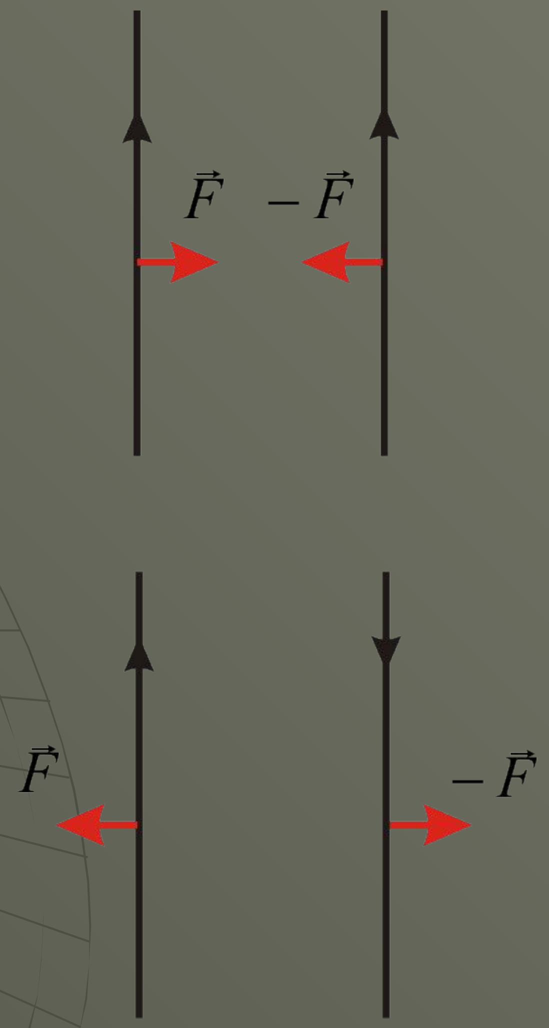
Экспериментальные факты, лежащие в основе теории магнетизма

- 1. (**Ампер, 1820 г.**) Два тонких прямолинейных параллельных проводника, по которым текут электрические токи, взаимодействуют друг с другом: притягиваются, если токи имеют одинаковое направление, и отталкиваются, если направления токов противоположны.
- Сила **F** пропорциональна произведению сил токов в проводниках и обратно пропорциональна расстоянию между ними.



- Для двух бесконечно длинных проводников Ампер установил:

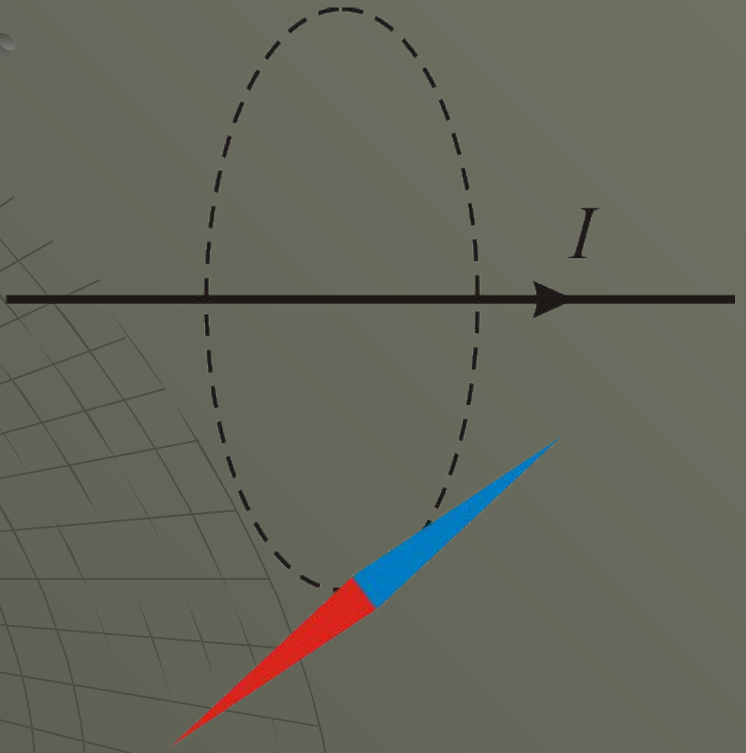
$$F \sim I_1, F \sim I_2, F \sim \frac{1}{r}, F \sim l$$

- Сила Ампера для взаимодействия таких проводников в вакууме:

$$F = \kappa \frac{I_1 I_2}{r} l \qquad (1)$$

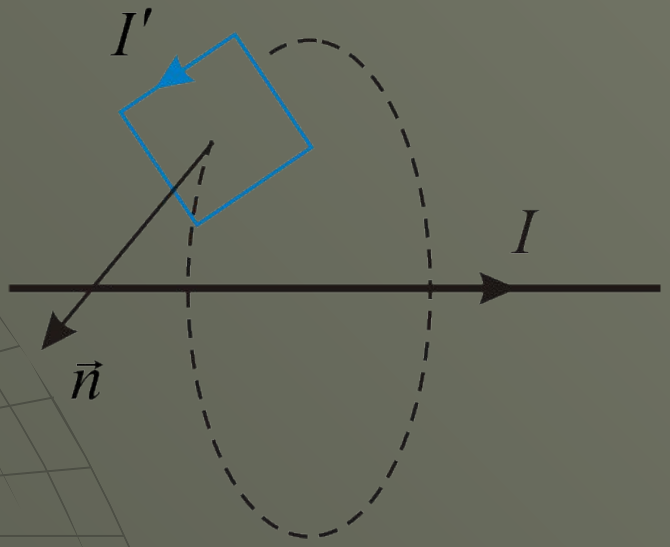
Экспериментальные факты, лежащие в основе теории магнетизма

- 2. (**Эрстед, 1820 г.**) Провод с текущим по нему током ориентирует расположенную поблизости стрелку магнитного компаса в направлении, перпендикулярном направлению тока.



Экспериментальные факты, лежащие в основе теории магнетизма

- 2. (**Эрстед, 1820 г.**) Если вместо магнитной стрелки рядом с прямолинейным проводником с током расположить изготовленную из проволоки рамку, по которой течет электрический ток, то рамка будет испытывать действие механического момента сил и установится так, что нормаль **n** к плоскости рамки будет перпендикулярна направлению силы тока в проводе.



- Магнитное поле (МП) – силовое поле в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты.
- МП создается только движущимися зарядами и действует на движущиеся в этом поле заряды.
- Опыты показывают: характер действия МП на ток зависит 1) от формы проводника, по которому течет ток;2)от расположения проводника; 3)направления тока.

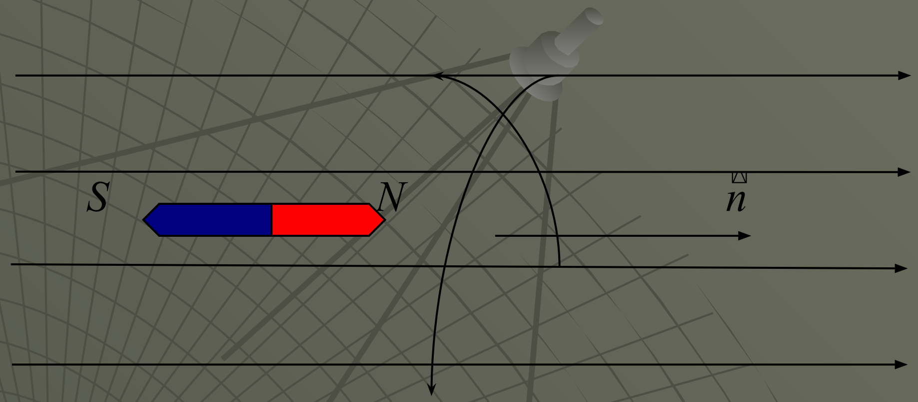
ИСТОЧНИКИ МП

- Движущийся электрический заряд.
- Электрический ток
- Постоянный магнит

- Основная силовая характеристика МП – вектор магнитной индукции

$$\vec{B}$$

- За направление МП в данной точке принимают направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к свободно подвешенной рамке с током.



- Или направление, совпадающее с направлением силы, действующей на северный полюс магнитной стрелки, помещенной в данную точку поля.

