

# Динамические характеристики инжекционных лазеров.

## Модуляция излучения током накачки

Вернемся к системе уравнений, описывающей баланс концентрации носителей и плотности фотонов

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{ef} \gamma - \frac{n}{\tau_s} - \sum_m r_{st}(n, \omega_m) S_m$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \Gamma r_{st}(n, \omega_m) S_m - \frac{S_m}{\tau_p} + \Gamma \beta (Bn^2)$$

# Задержка включения лазера

Рассмотрим реакцию лазера на резкое включение тока накачки:

$$J(t=0) = 0 \quad \text{и} \quad J(t>0) > J_{\text{пор}} \quad \longrightarrow$$

Возьмем одно из уравнений баланса (для носителей):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{ef} \gamma - \frac{n}{\tau_s} - \nu \sum_l g(n, \omega_l) S_l$$

(пренебрегаем стимулированным излучением, т.к. в основном мы интересуемся ситуацией ниже порога генерации)

Решение этого «укороченного» уравнения:

$$n = \frac{J \gamma \tau_s}{ef} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right) \right)$$

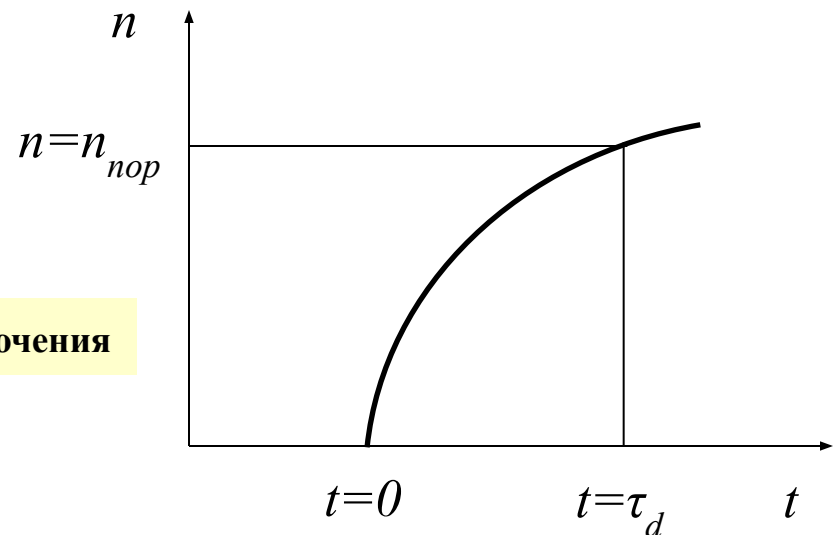
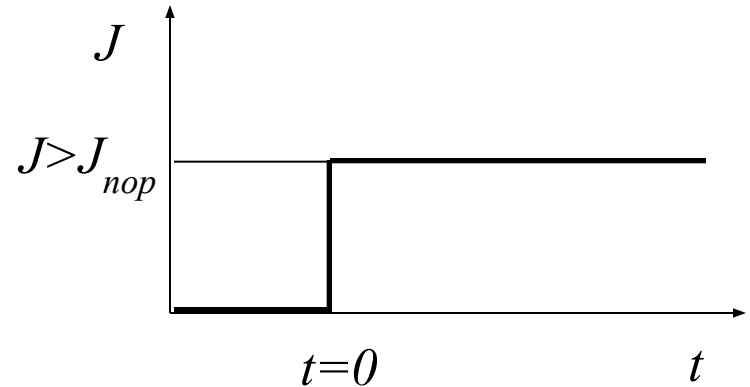
Включение произойдет, когда концентрация  $n$  достигнет порогового уровня, т.е. при  $n = n_{\text{пор}}$

$$n_{\text{пор}} = \frac{J \gamma \tau_s}{ef} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_d}{\tau_s}\right) \right)$$

$t_d$  - время задержки включения

Окончательно получаем:

$$t_d = -\tau_s \ln \frac{J - J_{\text{пор}}}{J}$$



# Оценка времени задержки включения и важные практические следствия из этого

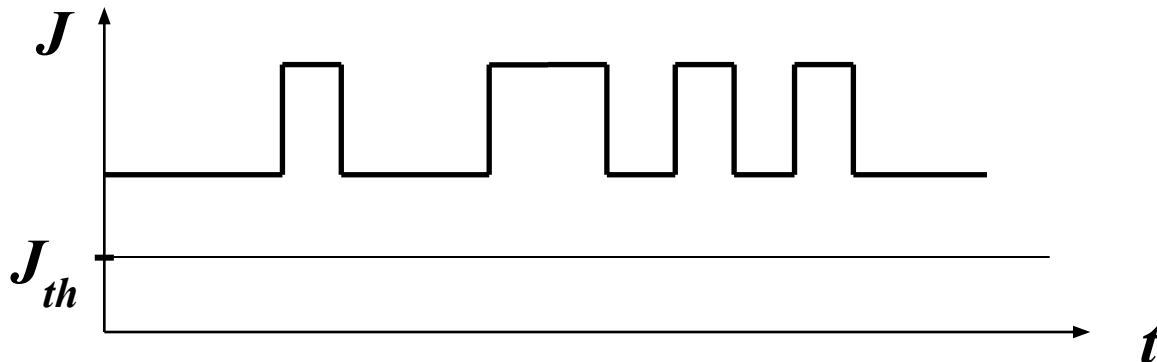
## Оценим время задержки включения:

Возьмем:  $\tau_s = 10^{-9}$  сек - время спонтанной рекомбинации;  
 $J = 2 J_{th}$  - двойное превышение порога генерации

$$\tau_d = -\tau_s \ln \frac{J - J_{th}}{J} = -10^{-9} \ln \frac{1}{2} = 0,7 \times 10^{-9} \text{ сек}$$

Это очень большая задержка, т.к. обычно лазеры должны передавать сигналы (оптические импульсы) длительностью  $\sim 100$  псек ( $10^{-10}$  сек) и меньше !

