УСКОРЕНИЕ

Ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости со временем.

Среднее ускорение равно отношению изменения вектора скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло.

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение равно производной вектора скорости по времени.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

Так как $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$, то

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Ускорение равно второй производной радиус-вектора по времени.

$$[a] = \left[\frac{м}{с^2}\right]$$

Компоненты ускорения

Представим вектор скорости как

$$\vec{v} = v\vec{\tau}. \qquad \left(\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{\tau}\right)$$

Вычислим ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(v\vec{\tau}\right)}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Первое слагаемое в формуле

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

дает вектор, направленный **по касательной к траектории**. Его называют **касательным** или **тангенциальным** ускорением.

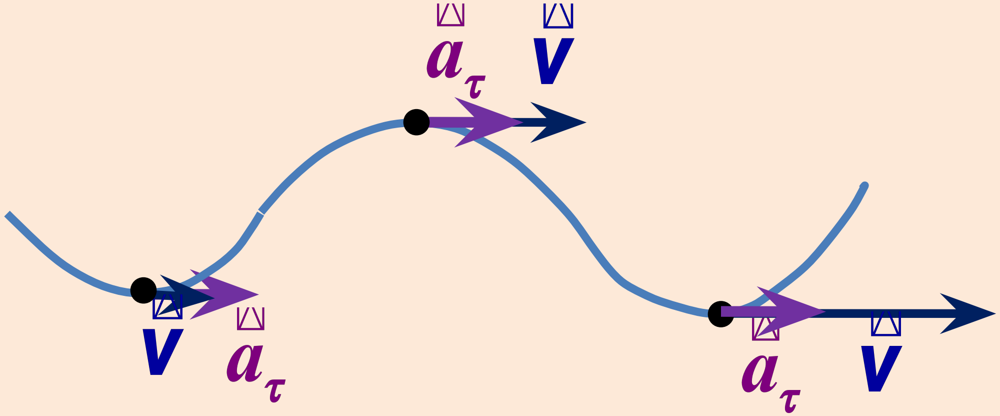
$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

По величине тангенциальное ускорение равно производной модуля скорости по времени

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

и показывает, как быстро величина скорости меняется со временем.