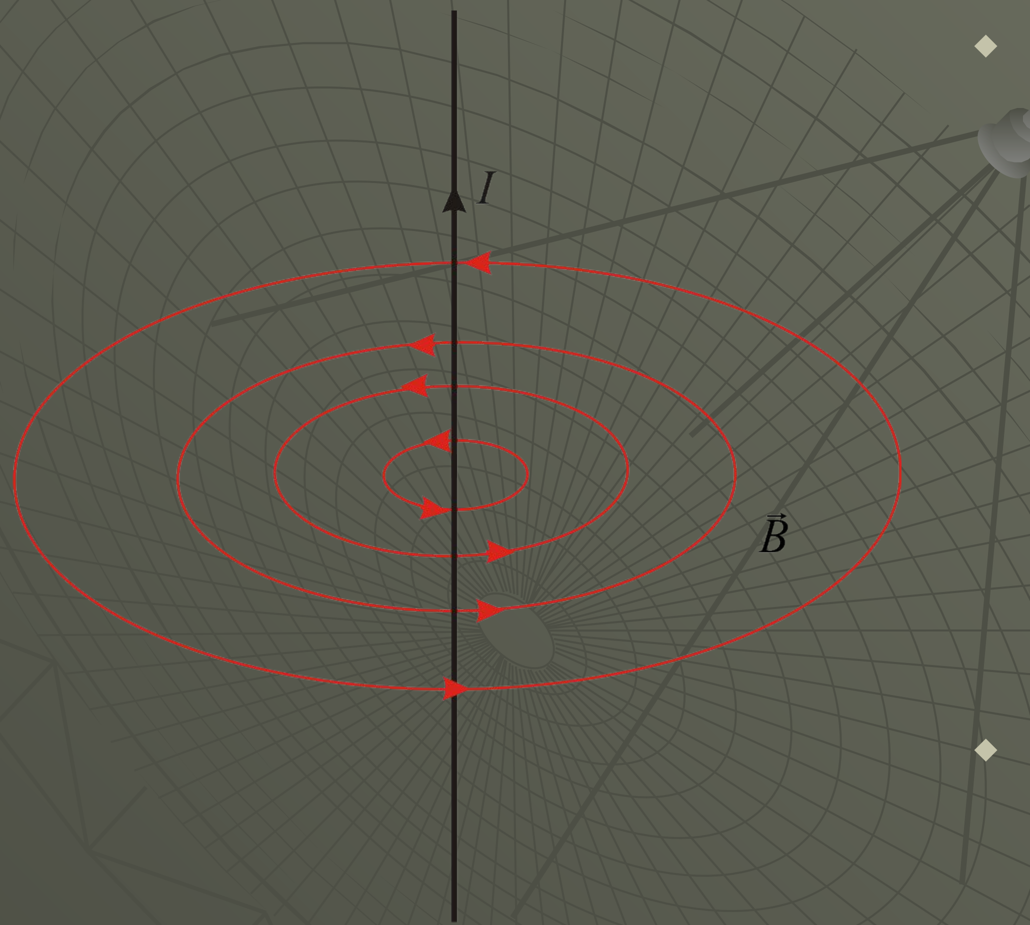
ПРАВИЛО БУРАВЧИКА

- За направление положительной нормали принимается направление поступательного движения буравчика, рукоять движется в направлении, совпадающем с направлением тока, текущего в рамке – правило буравчика или правило правого винта.

СИЛОВЫЕ ЛИНИИ МП

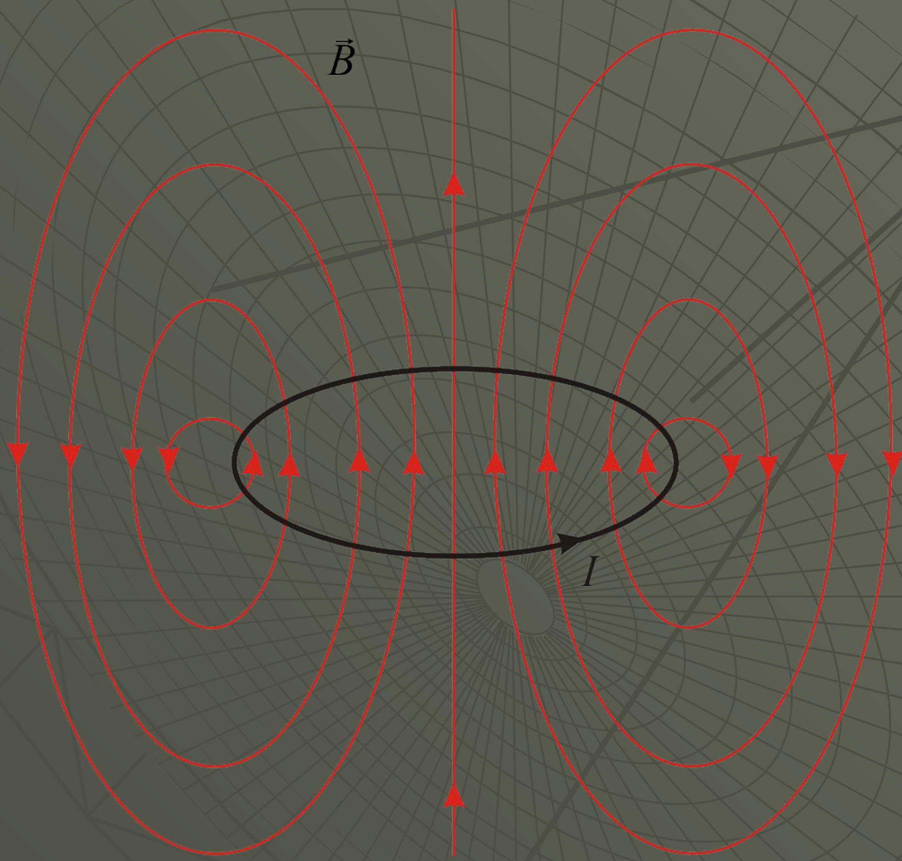
- Силовые линии МП(линии магнитной индукции) – линии касательные, к которым в любой точке пространства совпадают вектором магнитной индукции.
- Силовые линии МП замкнуты, охватывают проводники с током (См.рис)
- МП – вихревое.

Магнитное поле прямолинейного проводника с током



- Линии вектора **B** прямолинейного проводника с током – концентрические окружности с центром на оси провода, расположенные в перпендикулярной к проводу плоскости.
- Густота линий уменьшается по мере удаления от центра

Магнитное поле кругового витка с током



- Линии вектора **B** кругового витка с током пересекают плоскость витка перпендикулярно ей.

МОДУЛЬ ВЕКТОРА $\vec{B}$

- Магнитная индукция зависит от силы тока *I и от расстояния r от проводника до исследуемой точки, т.е.*

$$B = \frac{I}{r}k \qquad (2)$$

- *К – коэффициент пропорциональности.*
- *Подставляя выражение (2) в (1) получаем:*

$$F = I\hat{A}l$$

- *Учитывая, что токи одинаковы.*

МОДУЛЬ ВЕКТОРА $\vec{B}$

- Используя формулу (2):

$$B = \frac{F}{Il} \quad (3)$$

- Модуль вектора магнитной индукции – отношение максимальной силы, действующей со стороны МП на участок проводника с током , к произведению силы тока на длину этого участка.
- Единица измерения – тесла: $1\grave{O}\ddot{e} = \frac{1\acute{I}}{1\grave{A} \cdot 1\grave{\imath}}$

Сила Лоренца

- Опыт показывает, что *сила* **F**, *действующая на точечный заряд q, в общем случае зависит не только от его положения в пространстве, но и от его скорости* **v**.
- Поэтому силу **F** разделяют на 2 составляющие – $\mathbf{F}_e$, зависящую только от положения заряда *q* в пространстве (**электрическая составляющая**), и $\mathbf{F}_m$, зависящую от скорости заряда (**магнитная составляющая**).

- При этом в любой точке пространства и в любой момент времени магнитная составляющая силы:
  - Всегда перпендикулярна **v**;
  - Всегда перпендикулярная определенному в данном месте направлению;
  - По модулю пропорциональна той составляющей скорости **v**, которая перпендикулярна этому выделенному направлению.