Поэтому практически при передаче информационных оптических импульсов лазеры накачиваются так, что «нулевой» уровень тока накачки устанавливается **ВЫШЕ** порога генерации лазера:



Тогда задержки нет и оптические импульсы передаются почти без искажений.

# Малосигнальный анализ скоростных уравнений

Рассмотрим систему скоростных уравнений, для простоты в одномодовом приближении:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{ef} - \frac{n}{\tau_s} - \nu g(n) S$$
$$\frac{dS}{dt} = \Gamma \nu g(n) S - \frac{S}{\tau_p} + \Gamma \beta \frac{n}{\tau_s}$$

Здесь и в дальнейшем мы для простоты положим  $\gamma \approx 1$

( $n/\tau_s \approx \nu n^2$  - приближение времени жизни)

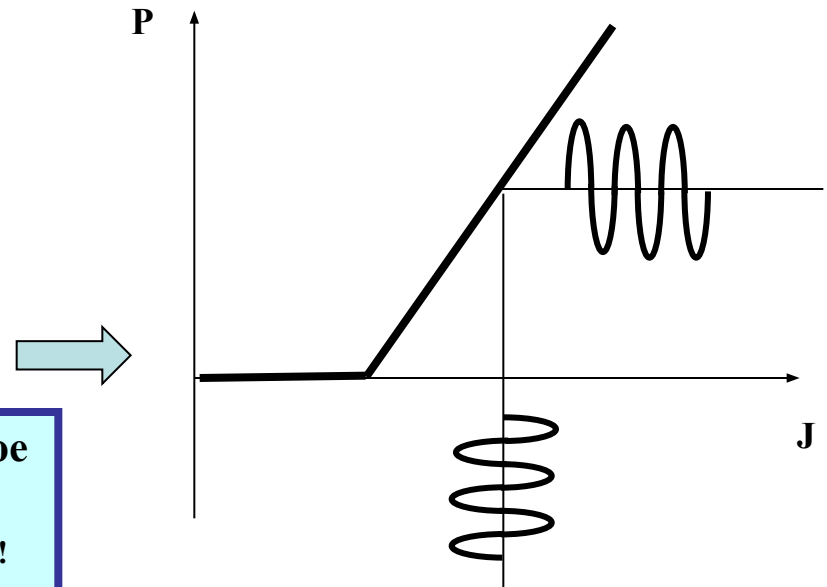
Предположим, что ток накачки мы модулируем по закону:  $J(t) = J_0 + \delta J(t)$   $\delta J(t) \ll J_0$

Мы можем ожидать, что отклик будет иметь вид:

$$n(t) = n_0 + \delta n(t) \quad \text{где} \quad \delta n(t) \ll n_0$$
$$S(t) = S_0 + \delta S(t) \quad \text{где} \quad \delta S(t) \ll S_0$$

Здесь  $n_0$  и  $S_0$  - есть решения стационарных уравнений при токе накачки  $J_0 = \text{const}$

**В любой динамической системе отклик на малое возмущение должен быть малым (и линейным, т.е. воспроизводить вид функции возмущения) !**



# Линейзация скоростных уравнений

Проще иметь дело с линейными системами дифференциальных уравнений.

Чтобы наша система уравнений стала линейной, надо поработать с функцией  $g(n)$ .

Запишем:

$$g(n) = g(n_0 + \delta n) = g_0 + g' \delta n \quad \text{где } g_0 = g(n_0) \text{ и } g' = \partial g / \partial n \text{ - называется}$$

**“дифференциальным усилением”**

Тогда для произведения  $gS$  имеем:

$$g S = (g_0 + g' \delta n)(S_0 + \delta S) = g_0 S_0 + g_0 \delta S + g' S_0 \delta n + \dots$$

Теперь подставим  $J(t) = J_0 + \delta J(t)$ ,  $n(t) = n_0 + \delta n(t)$  и  $S(t) = S_0 + \delta S(t)$  в скоростные уравнения и получим:

$$\delta \dot{J} = \frac{\delta J}{e f} - \frac{\delta n}{\tau_s} - v (g_0 \delta S + g' S_0 \delta n) \qquad \delta \dot{J} = \frac{d[\delta n(t)]}{d t}$$
$$\delta \dot{S} = \Gamma v (g_0 \delta S + g' S_0 \delta n) - \frac{\delta S}{\tau_p} + \Gamma \beta \frac{\delta n}{\tau_s} \qquad \delta \dot{S} = \frac{d[\delta n(t)]}{d t}$$

- это линейная система по переменным  $\delta n$  и  $\delta S$

# Гармоническая модуляция тока накачки

Рассмотрим случай гармонической (синусоидальной) модуляции тока накачки.

