

Идеальные газы
тождественных частиц.
Распределение Ферми-Дирака
и Бозе-Эйнштейна

Частицы тождественные – физически неразличимые $\Rightarrow$ Возможны только такие состояния системы тождественных частиц, которые не изменяются при перестановке местами двух частиц $\Rightarrow$ при перестановке двух тождественных частиц волновая функция может изменяться только на несущественный фазовый множитель

$$\begin{aligned}\psi(\xi_1, \xi_j, \xi_i) &= \exp(i\alpha) \psi(\xi_1, \xi_i, \xi_j) = \\ &= \exp(2i\alpha) \psi(\xi_1, \xi_j, \xi_i) \Rightarrow \exp(2i\alpha) = 1 \Rightarrow \exp(i\alpha) = \pm 1\end{aligned}$$

При перестановке местами координат двух частиц волновая функция системы тождественных частиц может либо менять знак, либо оставаться неизменной

$$\psi(\xi_1, \xi_j, \xi_i) = \pm \psi(\xi_1, \xi_i, \xi_j)$$

Симметрия волновой функции относительно перестановки координат тождественных частиц остается постоянной во времени

$$\hat{P}_{i,j} \psi(\xi_1, \xi_j, \xi_i) = \psi(\xi_1, \xi_i, \xi_j)$$

$$\hat{H}(\xi_1, \xi_i, \xi_j) = \hat{H}(\xi_1, \xi_j, \xi_i) \Rightarrow [\hat{H}, \hat{P}_{i,j}] = \hat{H}\hat{P}_{i,j} - \hat{P}_{i,j}\hat{H} = 0$$

$$\frac{d\hat{P}_{i,j}}{dt} = \frac{\partial \hat{P}_{i,j}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{P}_{i,j}] = 0$$

Перестановочная симметрия определется величиной спина частиц системы

1) **Фермионы** (частицы с полуцелым спином). Волновая функция обязательно является антисимметричной относительно перестановки координат двух частиц

$$\psi(\xi_1, \xi_j, \xi_i) = -\psi(\xi_1, \xi_i, \xi_j)$$

2) **Бозоны** (частицы с целым спином). Волновая функция обязательно является симметричной относительно перестановки координат двух частиц

$$\psi(\xi_1, \xi_j, \xi_i) = \psi(\xi_1, \xi_i, \xi_j)$$

Различие в перестановочной симметрии волновых функций фермионов и бозонов приводит к принципиальному различию системы тождественных фермионов и системы тождественных бозонов

$$\text{Газ идеальный} \Rightarrow \hat{H} = \sum_i \hat{H}_1(\xi_i)$$

$\hat{H}_1(\xi)$ - одночастичный Гамильтониан (гамильтониан одной отдельно взятой частицы в тех же силовых полях, что и весь газ)

Переменные в УШ разделяются

$\hat{H}_1 \varphi_{\mathbb{N}}(\xi) = \varepsilon_{\mathbb{N}} \varphi_{\mathbb{N}}(\xi) \Rightarrow \{\varepsilon_{\mathbb{N}}\}, \{\varphi_{\mathbb{N}}(\xi)\}$ - одночастичный энергетический спектр и волновые функции одночастичных стационарных состояний

Одночастичное стационарное состояние - (стационарных состояний одной отдельно взятой частицы в тех же силовых полях, что и весь газ)

$$E = \sum_{\mathbb{N}} \varepsilon_{\mathbb{N}} N_{\mathbb{N}};$$

$\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) = \varphi_{\mathbb{N}_1}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{N}_2}(\xi_2) \dots \varphi_{\mathbb{N}_N}(\xi_N)$ - решение УШ для газа.