Действие силы Лоренца на заряды

Сила, действующая на заряды	F	
Составляющие:	F_e	F_m
От чего зависит:	от положения заряда в пространстве	от скорости заряда

Сила Лоренца

- Свойства магнитной составляющей можно описать, если ввести понятие **магнитного поля**. Если охарактеризовать это поле вектором **B**, определяющим выделенное в каждой точке пространства направление, то выражение для $\mathbf{F}_m$ можно записать в виде:

$$\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

- Тогда полная электромагнитная сила (**сила Лоренца**), действующая на заряд q:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

- *Примечание.* Это выражение справедливо как для постоянны, так и для переменных электрических и магнитных полей, а также для любых скоростей заряда.

Действие силы Лоренца на заряды

Сила, действующая на заряды: **F**

Составляющие: F_e | F_m

Действие:
- F_e: на покоящиеся заряды; на движущиеся заряды
- F_m: на движущиеся заряды

Особенности вектора B

- Поле вектора **B** (магнитное поле):
  - не действует на покоящиеся заряды;
  - характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд (аналог вектора **E**, характеризующего силовое действие электрического поля);
  - поскольку $\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v}$, то магнитная составляющая силы Лоренца (т.е. магнитное поле) *не совершает работы над зарядом*. Таким образом, в постоянном магнитном поле энергия движущейся частицы остается неизменной.
  - в нерелятивистском случае ($v \ll c$) сила Лоренца *инвариантна*: $\mathbf{F} = \mathrm{inv}$ (в соответствии с принципом относительности Галилея). Однако, поскольку $\mathbf{F}_m$ зависит от скорости **v** заряда, то она (и, следовательно, $\mathbf{F}_e$) зависят от выбора системы отсчета.

Магнитное поле движущегося заряда

- Опыт показывает, что *само магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами)*.

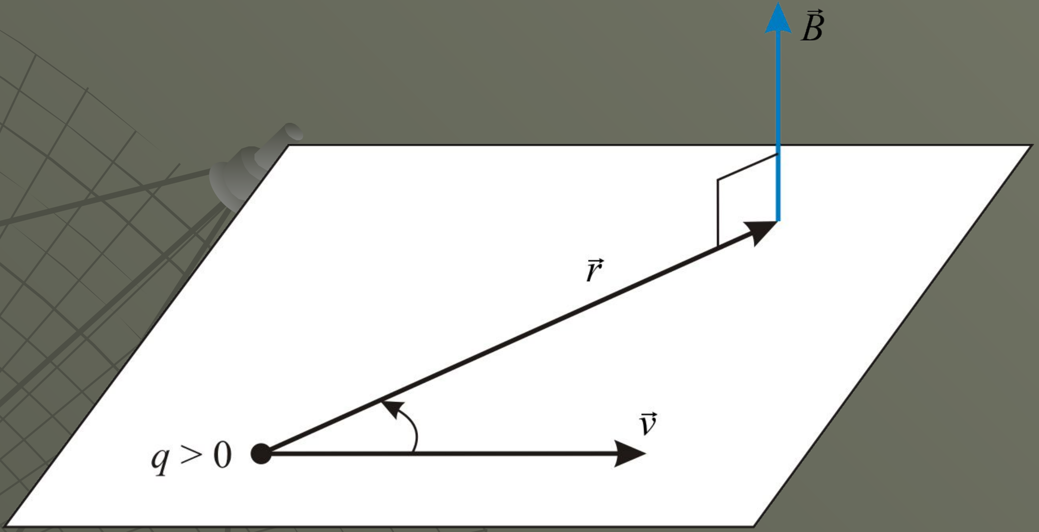
- Поле **B** точечного заряда *q*, движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью **v**:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}$$

- Здесь **r** – радиус-вектор, проведенный от заряда *q* в точку наблюдения. Его начало движется вместе с зарядом, а конец – неподвижен в данной системе отсчета, поэтому **B** в данной точке пространства зависит от времени.

Магнитное поле движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3}$$

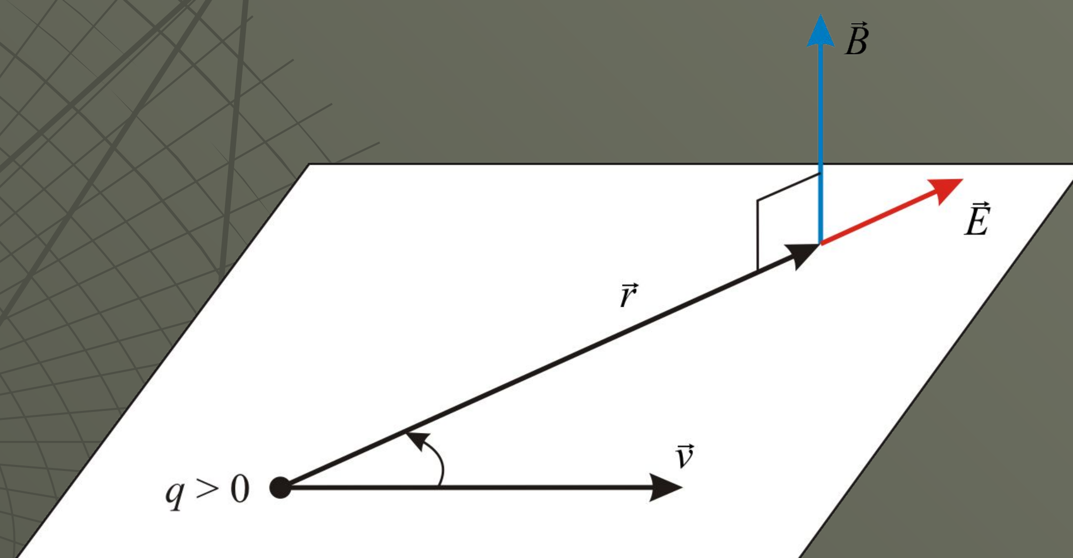


- В соответствии с формулой, вектор **B** перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы **v** и **r**, причем вращение **v** по направлению к **r** образует правовинтовую систему.
- Вектор **B** называется **магнитной индукцией**. Единицей магнитной индукции служит ***тесла*** (**Тл**)

Связь между векторами B и E при движении точечного заряда

- Электрическое поле точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}$$



- Поэтому

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3} =$$

$$\mu_0\varepsilon_0[\vec{v}\times\vec{E}] = \frac{[\vec{v}\times\vec{E}]}{c^2}$$

- Здесь $c = (\varepsilon_0\,\mu_0)^{-1/2}$ – **электродинамическая постоянная,**

Принцип суперпозиции

- Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции:** *магнитное поле, создаваемое в данной точке пространства несколькими движущимися зарядами (или токами), равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом (или током) в отдельности:*

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

Закон Био – Савара – Лапласа

- Рассмотрим вопрос о нахождении магнитного поля, создаваемого *постоянными* электрическими токами. Для этого используем выражение для индукции **B** магнитного поля движущегося со скоростью **v** точечного заряда *q*:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3}$$

- Здесь **r** – радиус-вектор точки, в которой определяется **B**.
- Поскольку заряд является носителем тока в проводнике, представим его в виде $q = \rho dV$, где ρ – объемная плотность заряда, dV – элементарный объем. Учтем, что $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ – плотность тока, тогда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\rho dV[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{j}\times\vec{r}]}{r^3}dV$$