При этом обычно используют метод комплексных амплитуд:

$$\delta J(t) = j e^{i\omega t}, \quad (j = \text{const}), \quad \text{где } \omega \text{ — частота модуляции}$$

Поскольку отклик любой системы на малое возмущение должен быть линейным, мы должны получить:

$$\delta n = a(\omega) e^{i\omega t}, \quad \delta S = b(\omega) e^{i\omega t}$$

где  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$  это **комплексные амплитуды отклика**

Подставляя все это в нашу систему уравнений получаем:

$$\begin{cases} \left( i\omega + \frac{1}{\tau_s} + \nu g' S_0 \right) a(\omega) + \nu g_0 b(\omega) = \frac{j}{ef} \\ - \left( \Gamma \nu g' S_0 + \Gamma \frac{\beta}{\tau_s} \right) a(\omega) + \left( i\omega + \frac{1}{\tau_p} - \Gamma \nu g_0 \right) b(\omega) = 0 \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$

# Гармонический отклик плотности электронов, $n(\omega)$

Решим систему алгебраических уравнений относительно  $a(\omega)$ :

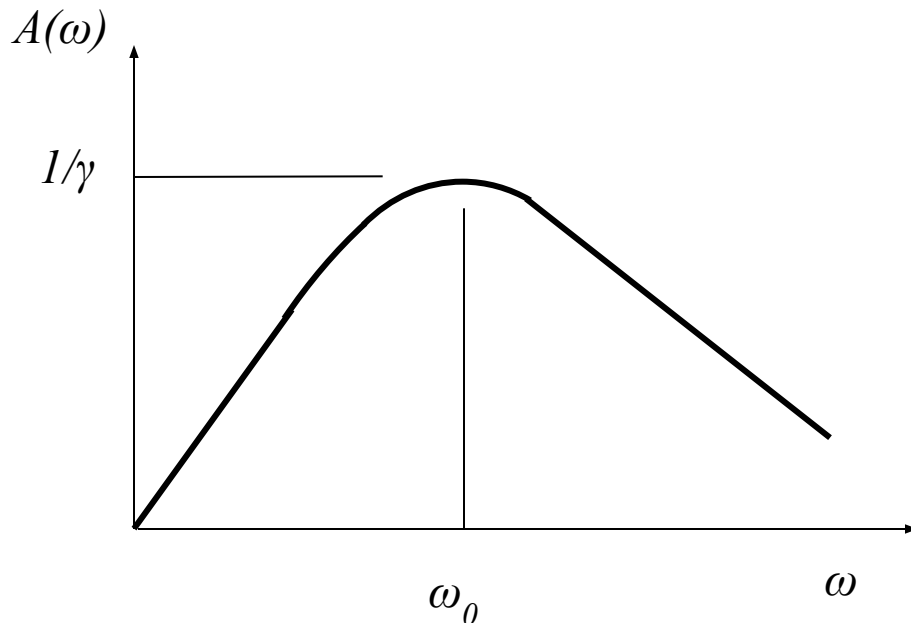
$$a(\omega) \approx \frac{j}{ef} \frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma i\omega} = \frac{j}{ef} \underbrace{\frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}}_{= A(\omega)} \exp i \left[ \underbrace{\arctg\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \frac{\pi}{2}}_{= \varphi_a(\omega)} \right]$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\nu g' S_0}{\tau_p}} \quad \text{- резонансная частота}$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_s} + \nu g' S_0 \quad \text{- параметр затухания}$$

График частотной зависимости  $A(\omega)$  :



## Свойства функции $A(\omega)$ :

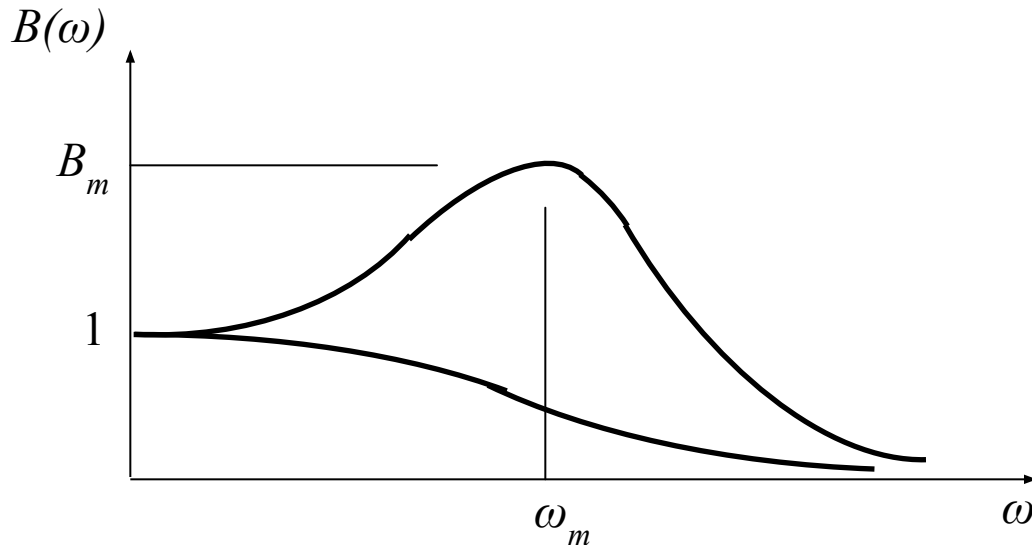
1. При  $\omega \rightarrow 0$   $A(\omega) \rightarrow 0$   
потому что в статическом режиме концентрация насыщена за порогом!
2.  $A(\omega)$  достигает максимума точно на  $\omega_0$   
потому  $\omega_0$  называется резонансной частотой
3. Макс. значение функции  $A(\omega)$  есть  $1/\gamma$ ,  
потому  $\gamma$  называется параметром затухания.