Однако оно не удовлетворяет перестановочной симметрии, и, следовательно не является волновой функцией системы тождественных частиц. Следовательно, нужно брать линейные комбинации соответствующих произведений

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) = \sum_p C_p \varphi_{\mathbb{N}_1}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{N}_2}(\xi_2) \dots \varphi_{\mathbb{N}_N}(\xi_N)$$

Коэффициенты C нужно подобрать так, чтобы волновая функция обладала соответствующей симметрией относительно перестановки координат двух частиц (для фермионов была антисимметричной для бозонов симметричной)

Фермионы

$$\psi_{\emptyset_1, \emptyset_2}(\xi_1, \xi_2) = C_1 \varphi_{\emptyset_1}(\xi_1) \varphi_{\emptyset_2}(\xi_2) + C_2 \varphi_{\emptyset_2}(\xi_1) \varphi_{\emptyset_1}(\xi_2)$$

$$\psi_{\emptyset_1, \emptyset_2}(\xi_1, \xi_2) = -\psi_{\emptyset_1, \emptyset_2}(\xi_2, \xi_1)$$

$$C_1 \varphi_{\emptyset_1}(\xi_1) \varphi_{\emptyset_2}(\xi_2) + C_2 \varphi_{\emptyset_2}(\xi_1) \varphi_{\emptyset_1}(\xi_2) \equiv C_1 \varphi_{\emptyset_1}(\xi_2) \varphi_{\emptyset_2}(\xi_1) + C_2 \varphi_{\emptyset_2}(\xi_2) \varphi_{\emptyset_1}(\xi_1)$$

$$C_2 = -C_1$$

$$\psi_{\emptyset_1, \emptyset_2}(\xi_1, \xi_2) = C \cdot \{ \varphi_{\emptyset_1}(\xi_1) \varphi_{\emptyset_2}(\xi_2) - \varphi_{\emptyset_2}(\xi_1) \varphi_{\emptyset_1}(\xi_2) \}$$

$$\int d\xi_1 d\xi_2 \left| \psi_{\emptyset_1, \emptyset_2}(\xi_1, \xi_2) \right|^2 = 1 \quad \left| \int d\xi \left| \varphi_{\emptyset}(\xi) \right|^2 = 1 \right. \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi(\xi_1, \emptyset, \xi_i, \emptyset, \xi_j, \emptyset, \xi_N) = \sum_p C_p \varphi_{\emptyset_1}(\xi_1) \varphi_{\emptyset_1}(\xi_2) \emptyset \varphi_{\emptyset_N}(\xi_N) \rightarrow \psi(\xi_1, \emptyset, \xi_i, \emptyset, \xi_j, \emptyset) = -\psi(\xi_1, \emptyset, \xi_j, \emptyset, \xi_i, \emptyset)$$

$$\psi(\{\xi_i\}_{i=1}^N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\emptyset_1}(\xi_1) & \varphi_{\emptyset_1}(\xi_2) & \emptyset & \varphi_{\emptyset_1}(\xi_N) \\ \varphi_{\emptyset_2}(\xi_1) & \varphi_{\emptyset_2}(\xi_2) & \emptyset & \varphi_{\emptyset_2}(\xi_N) \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \varphi_{\emptyset_N}(\xi_1) & \varphi_{\emptyset_N}(\xi_2) & \emptyset & \varphi_{\emptyset_N}(\xi_N) \end{vmatrix}; \quad E = \sum_{\emptyset} \varepsilon_{\emptyset} N_{\emptyset}; \quad N = \sum_{\emptyset} N_{\emptyset}$$

В стационарном состоянии всего ферми-газа каждый фермион находится в одном из одночастичных стационарных состояний. Стационарное состояние всего ферми-газа (его микросостояние) можно задать, указав число фермионов в каждом из стационарных состояний (числа заполнения стационарных состояний)

Возможно ли микросостояние ферми-газа, в котором оба фермиона находятся в одном и том же стационарном состоянии?

$$\psi(\{\xi_i\}_{i=1}^N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\boxtimes_1}(\xi_1) & \varphi_{\boxtimes_1}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\boxtimes_1}(\xi_N) \\ \varphi_{\boxtimes_2}(\xi_1) & \varphi_{\boxtimes_2}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\boxtimes_2}(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\boxtimes_N}(\xi_1) & \varphi_{\boxtimes_N}(\xi_2) & \cdots & \varphi_{\boxtimes_N}(\xi_N) \end{vmatrix}$$

$\boxtimes_i = \boxtimes_j \Rightarrow \psi(\{\xi_i\}_{i=1}^N) \equiv 0 \Rightarrow$ Принцип запрета Паули (в одном и том же одночастичном стационарном состоянии одновременно не может находиться более одного фермиона)