Закон Био – Савара – Лапласа

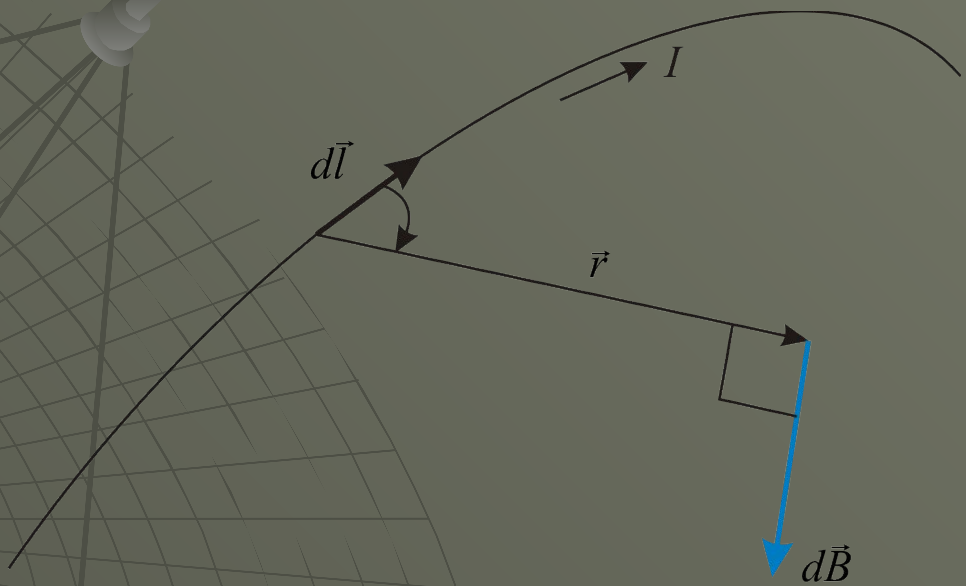
- Если ток I течет по *тонкому* проводу с площадью поперечного сечения S, то $jdV = jdSdl = Idl$, где dl – элемент длины проводника.
- Введем вектор $d\mathbf{l}$ в направлении тока I, тогда $\mathbf{j}dV = Id\mathbf{l}$. Векторы $\mathbf{j}dV$ и $Id\mathbf{l}$ называются соответственно **объемным** и **линейным элементами тока**. Таким образом, получаем:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

- Это равенство выражает **закон Био – Савара – Лапласа**. Здесь вектор $d\mathbf{B}$ – магнитная индукция, создаваемая в точке пространства с радиус-вектором $\mathbf{r}$ элементом тока $Id\mathbf{l}$.

Закон Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$



- Полное поле **B** в соответствии с принципом суперпозиции определяется в результате интегрирования этого выражения по всем элементам тока:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

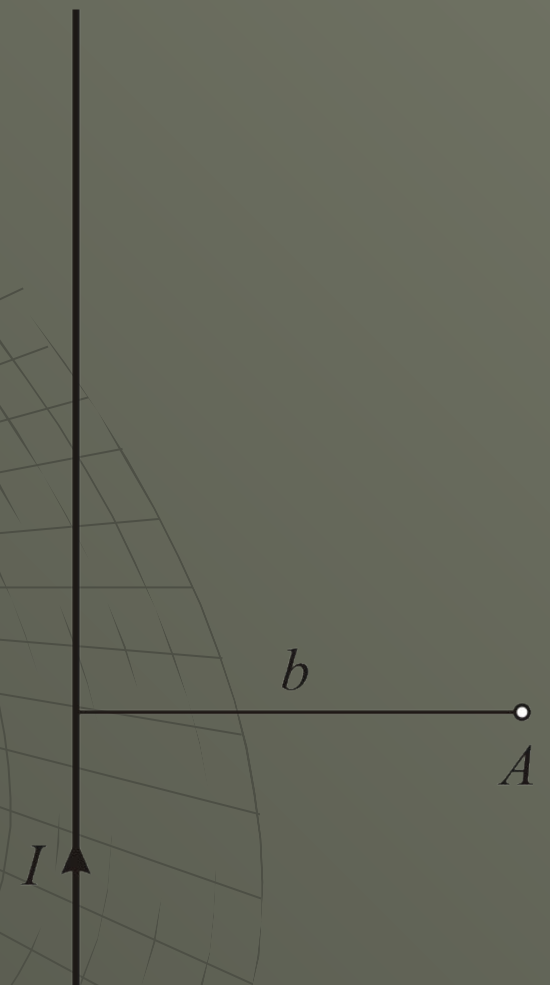
Расчет магнитных полей по закону Био – Свара – Лапласа

- Расчет по формулам закона Био – Свара – Лапласа магнитного поля тока произвольной конфигурации, вообще говоря, сложен.
- Однако расчет значительно упрощается, если распределение тока имеет определенную симметрию.
- Приведем несколько простейших примеров на нахождение индукции магнитного поля тока.

Пример 1. Магнитное поле прямого тока

- Найдем магнитную индукцию **B** в точке пространства, отстоящей на расстоянии b от прямого проводника с током I.

- Будем считать, что b намного меньше длины провода.



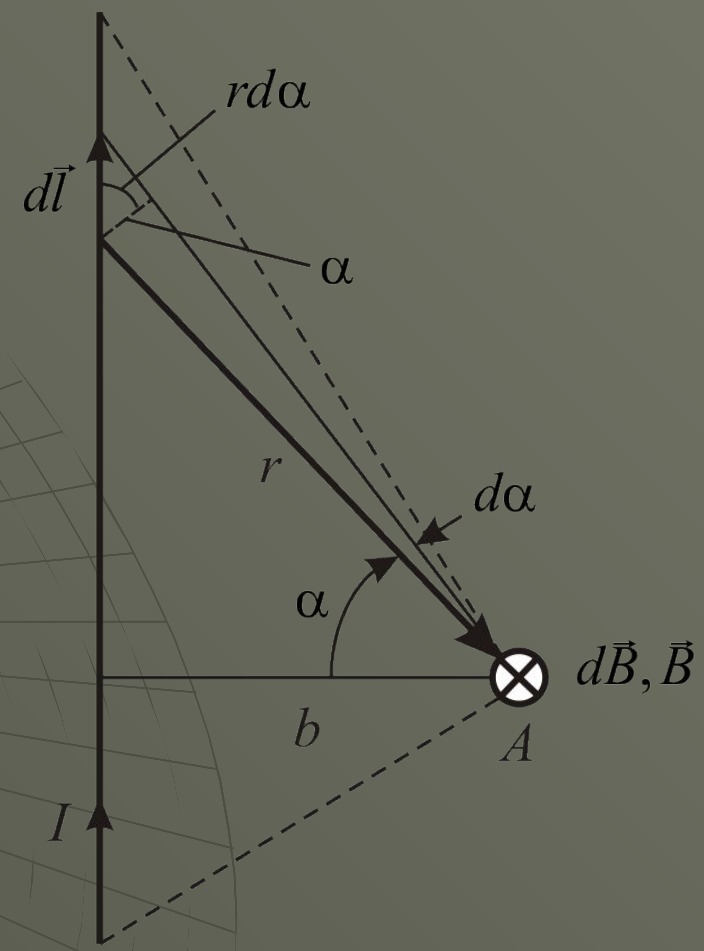
Пример 1. Магнитное поле прямого тока

- Согласно закону Био – Савара – Лапласа,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

в произвольной точке A векторы $d\mathbf{B}$ всех элементов тока имеют одинаковое направление – за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей dB, причем