# Гармонический отклик плотности фотонов, $b(\omega)$

Решим систему алгебраических уравнений относительно  $b(\omega)$ :

$$b(\omega) \approx \frac{j\Gamma\tau_p}{ef} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma i\omega} = \frac{j\Gamma\tau_p}{ef} \underbrace{\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}}_{= B(\omega)} \exp i \left[ \underbrace{\arctg\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}_{= \varphi_b(\omega)} \right]$$

График частотной зависимости  $B(\omega)$  :



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\nu g' S_0}{\tau_p}} \quad \text{- резонансная частота}$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_s} + \nu g' S_0 \quad \text{- параметр затухания}$$

— Малое затухание  
 $\gamma < \sqrt{2} \omega_0$

— Большое затухание  
 $\gamma > \sqrt{2} \omega_0$

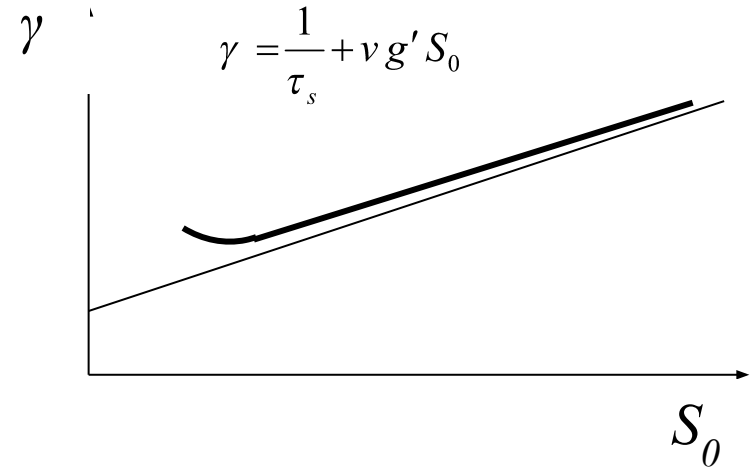
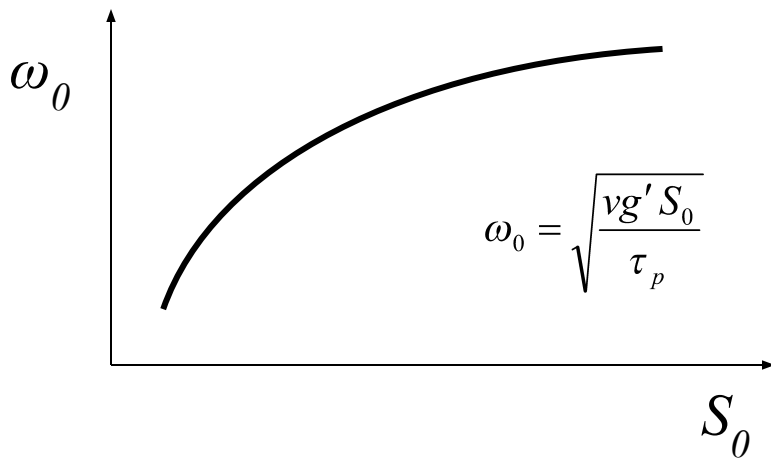
$$B_m = \frac{\omega_0}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}}$$

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}}$$



# Зависимость параметров $\omega_0$ и $\gamma$ от стационарной плотности фотонов $S_0$

Однако параметры  $\omega_0$  и  $\gamma$  не являются независимыми, они оба зависят от  $S_0$ :



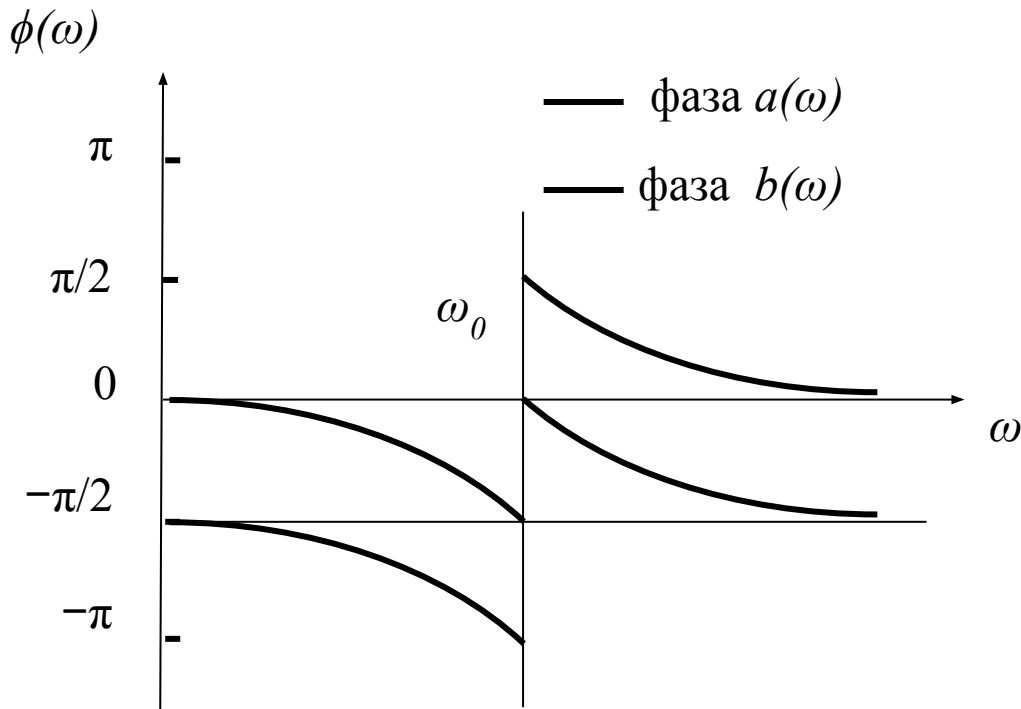
Важно, что выражения для  $\omega_0$  и  $\gamma$  *приближенные*, они верны для не слишком малых величин  $S_0$