В ферми-газе число заполнения одночастичного состояния может принимать только два значения

$N_{\boxtimes} = 0$ - состояние пустое

$N_{\boxtimes} = 1$ - в состоянии есть один фермион

Бозоны

$$\psi_{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2}(\xi_1, \xi_2) = C_1 \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_2) + C_2 \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_2)$$

$$\psi_{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2}(\xi_1, \xi_2) = \psi_{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2}(\xi_2, \xi_1)$$

$$C_1 \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_2) + C_2 \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_2) \equiv C_1 \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_2) \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_1) + C_2 \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_2) \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_1)$$

$$C_2 = C_1$$

$$\psi_{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2}(\xi_1, \xi_2) = C \cdot \{ \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_2) + \varphi_{\mathbb{Q}_2}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_2) \}$$

$$\int d\xi_1 d\xi_2 \left| \psi_{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2}(\xi_1, \xi_2) \right|^2 = 1 \quad \left| \int d\xi \left| \varphi_{\mathbb{Q}}(\xi) \right|^2 = 1 \right. \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\psi(\xi_1, \mathbb{Q} \xi_i, \mathbb{Q} \xi_j, \mathbb{Q} \xi_N) = \sum_p C_p \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_2) \mathbb{Q} \varphi_{\mathbb{Q}_N}(\xi_N) \rightarrow \psi(\xi_1, \mathbb{Q} \xi_i, \mathbb{Q} \xi_j, \mathbb{Q}) = \psi(\xi_1, \mathbb{Q} \xi_j, \mathbb{Q} \xi_i, \mathbb{Q})$$

$$\psi(\{\xi_i\}_{i=1}^N) = \left(\frac{N_{\mathbb{Q}_1}! N_{\mathbb{Q}_2}! \mathbb{Q}}{N!} \right)^{1/2} \sum_p \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_1) \varphi_{\mathbb{Q}_1}(\xi_2) \mathbb{Q} \varphi_{\mathbb{Q}_N}(\xi_N); \quad E = \sum_{\mathbb{Q}} \varepsilon_{\mathbb{Q}} N_{\mathbb{Q}}; \quad N = \sum_{\mathbb{Q}} N_{\mathbb{Q}}$$

В стационарном состоянии всего бозе-газа каждый бозон находится в одном из одночастичных стационарных состояний. Стационарное состояние бозе-газа (его микросостояние) можно задать, указав число фермионов в каждом из стационарных состояний (числа заполнения стационарных состояний). В случае бозе-газа нет ограничения на числа заполнения одночастичного состояния.

В стационарном состоянии идеального газа из тождественных частиц каждая из частиц находится в одном из одночастичных стационарных состояний (стационарном состоянии одной отдельно взятой частицы в тех же самых силовых полях, что и весь газ). Микросостояние всего газа в целом можно задать, указав числа заполнения одночастичных стационарных состояний

$$E(\{N_{\alpha}\}) = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} N_{\alpha}; \quad N(\{N_{\alpha}\}) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}$$

В **ферми-газе** действует фундаментальное ограничение на значения чисел заполнения одночастичных стационарных состояний – **Принцип запрета Паули**, согласно которому в одном и том же одночастичном состоянии одновременно не может находиться более одного фермиона.

В бозе-газе такого ограничения на числа заполнения нет.

$$W(\{N_{\mathbb{N}}\}) = \frac{1}{Q} \exp\left\{-\frac{E(\{N_{\mathbb{N}}\}) - \mu N(\{N_{\mathbb{N}}\})}{\theta}\right\}; \quad Q = \sum_{\{N_{\mathbb{N}}\}} \exp\left\{-\frac{E(\{N_{\mathbb{N}}\}) - \mu N(\{N_{\mathbb{N}}\})}{\theta}\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{E(\{N_{\mathbb{N}}\}) - \mu N(\{N_{\mathbb{N}}\})}{\theta}\right\} = \exp\left\{-\frac{\sum_{\mathbb{N}} \varepsilon_{\mathbb{N}} N_{\mathbb{N}} - \mu \sum_{\mathbb{N}} N_{\mathbb{N}}}{\theta}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\sum_{\mathbb{N}} \frac{(\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu)}{\theta} N_{\mathbb{N}}\right\} = \prod_{\mathbb{N}} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu)}{\theta} N_{\mathbb{N}}\right\}$$