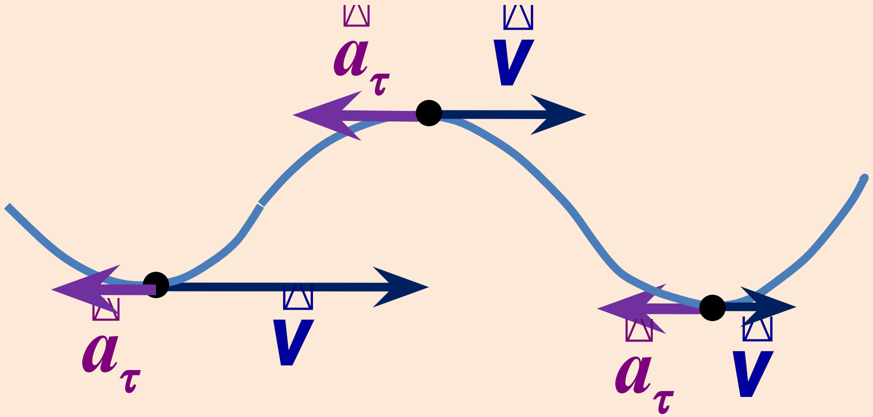
Тело разгоняется



$$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$$

$$a_\tau > 0$$

Тело тормозит



$$\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$$

$$a_\tau < 0$$

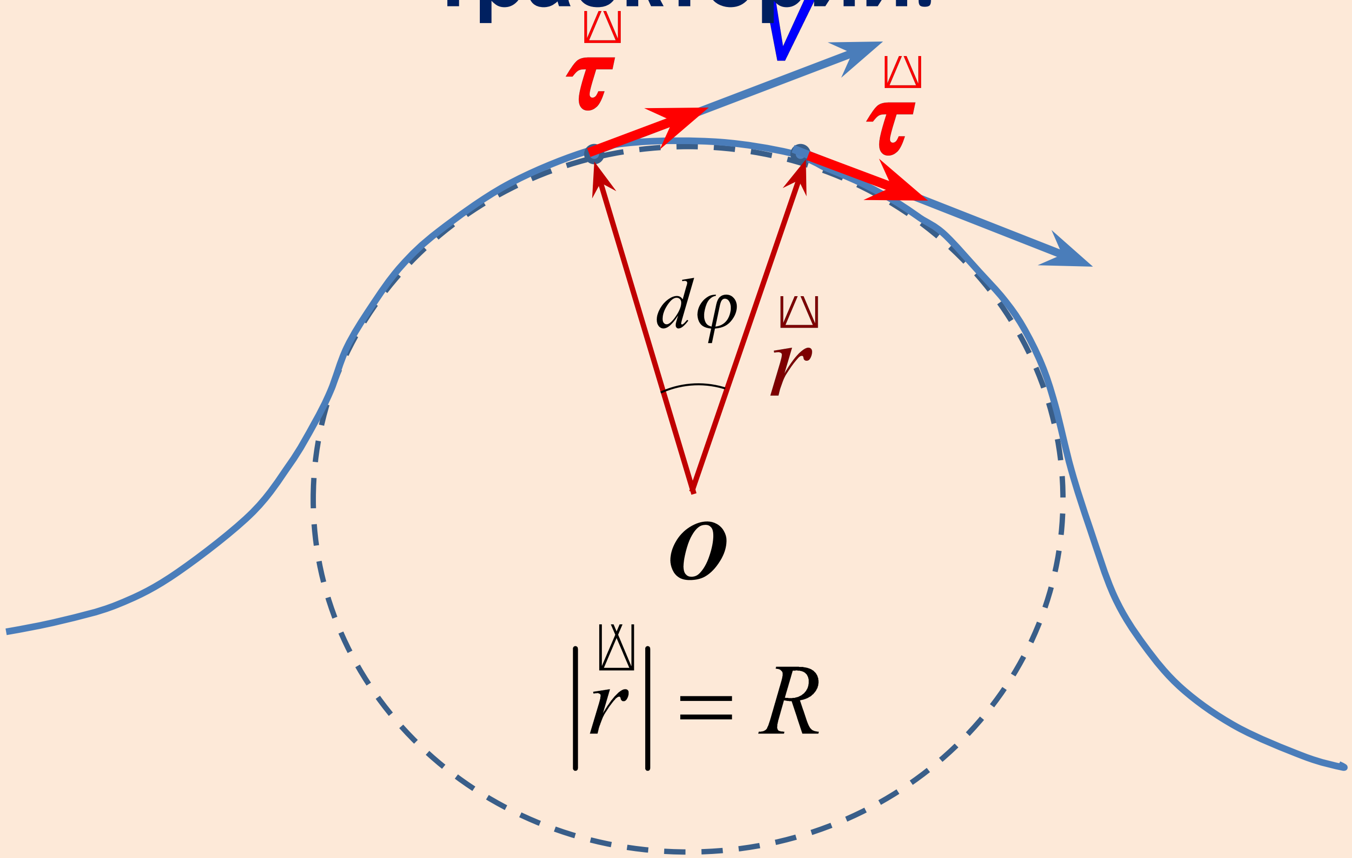
Второе слагаемое в формуле

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

дает **нормальную компоненту ускорения**

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Проведем окружность, дуга которой совпадает с некоторым участком траектории.



Точка O – центр кривизны траектории, радиус окружности R – радиус кривизны траектории на данном участке.

Если радиус-вектор $\vec{r}$ повернулся на угол $d\varphi$,

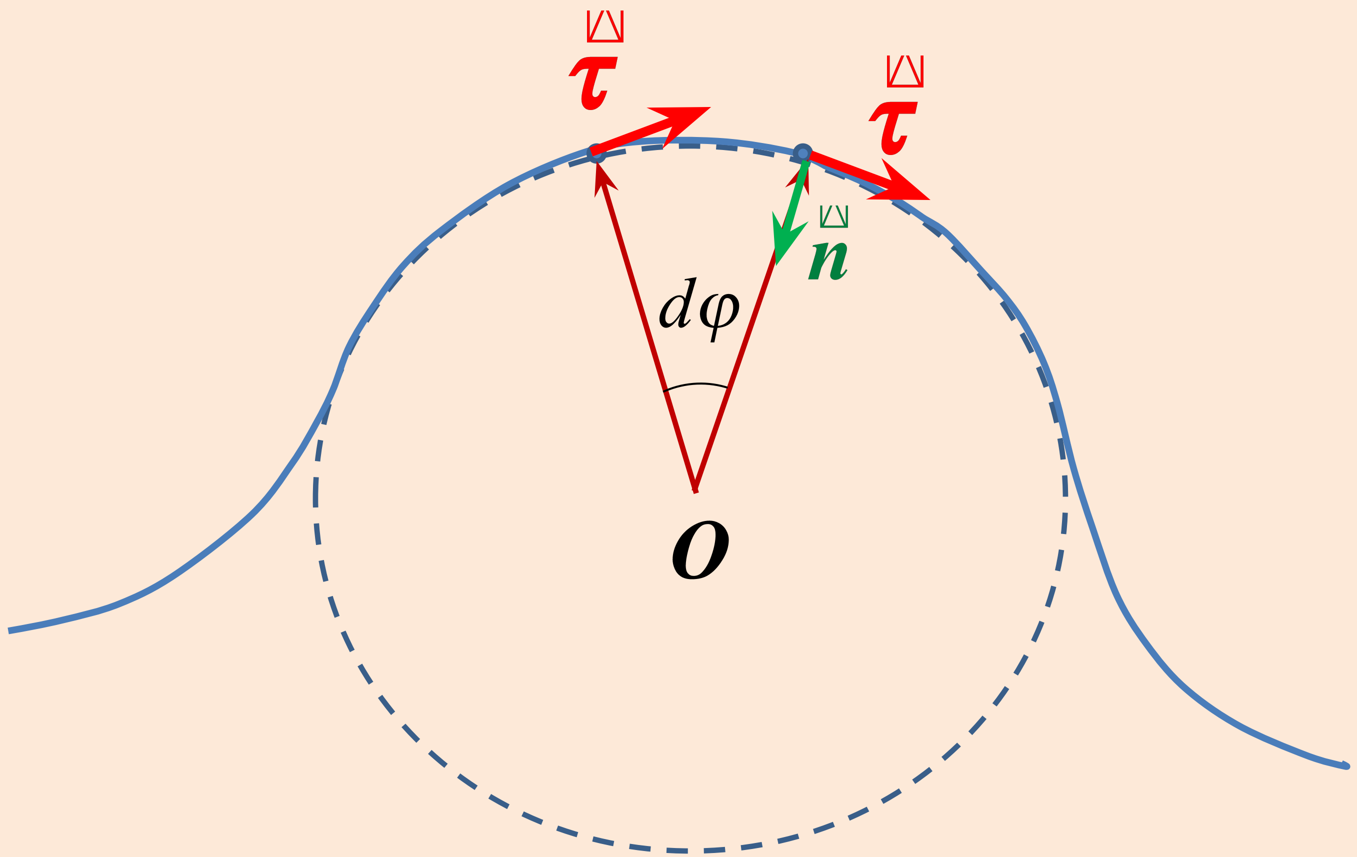
то и вектор $\vec{\tau}$ повернулся на угол $d\varphi$.