Обычно вводится понятие граничной частоты модуляции ( $\omega_{gp}$ ). Это частота при которой  $B(\omega)=1/2$ . Можно показать, что:

$$\omega_{gp} \approx \sqrt{3} \omega_m$$

**В хороших инжекционных лазерах, которые используются в системах оптической связи,  $f_{gp} > 10$  GHz !**

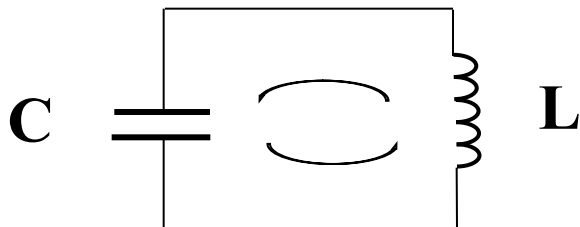
# Частотные зависимости фаз $a(\omega)$ и $b(\omega)$



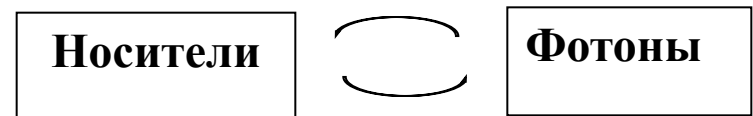
$$\varphi_a(\omega) = \left[ \operatorname{arctg}\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\varphi_b(\omega) = \left[ \operatorname{arctg}\left(-\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \right]$$

Такое же поведение фаз мы имеем в колебательном контуре:



В нашем случае резонансное поведение определяется перераспределением энергии между носителями и фотонами:



# Эквивалентная схема инжекционного лазера

Вернемся к исходной системе уравнений:

$$\delta \mathbb{M} = \frac{\delta J}{ef} - \frac{\delta n}{\tau_s} - v g_0 \delta S - v g' S_0 \delta n \quad (*)$$

$$\delta \mathbb{S} = \Gamma v (g_0 \delta S + g' S_0 \delta n) - \frac{\delta S}{\tau_p} + \Gamma \beta \frac{\delta n}{\tau_s} \quad (**)$$

Подставляя (\*\*\*) в (\*) получаем:

$$\frac{\delta J}{ef} = i\omega \delta n + \gamma \delta n + v g_0 \frac{\Gamma v g' S_0}{i\omega} \delta n$$

Найдем связь между  $\delta n$  и  $\delta V$  исходя из обычного выражения для р-п перехода:

$$n = n_0 \left[ \exp\left(\frac{eV}{bkT}\right) - 1 \right] \Rightarrow \delta n \approx \frac{en}{bkT} \delta V$$

$$\delta J = \underbrace{\frac{e^2 f n}{bkT} \gamma}_{R^{-1}} \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{bkT} (i\omega)}_C \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{bkT} (\Gamma v^2 g_0 g' S_0)}_L \frac{1}{i\omega} \delta V$$

Имеем параллельное соединение сопротивления, емкости и индуктивности!

Наши обозначения:

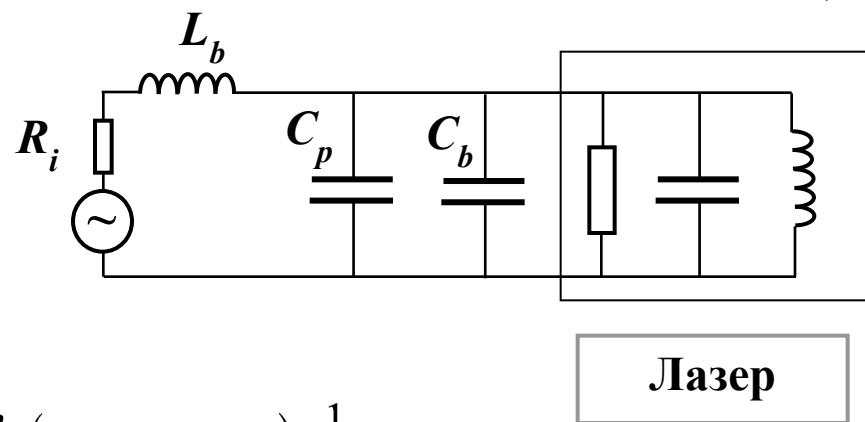
$$\delta \mathbb{M} = i\omega \delta n \quad \delta \mathbb{S} = i\omega \delta S$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_s} + v g' S_0$$

Из (\*\*\*) получим:

$$\delta S = \frac{\Gamma v g' S_0 \delta n}{i\omega - \left( \frac{1}{\tau_p} - \Gamma v g_0 \right)} \quad (***)$$

(за порогом это малая величина)



# Свободные колебания в системе «носители-фотоны» (релаксационные колебания)

**Вопрос:** Какой будет реакция излучения лазера на небольшую по амплитуде «ступеньку» тока накачки?  
( $\delta J \ll J$ )

**Важно:** после прохождения «ступеньки», т.е. при  $t > 0$ , ток не меняется во времени

Для нахождения отклика вернемся к исходной системе, но без вынуждающей силы, т.е. положим  $j=0$ :

