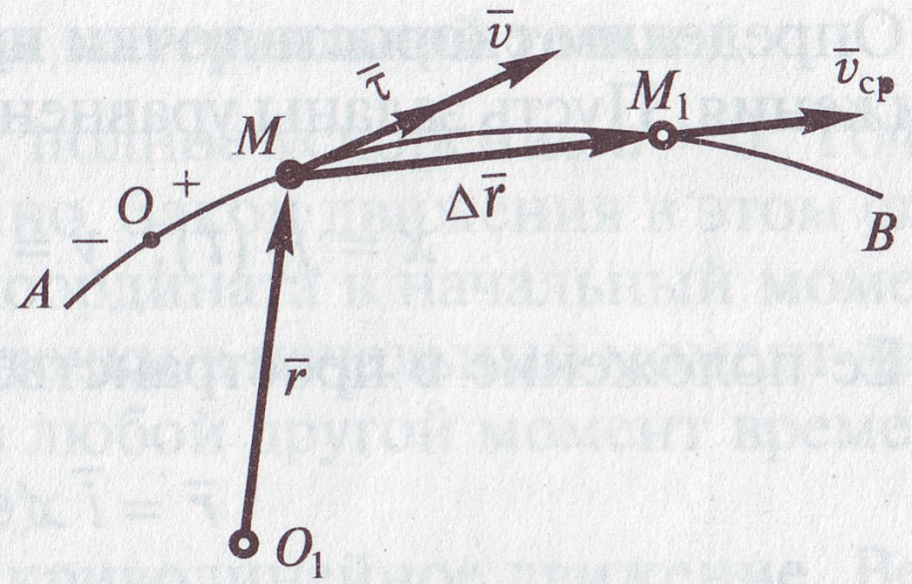
Скорость характеризует быстроту и направление движения точки.

Поскольку \vec{v} - это производная $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения материальной точки.

$$\vec{V} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



a

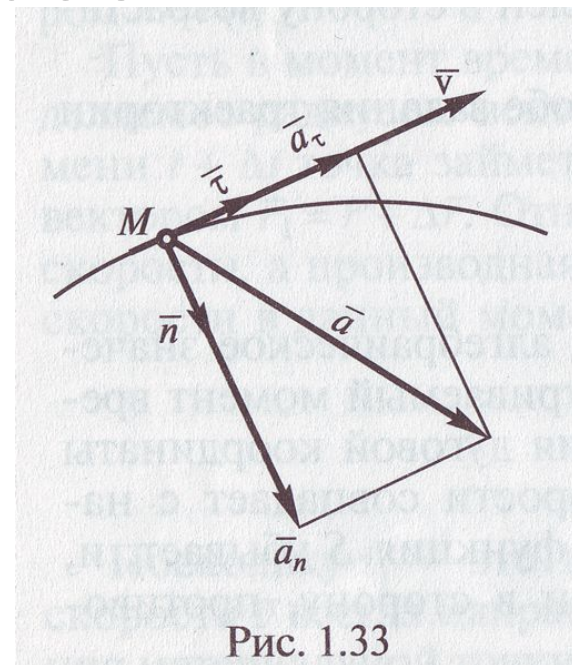


б

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Ускорение точки – векторная величина, характеризующая быстроту изменения с течением времени вектора скорости:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



При естественном способе задания траектории движения материальной точки ее вектор ускорения можно разложить по естественным осям координат T и n .

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{T} + a_n \mathbf{n}.$$

Проекция ускорения на орт T называется ***касательным ускорением***, которое характеризует быстроту изменения модуля скорости. Касательное ускорение существует только при неравномерном криволинейном движении.

Нормальное ускорение \vec{a}_n показывает изменение направления вектора скорости, когда материальная точка движется по криволинейной траектории.