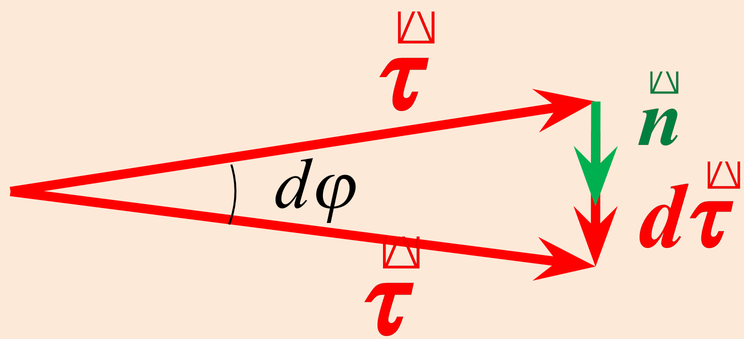
Преобразуем

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{ds}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi}$$

$$\vec{a}_n = v\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi}$$

$\frac{ds}{dt} \to v$, $\frac{d\varphi}{ds} \to \frac{1}{R}$, т.к. для окружности $ds = R\cdot d\varphi$, $\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \to \vec{n}$





$$d\tau = \tau \cdot d\varphi = 1 \cdot d\varphi = d\varphi$$

$$d\vec{\tau} = d\varphi \cdot \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} = \vec{n}$$

$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к траектории движения

Направлен к центру кривизны траектории.

$$\vec{n} \perp \vec{v}$$

Нормальное ускорение

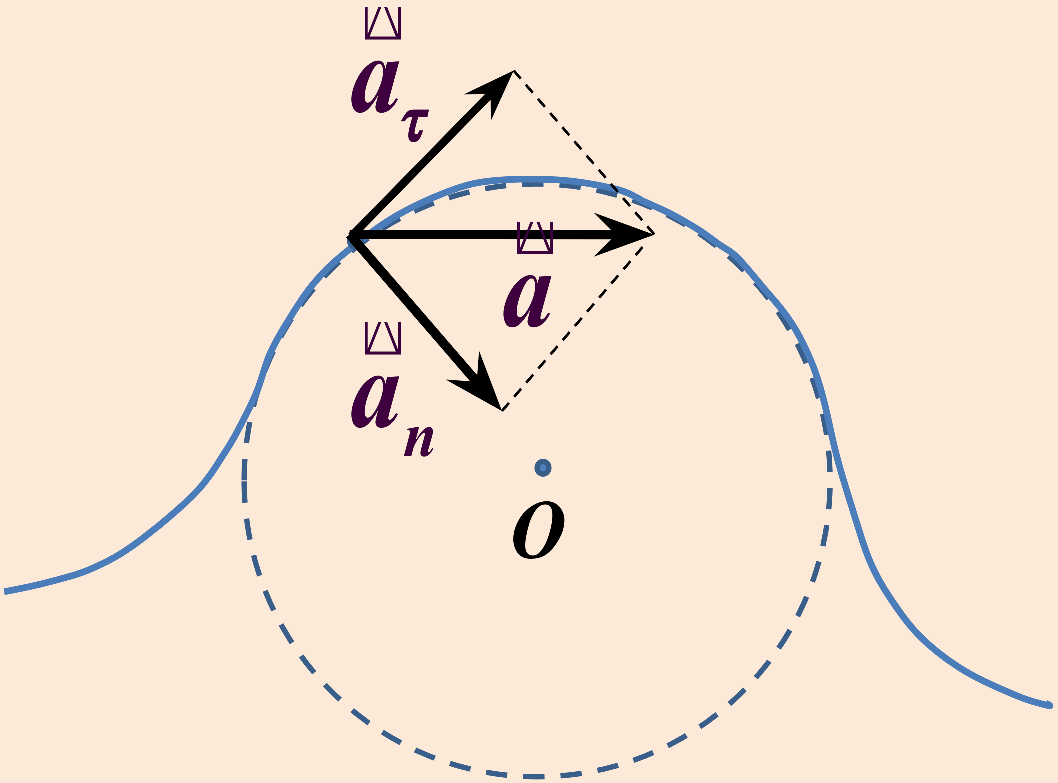
$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

По модулю

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Вектор нормального ускорения направлен к центру кривизны траектории и характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

Вектор полного ускорения $\vec{a}$ является векторной суммой тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ и нормального ускорения $\vec{a}_n$.