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos\alpha}{r^3}$$



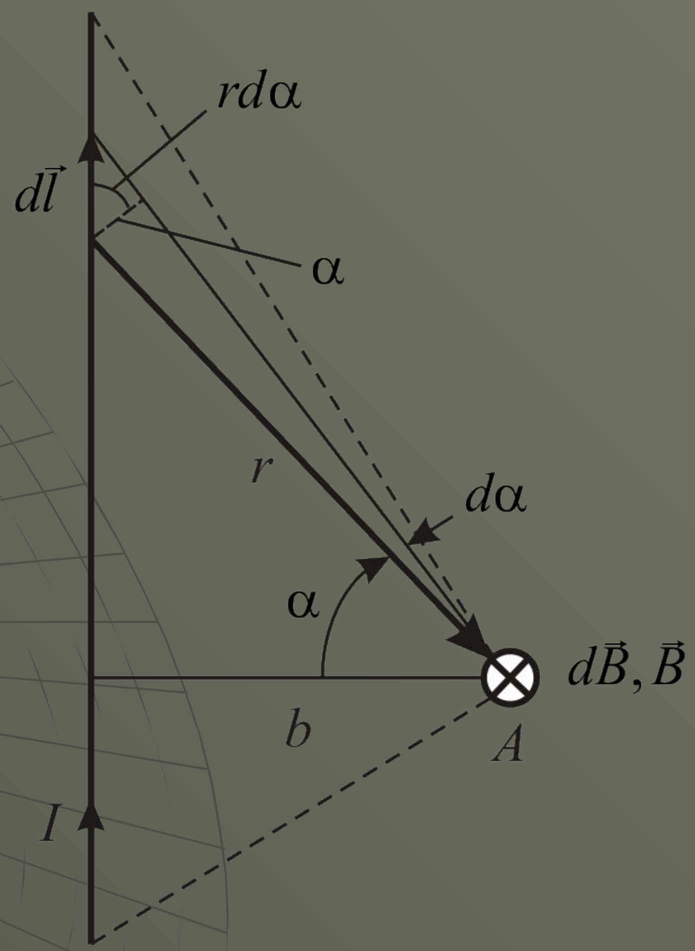
Пример 1. Магнитное поле прямого тока

- Из рисунка видно, что $dl\cos\alpha = r\,d\alpha$, $r = b/\cos\alpha$. Значит

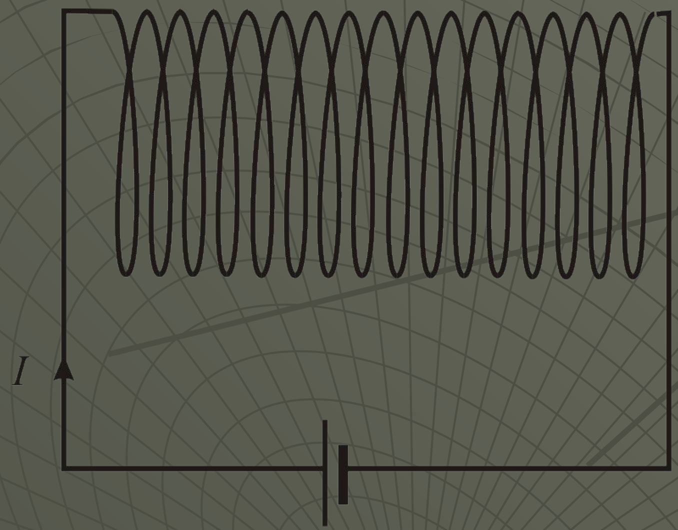
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{b}$$

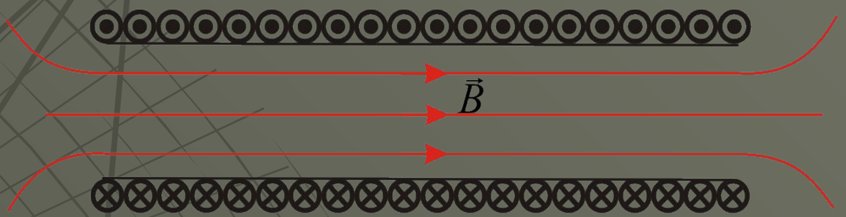
- Интегрируя это выражение по всем элементам тока, что эквивалентно интегрированию по α от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, находим окончательно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$



Магнитное поле соленоида





- **Соленоид** представляет собой навитой на круглый цилиндрический каркас тонкий провод. Витки расположены вплотную и изолированы друг от друга. При пропускании тока по проводу, из которого изготовлен соленоид, возникает магнитное поле, которое, *если соленоид достаточно длинный*, можно считать однородным внутри соленоида и практически равным нулю вне его объема.

Теорема Гаусса для поля В

- **Теорема Гаусса для поля В.** *Поток вектора* **В** *сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:*

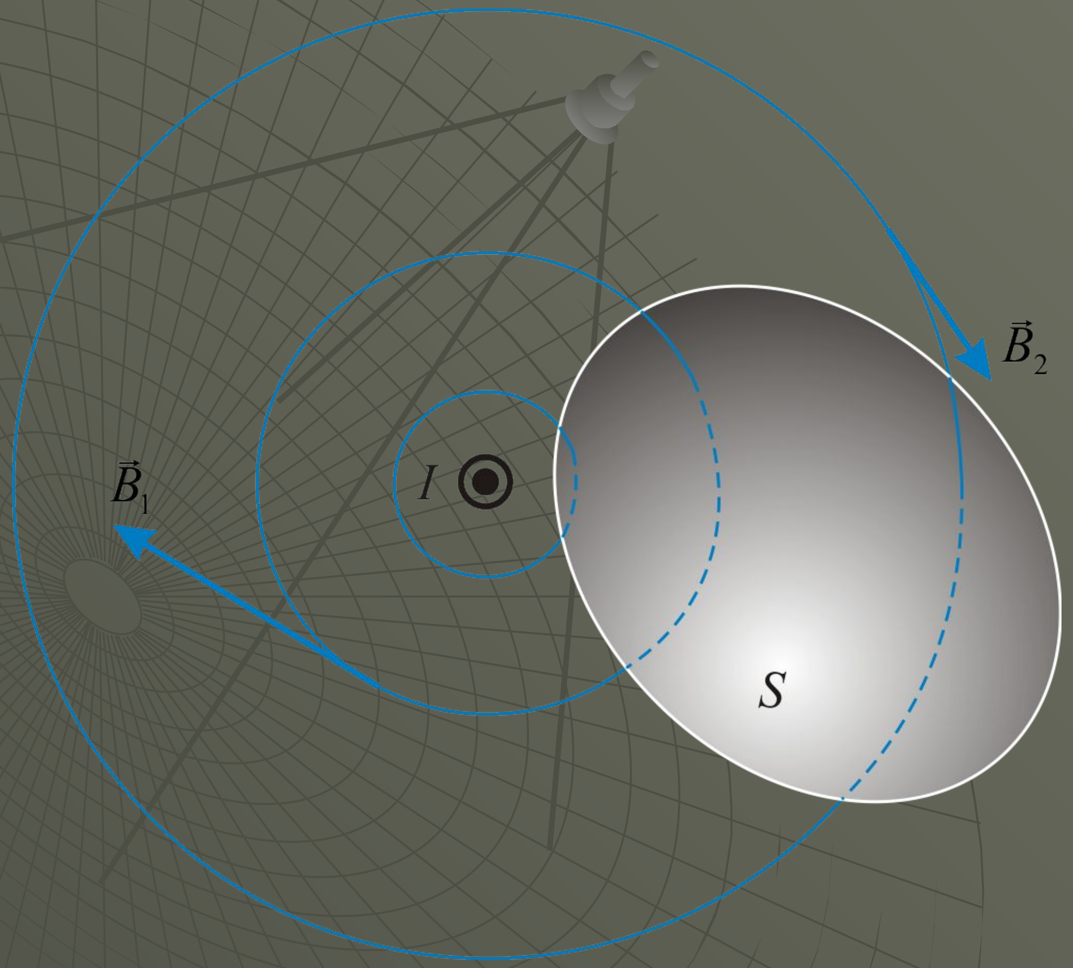
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Эта теорема является обобщением опыта. Она выражает собой в форме постулата тот факт, что *линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца*. Поэтому число линий вектора **В**, выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью *S*, всегда равно числу линий, входящих в этот объем.

Следствие из теоремы Гаусса для поля В

- Отсюда вытекает важное следствие: *поток вектора* **В** *сквозь поверхность S , ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы поверхности*.
- Теорема Гаусса для вектора **В** выражает также и тот факт, что *в природе нет «магнитных зарядов», т.е. зарядов, на которых бы начинались и на которых бы заканчивались линии магнитной индукции.*
- Иначе говоря, *поле вектора* **В** *не имеет источников* (в противоположность электростатическому полю).