$$Q = \sum_{\{N_{\mathbb{N}}\}} \prod_{\mathbb{N}} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu)}{\theta} N_{\mathbb{N}}\right\} = \sum_{N_{\mathbb{N}_1}} \sum_{N_{\mathbb{N}_2}} \cdots \sum_{N_{\mathbb{N}_i}} \prod_{\mathbb{N}} \exp\left\{-\frac{(\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu)}{\theta} N_{\mathbb{N}}\right\} =$$

$$Q = \prod_{\mathbb{N}} q_{\mathbb{N}}; \quad q_{\mathbb{N}} = \sum_{N_{\mathbb{N}}} \exp\left\{\frac{(\mu - \varepsilon_{\mathbb{N}})}{\theta} N_{\mathbb{N}}\right\}$$

$$Q = \prod_{\ell} q_{\ell}; \quad q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}} \exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}$$

$$W(\{N_{\ell}\}) = \frac{1}{Q} \exp \left\{ - \frac{E(\{N_{\ell}\}) - \mu N(\{N_{\ell}\})}{\theta} \right\} = \prod_{\ell} w_{\ell}(N_{\ell})$$

$$w_{\ell}(N_{\ell}) = \frac{\exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}}{q_{\ell}} \quad - \text{вероятность того, что в состоянии } \ell \text{ есть } N_{\ell} \text{ частиц}$$

1) Фермионы $N_{\ell} = 0, 1$

$$q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}=0}^1 \exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\} = 1 + \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\}$$

$$\Omega = -\theta \ln Q = -\theta \sum_{\ell} \ln \left(1 + \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\} \right)$$

$$w_{\ell}(N_{\ell} = 1) = \frac{\exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\}}{1 + \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\}} = \frac{1}{\exp \left\{ \frac{\varepsilon_{\ell} - \mu}{\theta} \right\} + 1} \quad - \text{вероятность того, что состояние } \ell \text{ занято фермионом}$$

$$w_{\ell}(N_{\ell} = 0) = \frac{1}{1 + \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\}} = 1 - w_{\ell}(N_{\ell} = 1) \quad - \text{вероятность того, что состояние } \ell \text{ пустое}$$

$$w_{\mathbb{N}}(N_{\mathbb{N}}) = \frac{1}{1 + \exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon_{\mathbb{N}}}{\theta}\right\}} \exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon_{\mathbb{N}}}{\theta} \cdot N_{\mathbb{N}}\right\}$$

$$\langle N_{\mathbb{N}} \rangle = \sum_{N_{\mathbb{N}}=0}^1 N_{\mathbb{N}} w_{\mathbb{N}}(N_{\mathbb{N}}) = w_{\mathbb{N}}(N_{\mathbb{N}}=1) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu}{\theta}\right\} + 1}$$

$$\langle N_{\mathbb{N}} \rangle = w_{\mathbb{N}}(N_{\mathbb{N}}=1) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu}{\theta}\right\} + 1} \quad - \text{распределение Ферми-Дирака}$$

$$\Omega = -\theta \ln Q = -\theta \sum_{\mathbb{N}} \ln\left(1 + \exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon_{\mathbb{N}}}{\theta}\right\}\right)$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu}{\theta}\right\} + 1} = \sum_{\mathbb{N}} \langle N_{\mathbb{N}} \rangle = \sum_{\mathbb{N}} N_F(\varepsilon_{\mathbb{N}})$$

$$E = \Omega - \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \mu \langle N \rangle = \sum_{\mathbb{N}} \varepsilon_{\mathbb{N}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_{\mathbb{N}} - \mu}{\theta}\right\} + 1} = \sum_{\mathbb{N}} \varepsilon_{\mathbb{N}} \langle N_{\mathbb{N}} \rangle = \sum_{\mathbb{N}} \varepsilon_{\mathbb{N}} N_F(\varepsilon_{\mathbb{N}})$$