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

По модулю

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ

1. Равномерное движение

Равномерным называют движение с постоянной по модулю скоростью. $v = const.$

По определению $v = \frac{ds}{dt}$ $\quad ds = vdt$

$$s = \int ds = \int vdt; s = vt + C$$

$$s = s_0 + vt$$

При равномерном движении тангенциального ускорения нет! Если движение криволинейное, нормальное ускорение есть. Полное ускорение равно нормальному.

$$\vec{a} = \vec{a}_n$$

2. Равномерное прямолинейное движение

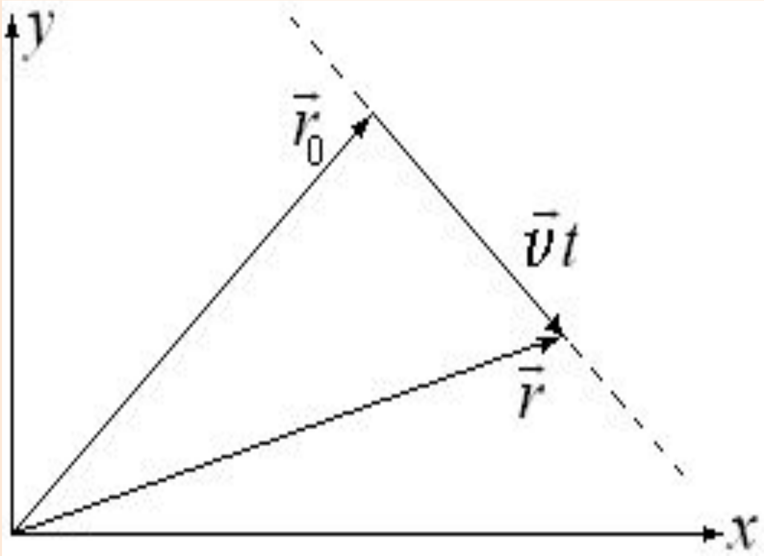
Вектор мгновенной скорости остается постоянным не только по модулю, но и по направлению. $\vec{v} = const.$

По определению

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$\vec{r} = \int d\vec{r} = \int \vec{v}\,dt;\ \vec{r} = \vec{v}t + C$$



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

3. Движение по произвольной траектории с постоянной тангенциальной составляющей вектора ускорения a_τ

По определению

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a_\tau \cdot dt$$

$$v = \int dv = \int a_\tau \, dt;$$

$$v = a_\tau t + C$$

$$v = v_0 + a_\tau t$$

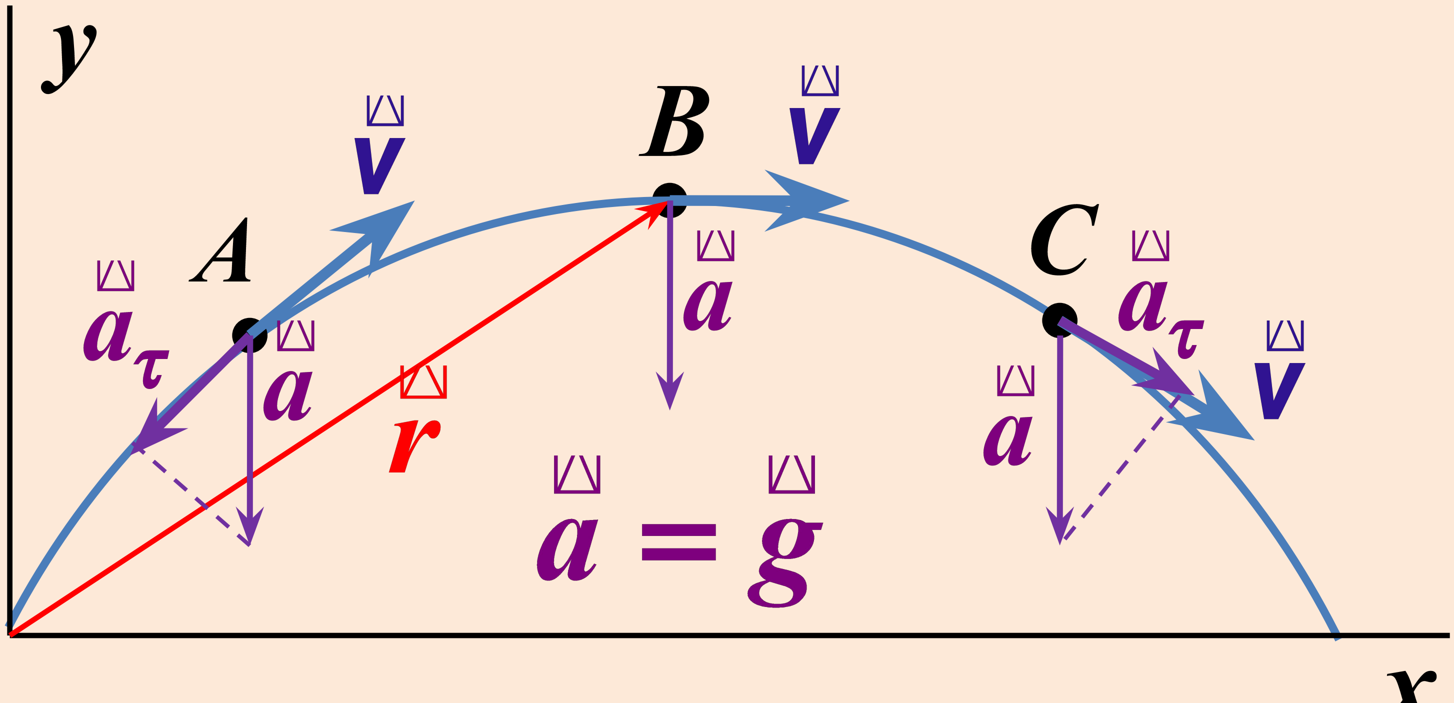
$$s = \int ds = \int v dt = \int (v_0 + a_\tau) \, dt$$