Теорема Гаусса для вектора B



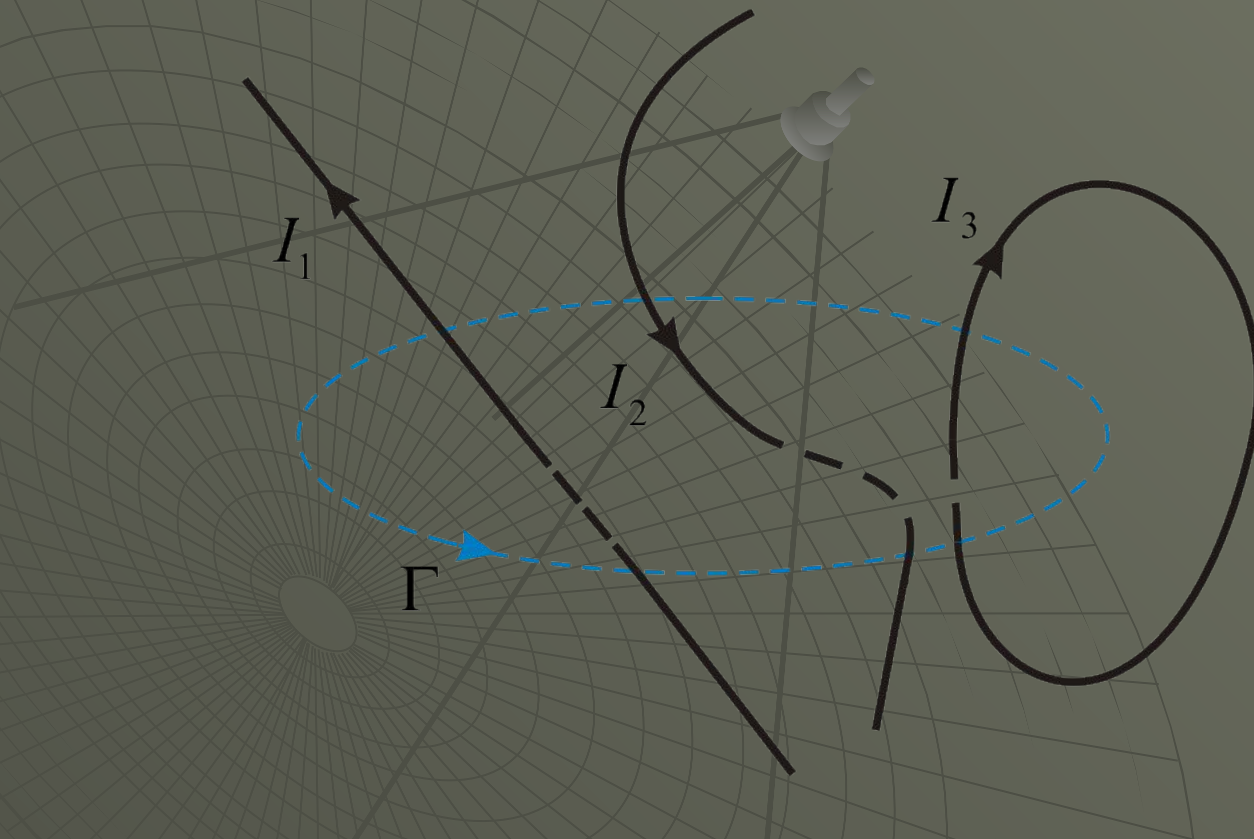
Теорема о циркуляции вектора B

- **Теорема о циркуляции вектора B** ***(для магнитного поля постоянных токов в вакууме)***. *Циркуляция вектора* **B** *по произвольному контуру* Г *равна произведению* μ_0 *на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром* Г:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

- При этом ток I_i считается положительным, если его направление связано с направлением обхода контура правилом правого винта. Ток противоположного направления считается отрицательным.

Пример



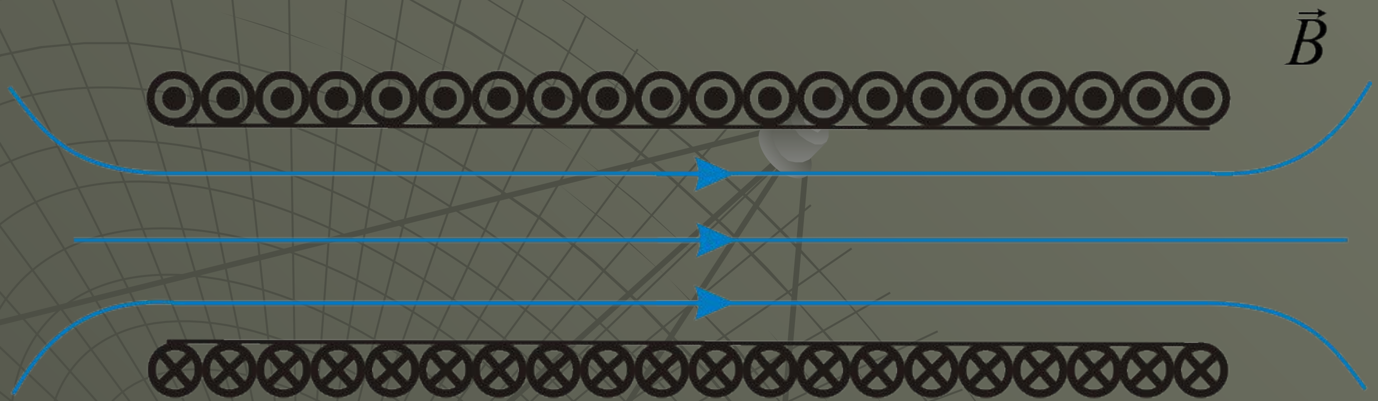
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3)$$

Теорема о циркуляции вектора B
в дифференциальной форме

- Заметим, что в электростатическом поле циркуляция вектора **E** равна нулю и rot**E** = 0, т.е. поле **E** является **потенциальным**

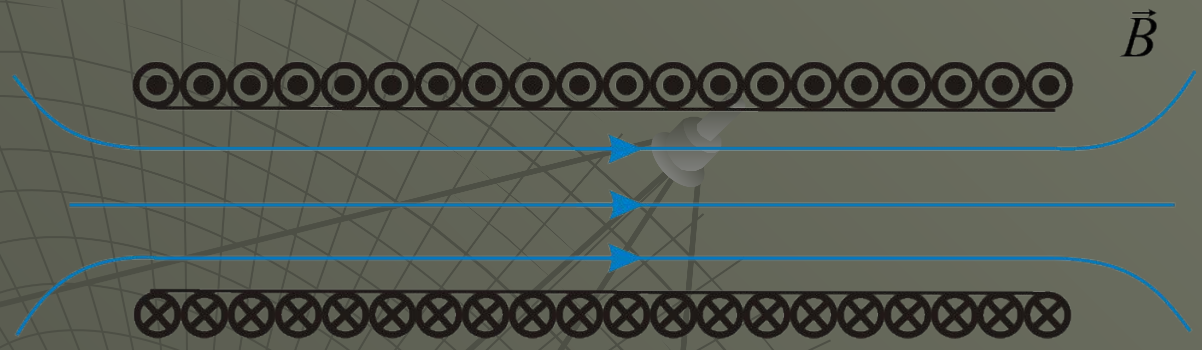
- В отличие от электростатического поля, поле вектора **B** является **соленоидальным** (**вихревым**), поскольку rot**B** ≠ 0.

Магнитное поле соленоида



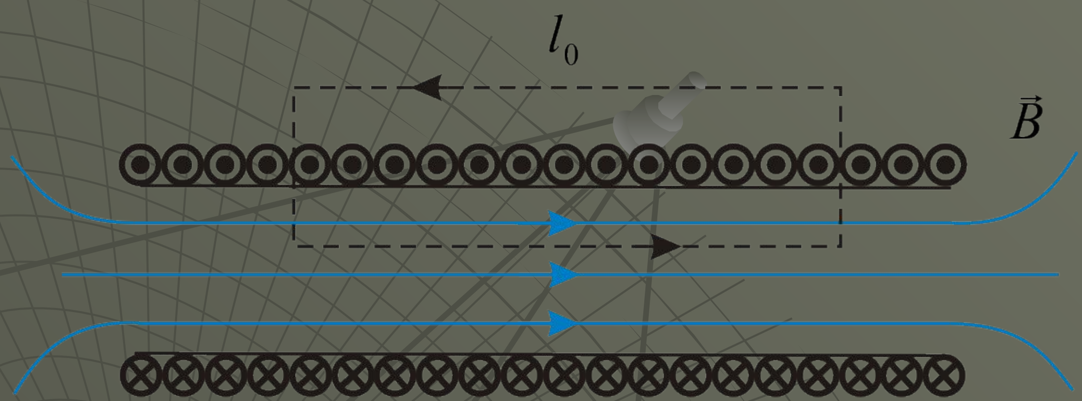
- Пусть ток I течет по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра. Такой обтекаемый током цилиндр называют **соленоидом**.
- Пусть на единицу длины соленоида приходится n витков проводника.
- Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно считать замкнутым током.