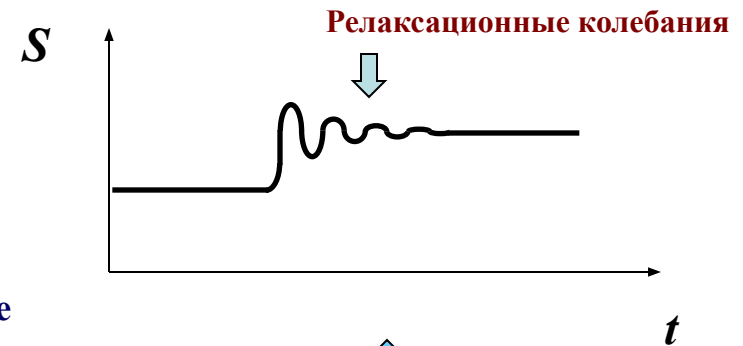
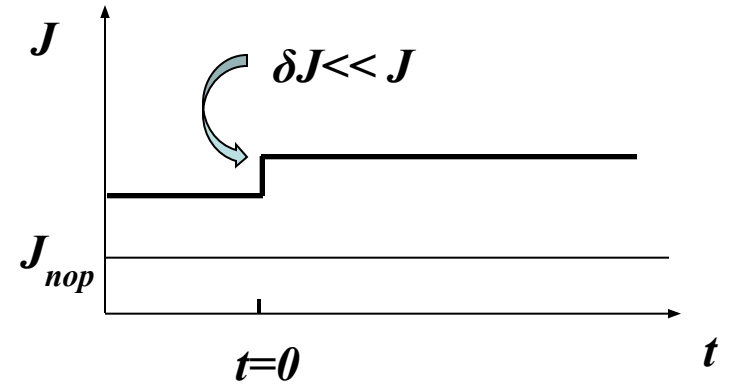
$$\begin{cases} \left( i\omega + \frac{1}{\tau_s} + \nu g' S_0 \right) a(\omega) + \nu g_0 b(\omega) = 0 \\ - \left( \Gamma \nu g' S_0 + \Gamma \frac{\beta}{\tau_s} \right) a(\omega) + \left( i\omega + \frac{1}{\tau_p} - \Gamma \nu g_0 \right) b(\omega) = 0 \end{cases}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение имеет вид:

$$a(\omega), b(\omega) \propto e^{\lambda t}$$

где  $\lambda$  есть корень характеристического уравнения, которое получатся из уравнения  $\det=0$  заменой  $i\omega \rightarrow \lambda$ :

$$\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}$$



Отклик имеет вид колебаний, которые происходят на резонансной частоте и затухают с инкрементом  $\gamma/2$

# Эквивалентная схема инжекционного лазера

Вернемся к исходной системе уравнений:

$$\delta \mathbb{J} = \frac{\delta J}{ef} - \frac{\delta n}{\tau_s} - v g_0 \delta S - v g' S_0 \delta n \quad (*)$$

$$\delta \mathbb{S} = \Gamma v (g_0 \delta S + g' S_0 \delta n) - \frac{\delta S}{\tau_p} + \Gamma \beta \frac{\delta n}{\tau_s} \quad (**)$$

Подставляя (\*\*\*) в (\*) получаем:

$$\frac{\delta J}{ef} = i\omega \delta n + \gamma \delta n + v g_0 \frac{\Gamma v g' S_0}{i\omega} \delta n$$

Найдем связь между  $\delta n$  и  $\delta V$  исходя из обычного выражения для р-п перехода:

$$n = n_0 \left[ \exp\left(\frac{eV}{bkT}\right) - 1 \right] \Rightarrow \delta n \approx \frac{en}{bkT} \delta V$$

$$\delta J = \underbrace{\frac{e^2 f n}{bkT} \gamma}_{R^{-1}} \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{bkT} (i\omega)}_C \delta V + \underbrace{\frac{e^2 f n}{bkT} (\Gamma v^2 g_0 g' S_0)}_L \frac{1}{i\omega} \delta V$$

Имеем параллельное соединение сопротивления, емкости и индуктивности!

Наши обозначения:

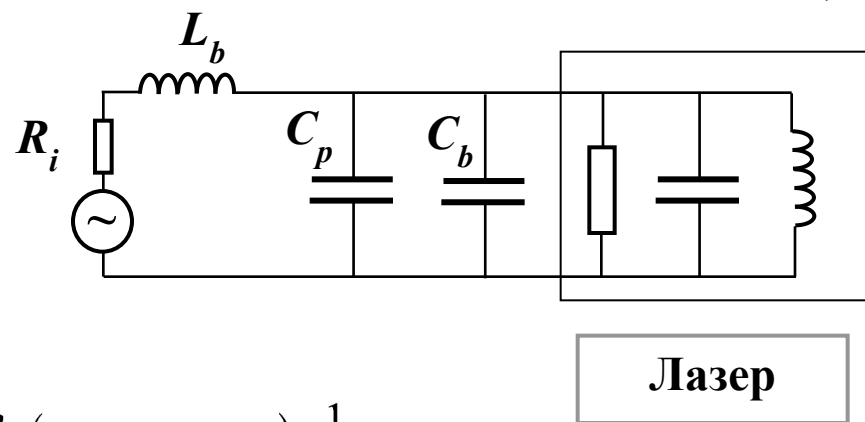
$$\delta \mathbb{J} = i\omega \delta n \quad \delta \mathbb{S} = i\omega \delta S$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_s} + v g' S_0$$

Из (\*\*\*) получим:

$$\delta S = \frac{\Gamma v g' S_0 \delta n}{i\omega - \left( \frac{1}{\tau_p} - \Gamma v g_0 \right)} \quad (***)$$

(за порогом это малая величина)



# Свободные колебания в системе «носители-фотоны» (релаксационные колебания)

**Вопрос:** Какой будет реакция излучения лазера на небольшую по амплитуде «ступеньку» тока накачки?  
( $\delta J \ll J$ )