$$s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} + C$$

$$s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$$

4. Равнопеременное движение

Движение называют <u>равнопеременным</u>, если оно происходит с постоянным вектором полного ускоре $\vec{a} = const$.



По определению

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$$

$$\vec{v} = \int d\vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt = \vec{a}t + C$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

По определению

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

$$\vec{r} = \int d\vec{r} = \int \vec{v} \cdot dt = \int (\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t)dt$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} + C$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

5. Прямолинейное равнопеременное движение

В случае прямолинейного движения радиус кривизны траектории *R* стремится к бесконечности, тогда

$$\vec{a}_n = 0 \text{ и } \vec{a} = \vec{a}_\tau$$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v}$ - движение равноускоренное

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$ - движение равнозамедленное

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

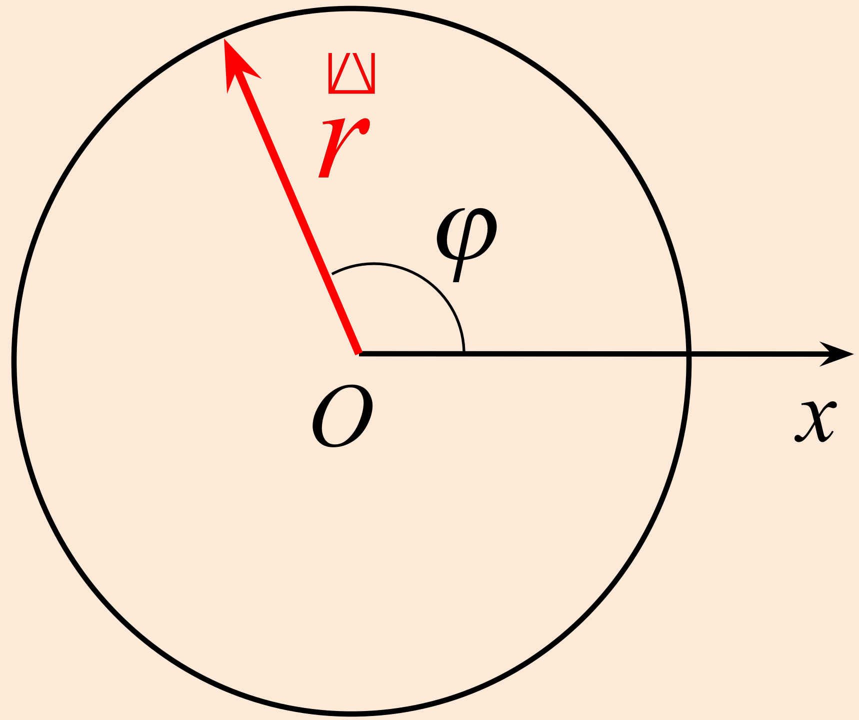
$$v = v_0 + a_\tau t$$

$$s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$$

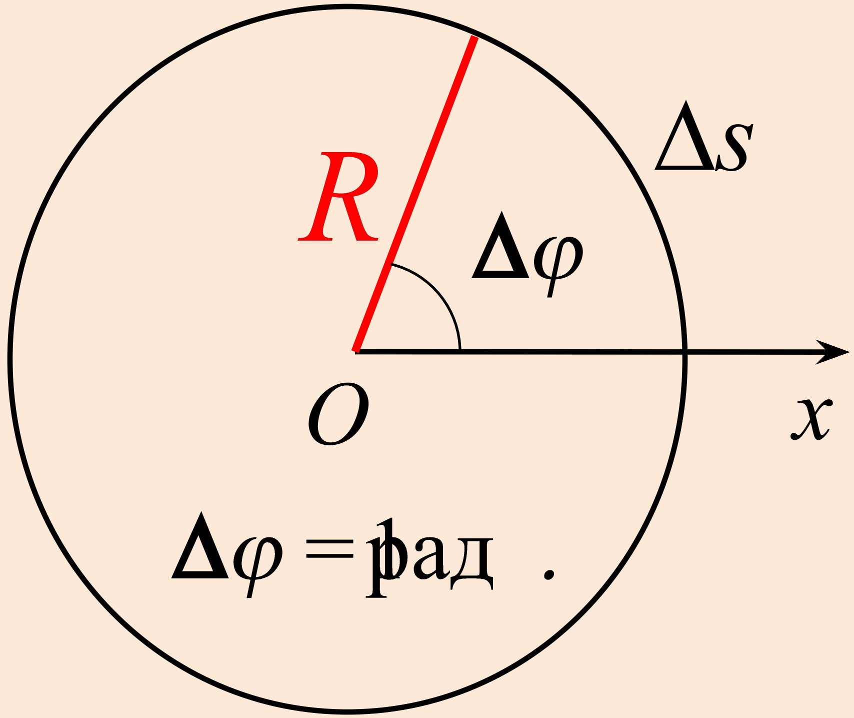
$$s = \frac{v+v_0}{2} t$$

$$s = \frac{v^2-v_0^2}{2a_\tau}$$

ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ



Движение точки по окружности задается зависимостью *φ* (*t*).
φ **– угол между радиус-вектором точки и осью *x*.**