Магнитное поле соленоида



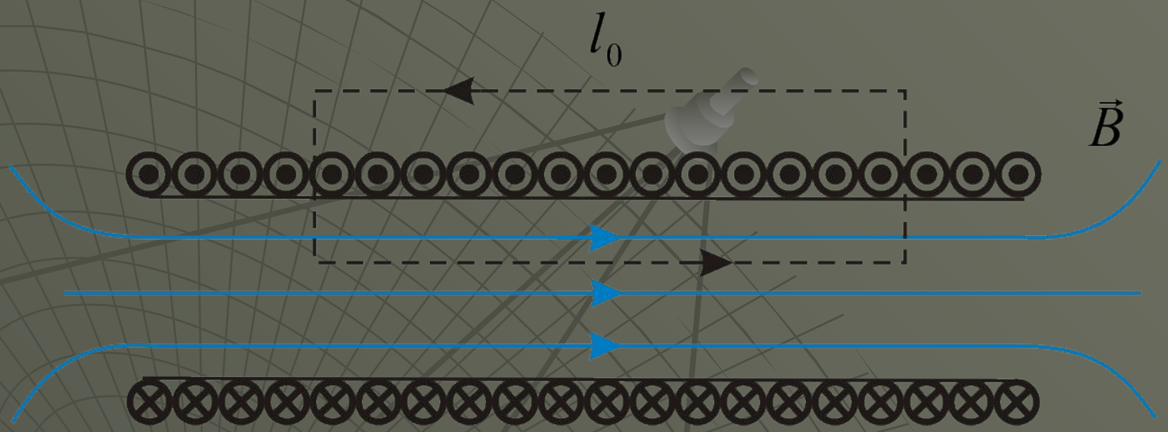
- Будем также предполагать, что проводник тонкий, т.е. в ток в соленоиде можно считать текущим только по его поверхности.
- Опыт и расчеты показывают, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля снаружи него. Для бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи вообще отсутствует.

Магнитное поле соленоида



- Из соображений симметрии ясно, что линии вектора **B** внутри соленоида направлены вдоль его оси, причем вектор **B** составляет правило правого винта с направлением тока в соленоиде.
- Выберем контур Г в виде тонкого прямоугольника, как показано на рисунке.
- Найдем циркуляцию вектора **B** вдоль него.

Магнитное поле соленоида



- Согласно теореме о циркуляции вектора **B** вдоль контура Г, имеем:

$$\int_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = Bl_0 = \mu_0 N_0 I = \mu_0 n l_0 I$$

$$B = \mu_0 n I$$

- Таким образом, поле внутри длинного соленоида однородно.

Закон Ампера

- Каждый носитель тока испытывает действия магнитной силы $\mathbf{F}_m$. Действие этой силы передается всему проводнику, по которому эти заряды движутся. В результате *магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током*. Найдем эту силу.

- Пусть объемная плотность заряда, являющегося носителем тока (например, электроны в металле), равна ρ. Выделим мысленно элемент объема dV, тогда в нем находится заряд $dq = \rho dV$. Сила, действующая на этот заряд, движущийся со скоростью **v**, со стороны внешнего магнитного поля с индукцией **B**:

$$d\vec{F} = dq[\vec{v} \times \vec{B}] = \rho[\vec{v} \times \vec{B}]dV$$

Закон Ампера

- Поскольку плотность тока в проводнике **j** = ρ**v** и **j***dV* = *Id***l**, имеем:

$$d\vec{F} = \rho[\vec{v} \times \vec{B}]dV = [\vec{j} \times \vec{B}]dV = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$$

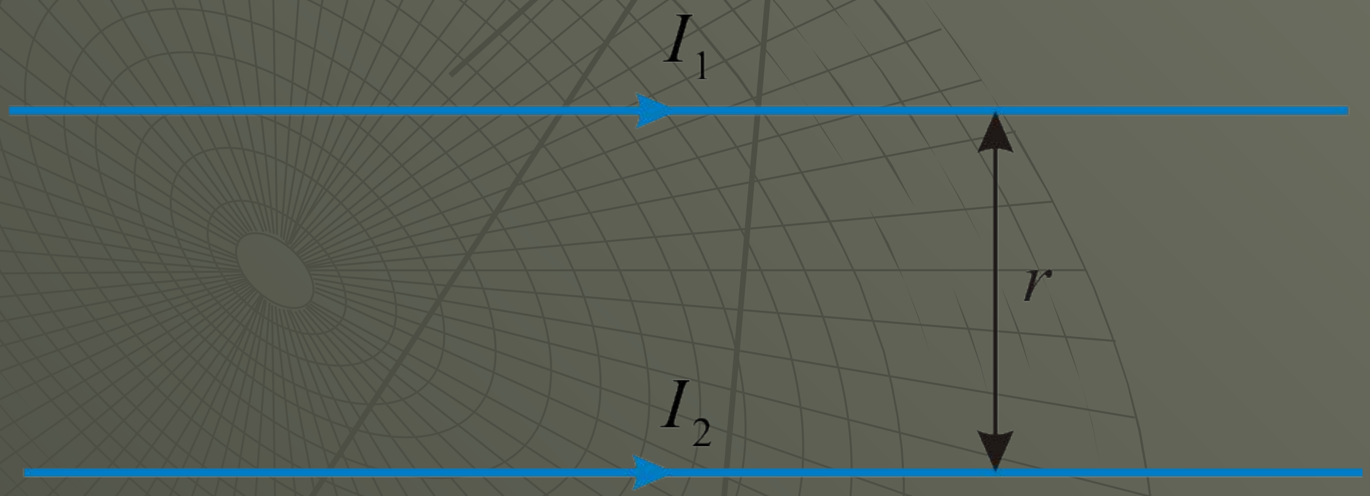
- Таким образом, получаем формулу, выражающую **закон Ампера**:

$$\vec{F} = \int_L I[d\vec{l} \times \vec{B}]$$

- Силы, действующие на токи в магнитном поле, называют **амперовыми** или **силами Ампера**.

Сила взаимодействия параллельных токов

- Найдем амперову силу, с которой взаимодействуют в вакууме два бесконечно длинных параллельных проводника с токами I_1 и I_2, если расстояние между ними равно r. Расчет произведем на единицу длины этой системы.

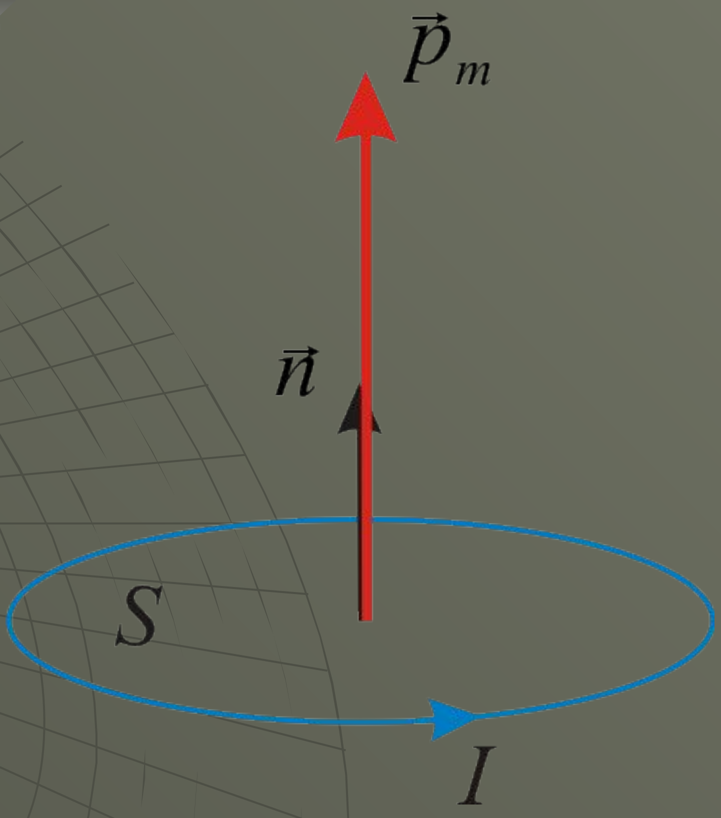


Магнитный момент контура с током

- По определению,

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

Здесь I – сила тока в контуре, S – площадь, ограниченная контуром, **n** – нормаль к контуру, направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта



Момент сил, действующих на контур с током во внешнем магнитном поле

- По определению, результирующий момент амперовых сил

$$\vec{M} = \oint[\vec{r} \times d\vec{F}] = \oint[\vec{r} \times [Id\vec{l} \times \vec{B}]]$$