**Важно:** после прохождения «ступеньки», т.е. при  $t > 0$ , ток не меняется во времени

Для нахождения отклика вернемся к исходной системе, но без вынуждающей силы, т.е. положим  $j=0$ :

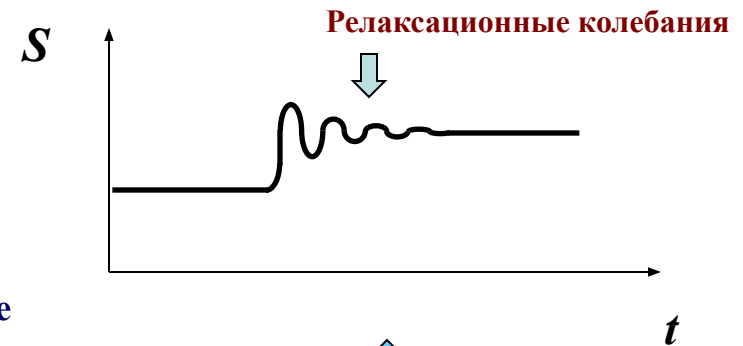
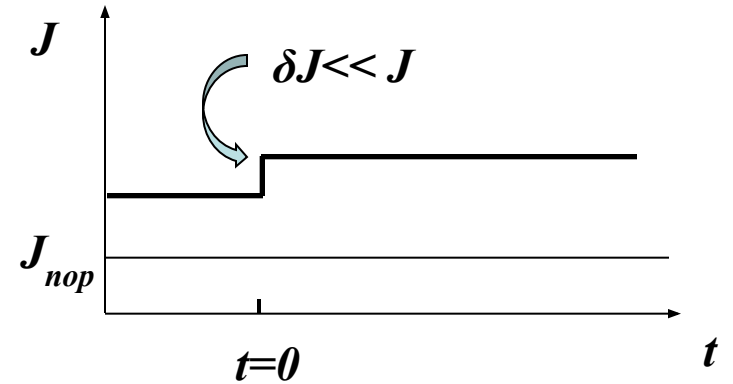
$$\begin{cases} \left( i\omega + \frac{1}{\tau_s} + \nu g' S_0 \right) a(\omega) + \nu g_0 b(\omega) = 0 \\ -\left( \Gamma \nu g' S_0 + \Gamma \frac{\beta}{\tau_s} \right) a(\omega) + \left( i\omega + \frac{1}{\tau_p} - \Gamma \nu g_0 \right) b(\omega) = 0 \end{cases}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение имеет вид:

$$a(\omega), b(\omega) \propto e^{\lambda t}$$

где  $\lambda$  есть корень характеристического уравнения, которое получатся из уравнения  $\det=0$  заменой  $i\omega \rightarrow \lambda$ :

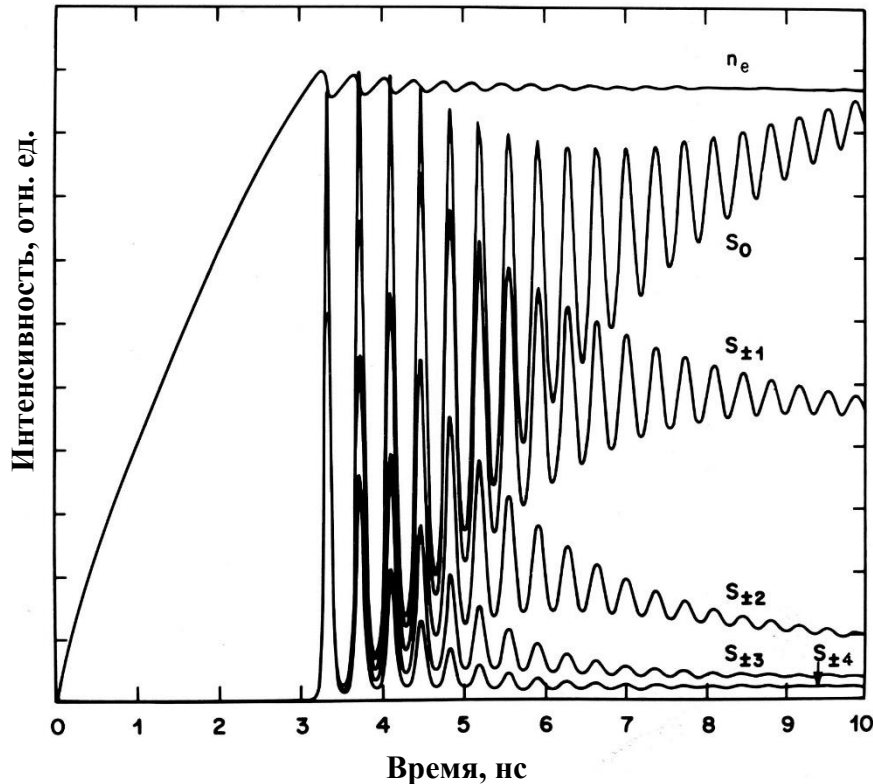
$$\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}$$



Отклик имеет вид колебаний, которые происходят на резонансной частоте и затухают с инкрементом  $\gamma/2$

# За пределами одномодового приближения

Отклик лазера на резкое включение тока накачки (численное решение):



$n_e$  - концентрация носителей в активном слое  
 $S_0$  - центральная мода в спектре излучения лазера  
 $S_{\pm 1}$  - две ближайшие боковые моды  
 $S_{\pm 2}$  - следующие две боковые моды ... и т.д.