Углом в 1 радиан называют такой центральный угол, длина дуги которого Δs равна её радиусу R.

Для произвольного угла поворота $\Delta\varphi$

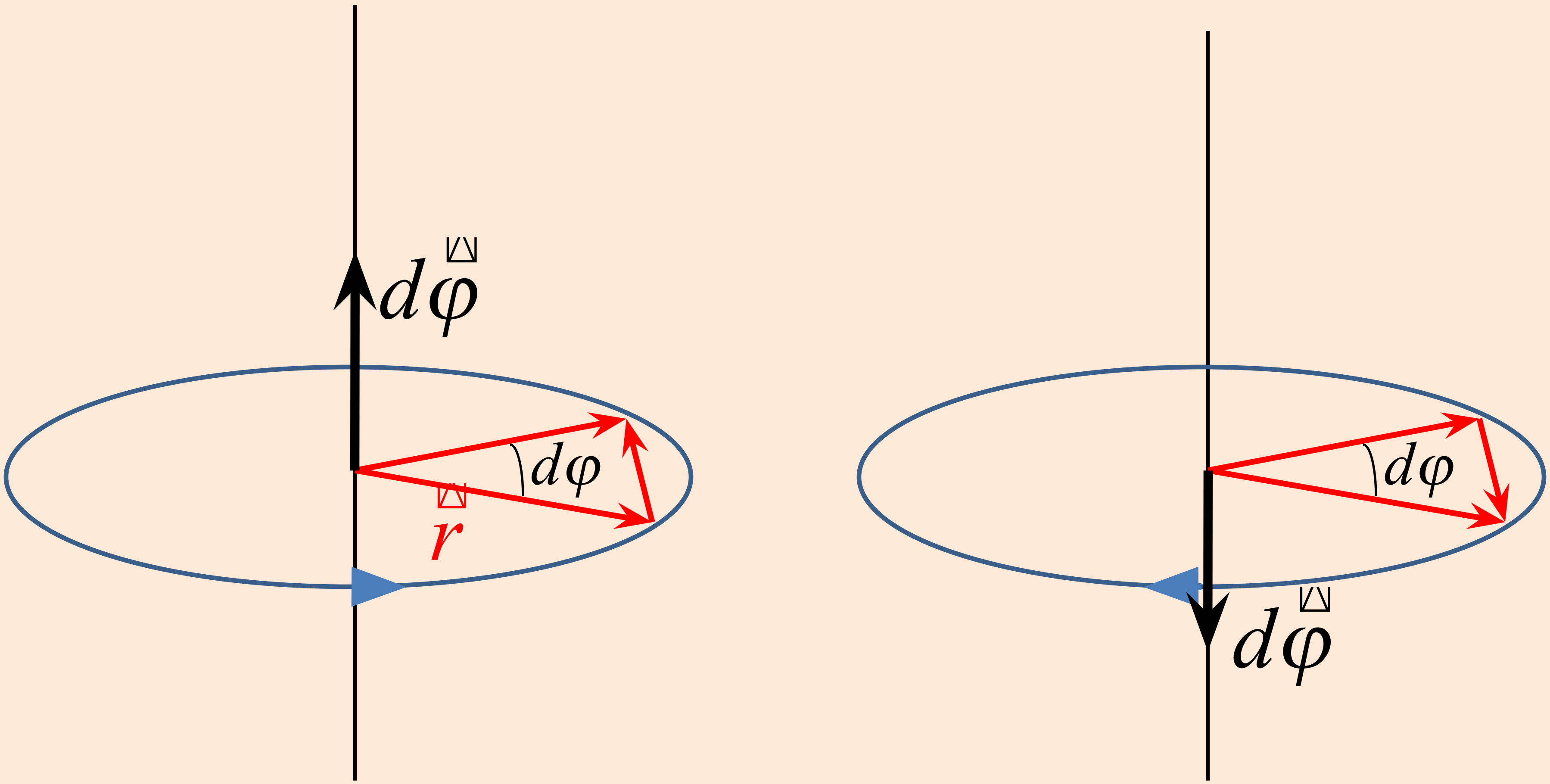
$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$$

$$\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$$

Угол в 1 оборот равен 2π радиан.

Вектор углового пути

Вектор углового пути по модулю равен углу поворота.
Его направление определяется правилом правого винта.



$d\vec{\varphi}$
$d\varphi$
$\vec{r}$
$d\varphi$
$d\vec{\varphi}$

Угловая скорость

Угловая скорость характеризует быстроту движения материальной точки по окружности.