$$N_F(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon - \mu}{\theta}\right\} + 1} - \text{функция Ферми} \Rightarrow \langle N_{\mathbb{N}} \rangle = N_F(\varepsilon_{\mathbb{N}})$$

$$Q = \prod_{\ell} q_{\ell}; \quad q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}} \exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}$$

$$W(\{N_{\ell}\}) = \frac{1}{Q} \exp \left\{ - \frac{E(\{N_{\ell}\}) - \mu N(\{N_{\ell}\})}{\theta} \right\} = \prod_{\ell} w_{\ell}(N_{\ell})$$

$$w_{\ell}(N_{\ell}) = \frac{\exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}}{q_{\ell}} \quad - \text{вероятность того, что в состоянии } \ell \text{ есть } N_{\ell} \text{ частиц}$$

2) Бозоны $N_{\ell} = 0, 1, 2, \dots$

$$q_{\ell} = \sum_{N_{\ell}=0}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} N_{\ell} \right\}$$

Если $\mu > \varepsilon_0$, то для $\varepsilon_{\ell} < \mu$ ряд расходится $\Rightarrow$ в бозе-газе $\mu < \varepsilon_0$ — основной уровень энергии

$$q_{\ell} = 1 + \exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\} + \exp \left\{ 2 \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\} + \dots = \frac{1}{1 - \exp \left\{ \frac{(\mu - \varepsilon_{\ell})}{\theta} \right\}}$$

$$\Omega = \theta \ln Q = \theta \sum_{\ell} \ln \left(1 - \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\ell}}{\theta} \right\} \right)$$

Вероятность того, что в состоянии ℓ находится N_ℓ бозонов

$$w_\boxtimes(N_\boxtimes) = \frac{\exp\{-\gamma \cdot N_\boxtimes\}}{q_\boxtimes}; \quad q_\boxtimes = \frac{1}{1 - \exp\{-\gamma\}}; \quad \gamma = \frac{\varepsilon_\boxtimes - \mu}{\theta}$$

$$\begin{aligned} \langle N_\boxtimes \rangle &= \sum_{N=0}^{+\infty} N w_\boxtimes(N) = \frac{1}{q_\boxtimes} \sum_{N=0}^{+\infty} N \exp\{-\gamma \cdot N\} = -\frac{1}{q_\boxtimes} \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \gamma} \exp\{-\gamma \cdot N\} = \\ &= -\frac{1}{q_\boxtimes} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{N=0}^{+\infty} \exp\{-\gamma \cdot N\} = -(1 - \exp\{-\gamma\}) \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{1}{1 - \exp\{-\gamma\}} \end{aligned}$$

$$\langle N_\boxtimes \rangle = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_\boxtimes - \mu}{\theta}\right\} - 1}$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_\boxtimes \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_\boxtimes - \mu}{\theta}\right\} - 1} = \sum_\boxtimes \langle N_\boxtimes \rangle = \sum_\boxtimes N_B(\varepsilon_\boxtimes)$$

$$E = \Omega - \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \mu \langle N \rangle = \sum_\boxtimes \varepsilon_\boxtimes \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_\boxtimes - \mu}{\theta}\right\} - 1} = \sum_\boxtimes \varepsilon_\boxtimes \langle N_\boxtimes \rangle = \sum_\boxtimes \varepsilon_\boxtimes N_F(\varepsilon_\boxtimes)$$

$$N_B(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon - \mu}{\theta}\right\} - 1} - \text{функция Бозе - Эйнштейна} \Rightarrow \langle N_\boxtimes \rangle = N_B(\varepsilon_\boxtimes)$$

Идеальный газ из тождественных частиц

$$\langle N_{\boxtimes} \rangle = \frac{1}{\exp\left\{\frac{\varepsilon_{\boxtimes} - \mu}{\theta}\right\} \pm 1}; \begin{cases} + \text{ для фермионов} \\ - \text{ для бозонов} \end{cases}$$

$$\Omega = \boxtimes \theta \sum_{\boxtimes} \ln\left(1 \pm \exp\left\{\frac{\mu - \varepsilon_{\boxtimes}}{\theta}\right\}\right); \begin{cases} \text{верхний знак} - \text{фермионы} \\ \text{нижний знак} - \text{бозоны} \end{cases}$$

$$A_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}$$

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_{\boxtimes} N_{F/B}(\varepsilon_{\boxtimes})$$

$$E = \Omega - \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \mu \langle N \rangle = \sum_{\boxtimes} \varepsilon_{\boxtimes} N_{F/B}(\varepsilon_{\boxtimes})$$