## Важные выводы:

1. При подаче тока концентрация носителей растет, лазер включается (с задержкой), после чего идут *затухающие колебания* концентрации носителей.
2. Затухающие колебания плотности фотонов (интенсивности) всех продольных мод происходят *синхронно*.
3. Хорошо виден *сдвиг фаз* колебаний концентрации носителей и плотности фотонов в модах.

# «Чирп» или уширение спектральных линий в режиме гармонической модуляции

Явление «чирп» (“chirp” - чирикание) связано с динамическим изменением показателя преломления в резонаторе лазера под действием изменяющейся во времени концентрации носителей в активном слое лазера.

**Условие определяющее длину волны  
продольной моды с индексом «m»:**

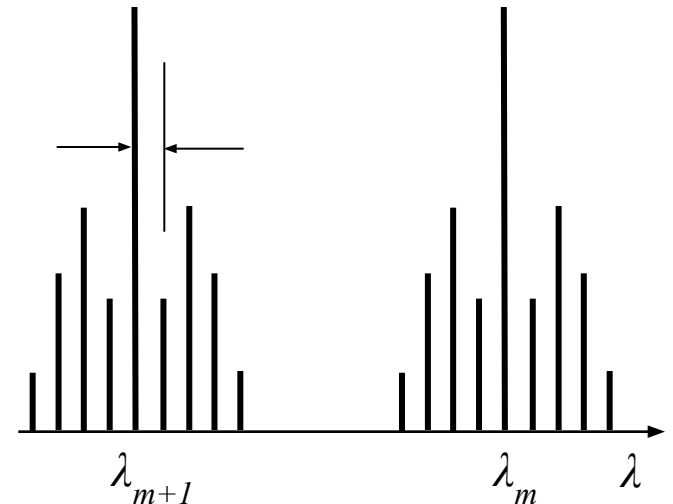
$$m \frac{\lambda_m}{2N} = L \quad \Rightarrow \quad \delta \lambda_m = \frac{2L}{m} \frac{\partial N}{\partial n} \delta n \quad \left( \frac{\partial N}{\partial n} < 0 \right)$$

**Под действием гармонического изменения тока накачки**

$$J(t) = J_0 + \delta J(t) \quad \text{где} \quad \delta J(t) = j e^{i\omega t}$$

**отклик концентрации носителей**

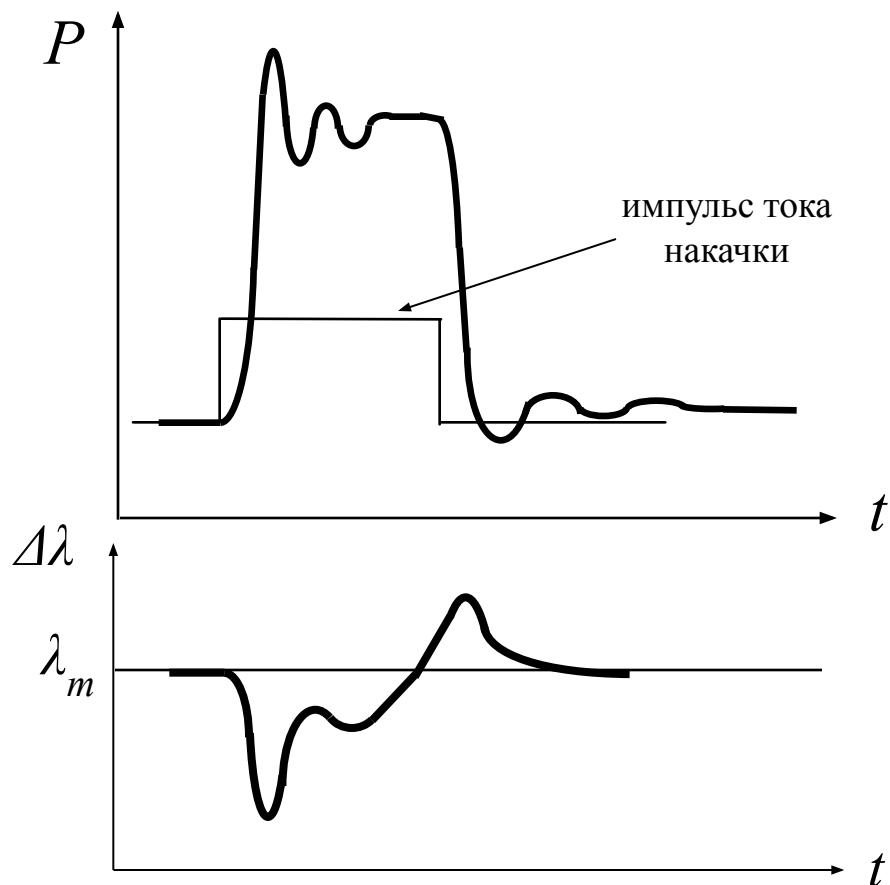
$$n(t) = n_0 + \delta n(t) \quad \text{где} \quad \delta n(t) = a(\omega) e^{i\omega t}$$



**Это приводит к уширению каждой линии в спектре излучения лазера -  
появляются гармоники сдвинутые на частоту модуляции тока накачки.**



# Реакция излучения лазера на импульсы тока накачки и импульсный чирп



1. Форму отклика на импульс тока накачки можно найти прямым решением скоростных уравнений

2. Время нарастания и спада интенсивности света в импульсе:

$$\tau \approx 1/4 f_{gp}$$

$f_{gp}$  - граничная частота модуляции

3. Период осцилляций интенсивности

$$T \approx 2\pi/\omega_0$$

4. Импульсный чирп:

$$\Delta\lambda \propto -\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t}$$