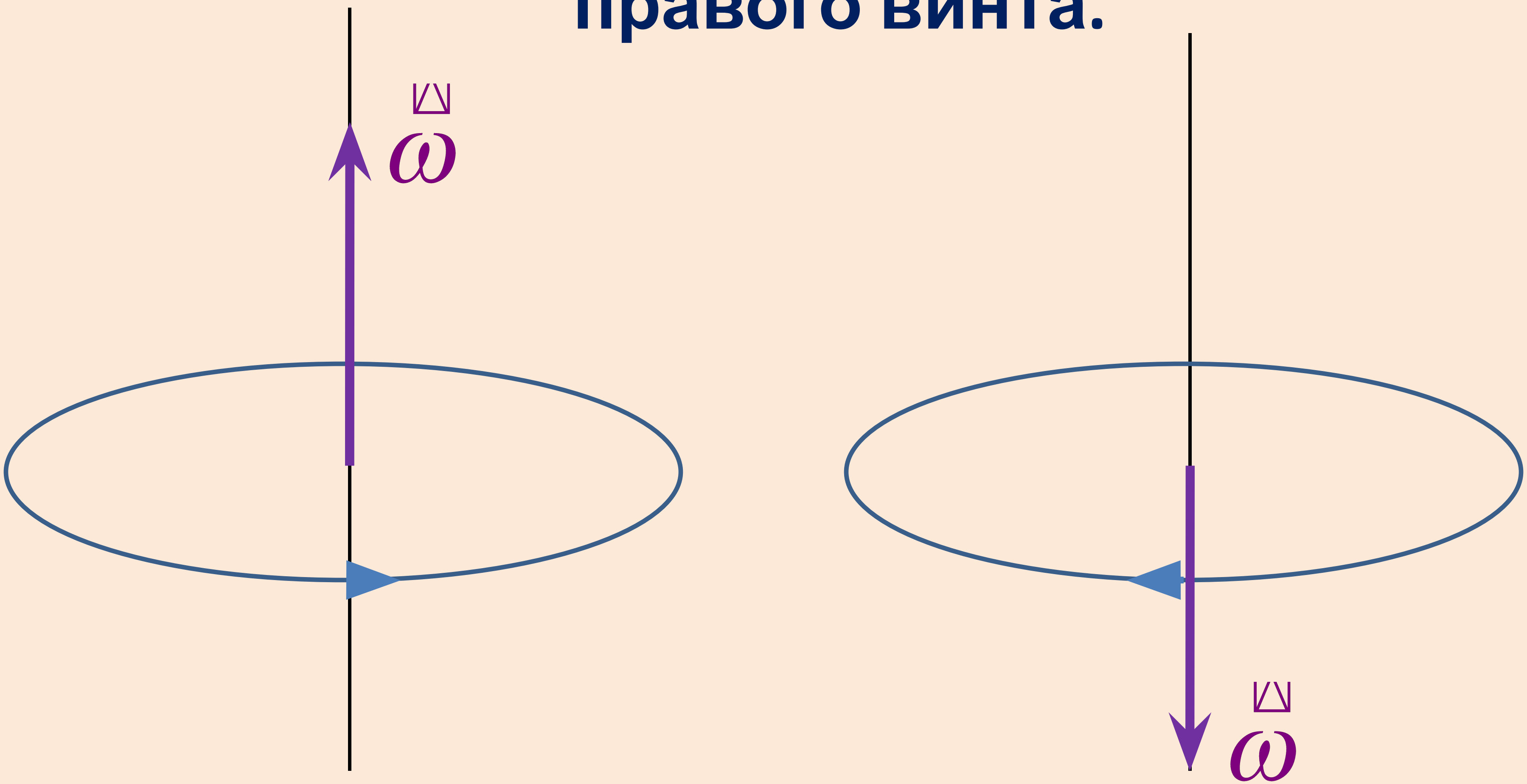
Это векторная величина равная **производной вектора углового пути по времени.**

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$[\omega] = \left[\frac{рад.}{с}\right]$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$$

Направление вектора угловой скорости также находят по правилу правого винта.



Угловое ускорение

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости со временем.

Это векторная величина равная производной угловой скорости по времени.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

