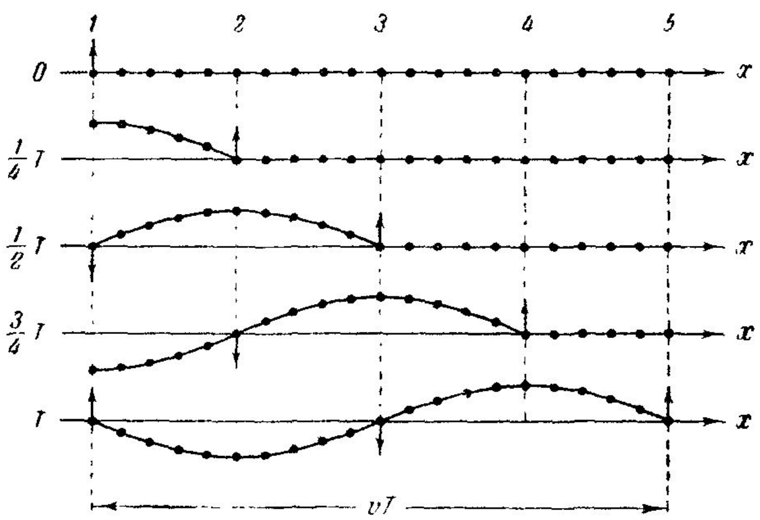
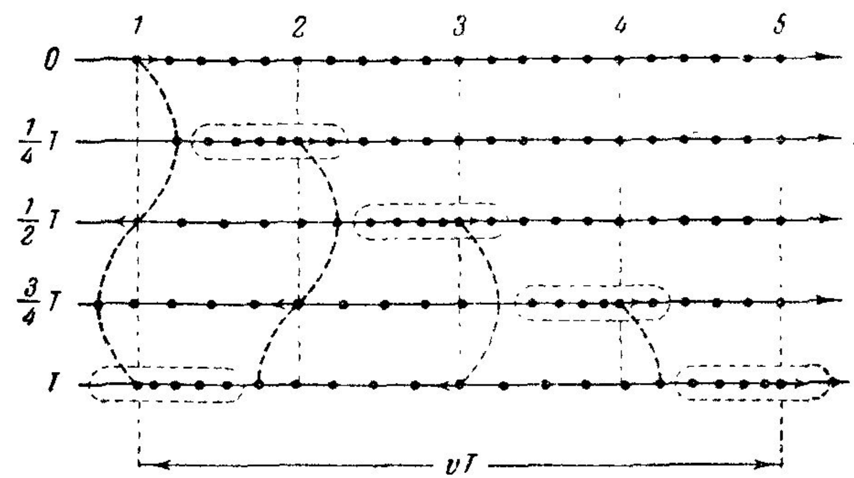
Волны в упругих средах.

Волновое уравнение. Уравнение монохроматической бегущей волны, основные характеристики волн. Продольные и поперечные волны. Упругие волны в газах, жидкостях и твердых телах. Энергетические характеристики упругих волн. Вектор Умова.

- Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.
- Частицы среды не переносятся волной - они совершают колебания около своих положений равновесия.
- В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению распространения волны:
- продольные- частицы среды около своего положения равновесия движутся вдоль направления распространения (жидкая, твердая и газообразная среда)
- поперечные – частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны (твердая среда)

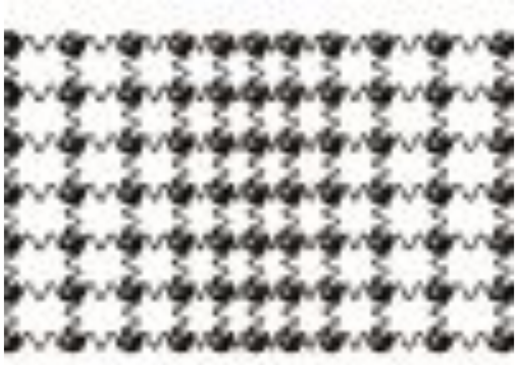




- Упругой волной называют процесс распространения возмущения в упругой среде.
- Геометрическое место точек до которой доходит колебание в момент времени t называется фронтом волны
- Геометрическое место точек колеблющихся в одной фазе называется волновой поверхностью
- Уравнение волны есть выражение, которое даёт смещение колеблющейся точки, как функцию её координат x,y,z и времени t:

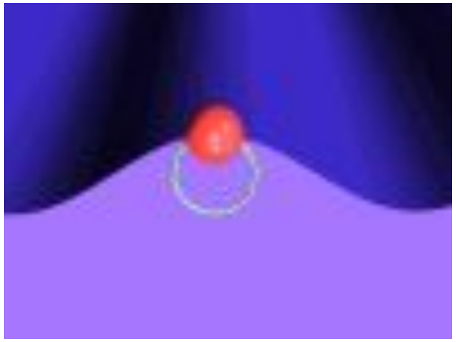
$$\xi = \xi(x, y, z; t)$$

Продольная упругая волна



Поперечная волна

Волна на поверхности жидкости



- Уравнение гармонической волны:

$$\xi(x,t) = a\cos\omega(t - x/v)$$

- а- амплитуда,w-циклическая частота колебаний частиц в среде.
- Период колебаний: $T = 2\pi/\omega$
- Длина волны λ- расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз 2π, расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний Т
- Волновое число:

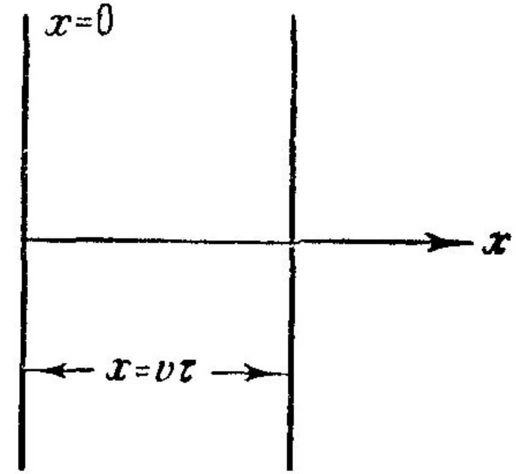
$$k = 2\pi/\lambda. \quad \blacktriangleright \quad \xi = a\cos(\omega t - kx).$$

- Поглощающая упругая среда:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$$

- где γ-коэффициент затухания волны ($м^{-1}$), амплитуда уменьшается по закону: $a = a_0 e^{-\gamma x}$

Уравнение плоской волны:



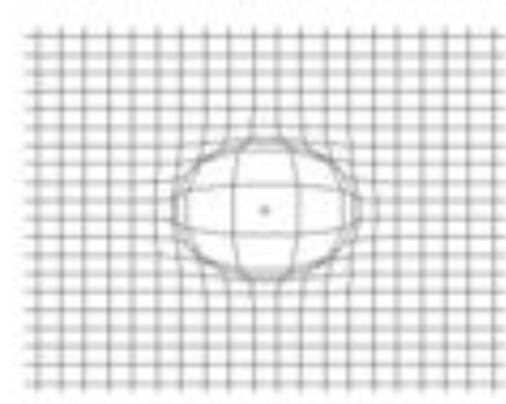
- Колебания носят гармонический характер. Ось x – вдоль направления распространения волны. Волновые поверхности перпендикулярны оси x. Смещение зависит только от x и t: $\xi=\xi(x,\ t)$
- Колебания точек в плоскости x=$\xi(0,\ t)=a\cos\omega t$
- В произвольной точкеx: при v – скорости распространения волны, такое расстояние волна пройдёт за врем $\tau=\frac{x}{v}$
- Колебания частиц в плоскости x будут отставать от колебаний частиц в плоскости 0 на т:

$$\xi(x,\ t)=a\cos\omega(t-\tau)=a\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

- Тогда уравнение плоской волны распространяющейся в направлении возрастания x: убывания x:

$$\xi=a\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right) \qquad \xi=a\cos\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)$$

- *v=w/k*- **фазовая скорость-** скорость распространения фазы.



- В случае сферической волны:
- Скорость распространения волны в о всех направлениях одинаковая.
- Пусть фаза wt.
- Точки, лежащие на волновой поверхности r >> радиуса источника, будут колебаться с фазой w(t-r/v).
- Амплитуда колебаний волны убывает с расстоянием по закону 1/r.
- Уравнение сферической волны:

$$\xi = \frac{a}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

- где a- постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность a равна размерности амплитуды, умноженной на размерность длины.

- Волновое уравнение- дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее изменения функций, характеризующих волну, во времени и пространстве.
- Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении так, что с осями x, y, z образуются α, β, γ.
- Колебания через начало координат имеют вид:

$$\xi_0 = a \cos \omega t.$$

- Колебания в плоскости, отстоящей от начала координат на расстоянии l=vτ:

$$\xi = a \cos \omega \left(t - \frac{l}{v}\right)$$

- r-радиус-вектор точек рассматриваемой поверхности, n-вектор нормали, для всех точек поверхности l:

$$\mathbf{nr} = r \cos \varphi = l$$

- Обозначим **k**=k**n** – волновой вектор, $k = 2\pi/\lambda$
- Тогда отклонение от положения равновесия точки с радиус-вектором **r** в момент времени t:

$$\xi(\mathrm{r},\ t) = a \cos(\omega t - \mathbf{kr})$$

- Выразим скалярное произведение **kr** через проекции на координатные оси:

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$$

- Тогда уравнение плоской волны:

$$\xi(x,\ y,\ z;\ t) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

- где $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha,\quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta,\quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma$
- Если **n** совпадает с осью x, то $k_x = k,\ k_y = k_z = 0$ и уравнение переходит в уравнение:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx)$$

- Уравнение плоской волны также записывают в виде:

$$\xi = a e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$$

- Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым.
- Рассмотрим производные по координатам и времени от уравнения плоской волны:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -\omega^2 \xi, \qquad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_x^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_y^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_z^2 \xi. \end{aligned}\right\}$$

Сложим уравнения ➤

➤ $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\xi = -k^2 \xi$$ ➤

➤ Подставим (*) ➤ $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

- Используя определение фазовой скорости $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

- -**<u>волновое уравнение</u>**

- **<u>Энергия упругой волны:</u>** Выделим в среде малый объём ΔV, обладающий потенциальной энергией упругой деформации ($\varkappa x = F = \sigma S,\ \sigma = E\varepsilon$ и $\varepsilon = x/l$):

$$\Delta E_p = \frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V$$

- где $\varepsilon = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ - относительное удлинение, Е - модуль юнга.
- Используем определение фазовой скорости для упругой среды $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$:

$$\Delta E_p = \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V$$

- Кинетическая энергия ра $u = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$ ъема:

$$\Delta E_k = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \Delta V$$

- Полная энергия: $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \dfrac{1}{2}\rho\left[\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V$
- Плотность энергии: $u = \dfrac{1}{2}\rho\left[\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$
- Продифференцируем:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\,\omega a \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

- Получим:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} a \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$u = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx)$$

- Плотность энергии в каждый момент времени в различных точках пространства различна.
- В одной и тоже точке плотность энергии изменяется по закону квадрата синуса.
- Т.К. среднее значение квадрата синуса равно ½, то среднее значение плотности энергии в каждой точке среды будет равно:
- Плотность энергии и её среднее значение для всех видов волн пропорциональны плотности среды ρ, квадрату частоты ω и квадрату амплитуды *a*.
- Плотности энергий продольной и поперечной волн будут равны.
- Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии Ф через поверхность.
- Ф- скалярная величина, [Ф] = размерность энергии/ размерность времени, совпадает с размерностью мощности.

- Плотность потока энергии- векторная величина, численно равная потоку энергии через единичную площадку , помещённую в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.
- Пусть через площадку $\Delta S_{\perp}$, перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за времяΔt энергия ΔE. Тогда плотность потока энергии j равна:

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta S_{\perp}\, \Delta t}$$

- Т.к. есть поток энергии $\Delta \Phi$ через поверхность $\Delta S_{\perp}$, то:

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}}$$

- Через площадку $\Delta S_{\perp}$ за время Δt будет перенесена энергия ΔE, заключенная в объёме цилиндра с основанием $\Delta S_{\perp}$ и высотой v Δt (v-фазовая скорость волны). Пусть цилиндр мал и плотность энергии всех точках одинакова. Тогда энергия ΔE есть произведение плотности энергии на объём цилиндра:

$$\Delta E = u\, \Delta S_{\perp}\, v\, \Delta t.$$

- Подставим в плотность потока энергии и получим:

$$j = uv$$

- Направление фазовой скорости как вектора совпадает с направлением распространения волны, тогда: $\mathbf{j} = u\mathbf{v}$
- -**<u>вектор Умова</u>**
- Вектор Умова как и плотность энергии u различен в различных точках пространства. В данной точке пространства он изменяется со временем по закону квадрата синуса. Его среднее значение:

$$\mathbf{j}_{\text{ср}} = \bar{u}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2\mathbf{v}.$$

- Зная j в некоторой точке пространства можно найти поток энергии через помещенную в данную точку пространства малую площадку ΔS:

$$\Delta\Phi = j_n \Delta S$$

- Полный поток через поверхность S равен сумме элементарных потоков:

$$\Phi = \int_S j_n \, dS,$$

- Упругие волны , распространяющиеся в воздухе с частотой 20 – 20 000 Гц, вызывают у человека ощущение звука. Упругие волны в этом диапазоне распространяющиеся в любой среде называют звуковыми волнами.
- Инфразвук- волны с частотой < 20 Гц
- Ультразвук – волны с частой > 20 000 Гц.
- Скорость звука в газе зависит от температуры:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

- Средняя скорость теплового движения молекул:

$$\bar{v}_{\text{мол}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

- *Упругие волны* могут распространяться не только в газах и жидкостях, но и в твердых телах. При этом в однородных твердых телах (в большинстве металлов - в железе, стали, алюминии) условия распространения упругих волн более благоприятны, чем, например, в воздухе; звук распространяется в металлах на большие расстояния, испытывая гораздо меньшее поглощение.