- Если произвести расчет по данной формуле, то он будет довольно громоздок и мало интересен, поэтому мы не будем его приводить, – то оказывается, что для произвольной формы контура с током этот момент сил можно представить как

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

Момент сил, действующих на контур
с током во внешнем магнитном поле

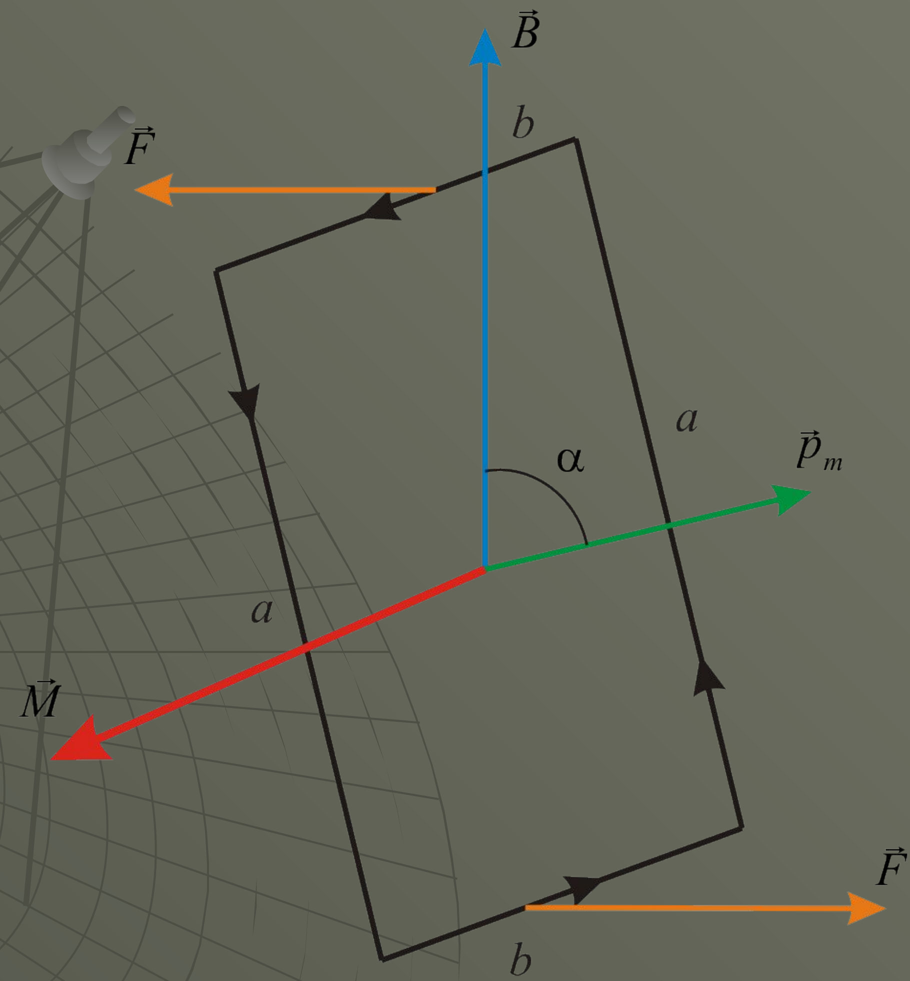
- Из приведенной формулы видно, что момент **M** амперовых сил, действующих на контур с током во внешнем однородном магнитном поле, перпендикулярен как вектору $\mathbf{p}_m$, так и вектору **B**.
- Модуль вектора **M** равен

$$M = p_m B \sin \alpha$$

где α – угол между векторами $\mathbf{p}_m$ и **B**. Когда $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{B}$, **M** = 0 (положение устойчивого равновесия контура). Если же $\mathbf{p}_m \uparrow\downarrow \mathbf{B}$, то **M** = 0 (положение неустойчивого равновесия: малейшее отклонение от этого положения приведет к появлению момента сил, стремящегося повернуть контур в положение устойчивого равновесия.

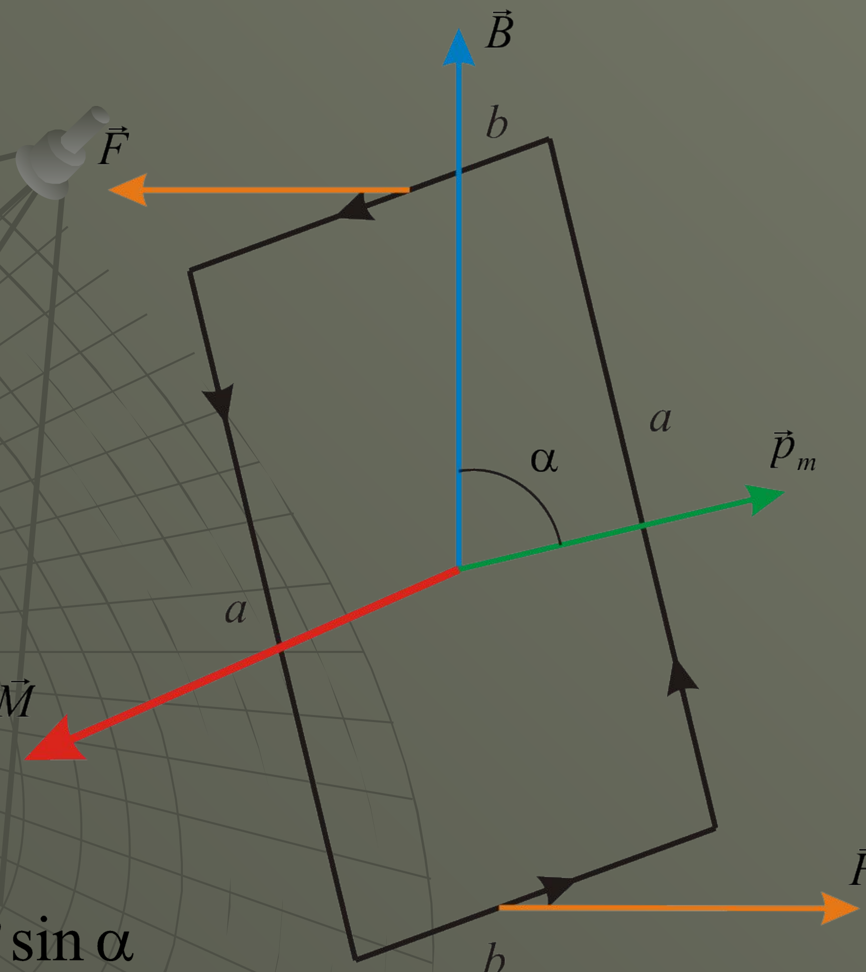
Пример

- Убедимся в справедливости полученной формулы на примере прямоугольного контура с током.
- Как видно из рисунка, силы, действующие на стороны *a*, перпендикулярны им и вектору **B**, поэтому они направлены горизонтально (на рисунке они не показаны) и стремятся только растянуть контур.



Пример

- Стороны b перпендикулярны **B**, поэтому на каждую из них действует сила $F = IbB$.
- Эти силы стремятся повернуть контур так, чтобы $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{B}$. Поэтому на контур действует пара сил, момент которой равен произведению F на плечо пары сил:



$$M = Fa\sin\alpha = IbBa\sin\alpha = p_m B\sin\alpha$$

Поведение контура с током во внешнем магнитном поле

- Во внешнем неоднородном магнитном поле элементарный контур с током ведет себя аналогично тому, как и электрический диполь во внешнем неоднородном электрическом поле: он будет поворачиваться к положению устойчивого равновесия (при котором $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{B}$) и, кроме того, под действием результирующей силы $\mathbf{F}$ втягиваться в область более сильного магнитного поля.

Работа при перемещении контура с током во внешнем магнитном поле

- Когда контур с током находится во внешнем магнитном поле – мы будем предполагать, что оно постоянное, – на отдельные элементы контура действуют амперовы силы, и поэтому при перемещении контура эти силы совершают работу.
- Покажем, что работа, которую совершают амперовы силы при элементарном перемещении контура с током I, определяется как

$$\delta A = I d\Phi$$

где $d\Phi$ – элементарное приращение магнитного потока сквозь контур при данном перемещении.