Нужно вычислять $\sum_{\boxtimes} f(\varepsilon_{\boxtimes})$

Нужно вычислять $\sum_{\mathbb{N}} f(\varepsilon_{\mathbb{N}})$

Нужно перейти от суммирования по квантовым числам к интегрир. по энергии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbb{N}}) = f(\varepsilon_{\mathbb{N}})$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbb{N}} f(\varepsilon_{\mathbb{N}}) &= \sum_{\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbb{N}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \left[\sum_{\mathbb{N}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbb{N}}) \right] f(\varepsilon) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon), \quad g(\varepsilon) = \left[\sum_{\mathbb{N}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbb{N}}) \right] \end{aligned}$$

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon} d\varepsilon g(\varepsilon) = \sum_{\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbb{N}}) = \sum_{\mathbb{N}} \begin{cases} 1, & \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon} d\varepsilon g(\varepsilon) = \sum_{\substack{\mathbb{N} \\ \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon}} 1 \quad - \text{число состояний с энергией в интервале } \varepsilon_0 - \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

$g(\varepsilon)$ - плотность одночастичных стационарных состояний

$dN = g(\varepsilon) d\varepsilon$ - Число состояний с энергией в физ. беск. малом интерв

$$\sum_{\mathbb{E}} f(\varepsilon_{\mathbb{E}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon), \quad g(\varepsilon) = \sum_{\mathbb{E}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbb{E}})$$

$$\bar{N} = \sum_{\mathbb{E}} N_{F/B}(\varepsilon_{\mathbb{E}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) N_{F/B}(\varepsilon)$$

$$E = \sum_{\mathbb{E}} \varepsilon_{\mathbb{E}} N_{F/B}(\varepsilon_{\mathbb{E}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) N_{F/B}(\varepsilon) \varepsilon$$

$$\Omega = \mathbb{E} \theta \sum_{\mathbb{E}} \ln \left[1 \pm \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_{\mathbb{E}}}{\theta} \right\} \right] = \mathbb{E} \theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \ln \left[1 \pm \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon}{\theta} \right\} \right]$$

Через плотность состояний можно выразить любую макроскопическую характеристику. Особенности в плотности состояний проявляются в наблюдаемых величинах.

Идеальный ферми-газ можно описать, если известны плотность одночастичных стационарных состояний и химический потенциал

Конденсация бозе-Эйнштейна

$$\bar{N}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu}{\theta}\right) - 1}; \varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$T = 0 \quad \bar{N}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} N, & \mathbf{k} = 0 \\ 0, & \mathbf{k} \neq 0 \end{cases}$$

$$T \neq 0 \quad \bar{N}_0 = \frac{1}{\exp\left(-\frac{\mu}{\theta}\right) - 1} \Rightarrow \mu = -\theta \ln\left(\frac{1}{\bar{N}_0} + 1\right)$$

При достаточно низких температурах, когда $\bar{N}_0 \gg 1$,

$\mu = -\frac{\theta}{\bar{N}_0}$ мал по сравнению с первым возбужденным состоянием. $\Rightarrow \mu \rightarrow 0$

$$N - \bar{N}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{\theta}\right) - 1} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m\theta}\right) - 1} =$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \cdot \int_0^{+\infty} dk \frac{k^2}{\exp\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m\theta}\right) - 1}$$

Замена $x \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m\theta}$

$$N - \bar{N}_0 = \left[V \cdot \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^2} \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{1/2}}{\exp(x) - 1} \cdot \frac{1}{N} \right] \cdot N\theta^{3/2}$$

$$\bar{N}_0 = N \cdot \left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{3/2} \right]; \frac{1}{\theta_0} = \left[V \cdot \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^2} \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{1/2}}{\exp(x) - 1} \cdot \frac{1}{N} \right]^{2/3}$$