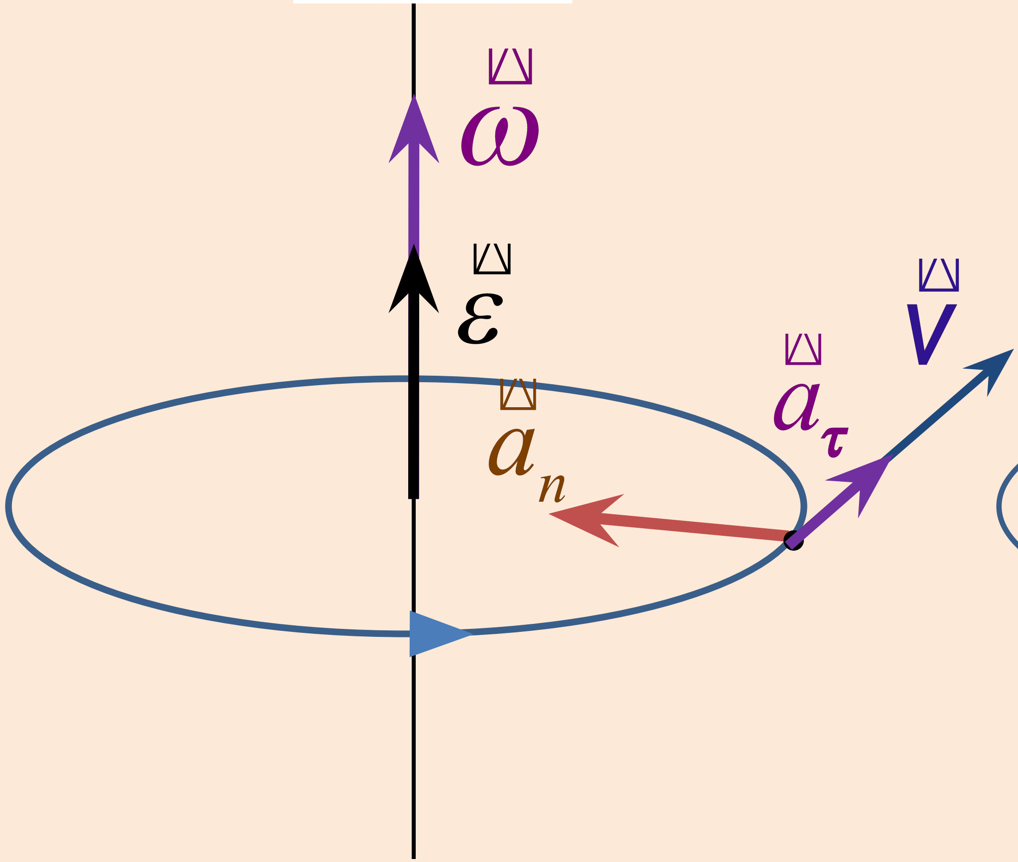
$$[\varepsilon] = \left[\frac{рад.}{с^2}\right]$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$$

Векторы углового пути, угловой скорости, углового ускорения <u>направлены вдоль оси вращения</u>.

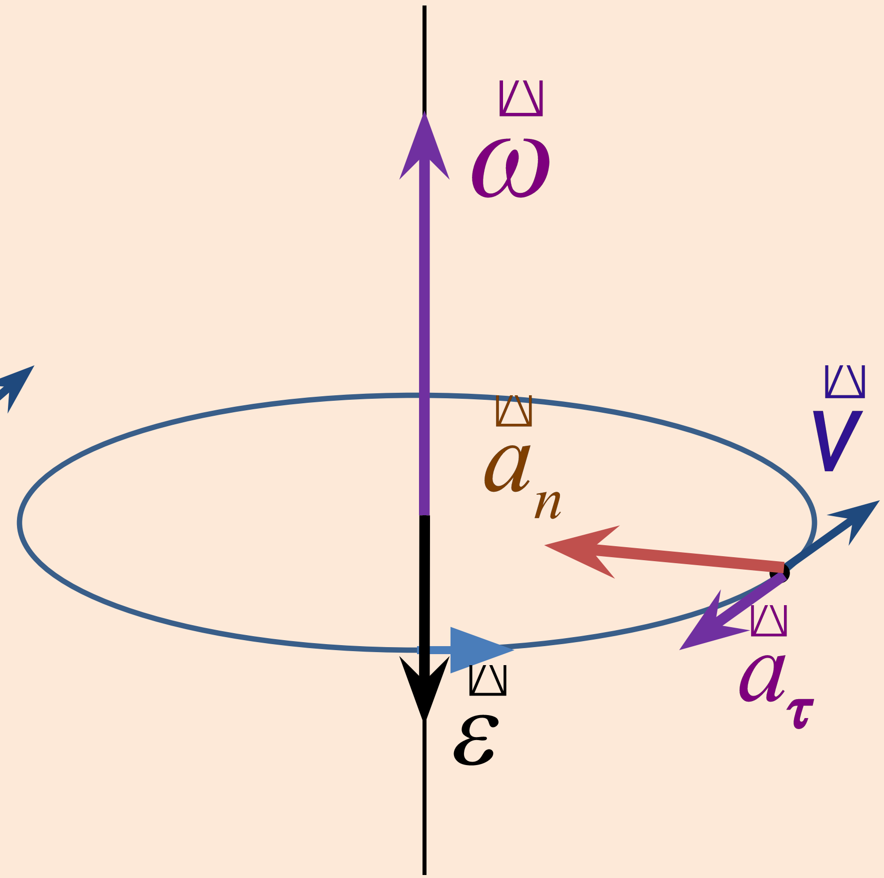
Если ***ω*** **увеличивается, то**

$\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$



Если ***ω*** **уменьшается, то**

$\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$



Связь линейных и угловых характеристик движения

Свяжем линейный и угловой пути

$$ds = R \cdot d\varphi$$

Возьмем производную по времени

$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Получим связь линейной и угловой скоростей

$$V = \omega R$$

Заметив, что векторы линейной и угловой скоростей, а также радиус-вектор взаимно перпендикулярны и связаны правилом правого винта, можно записать векторное равенство:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Снова возьмем производную по времени:

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

Получим

$$a_\tau = \varepsilon R$$

Теперь найдем нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega R v}{R} = \omega v$$

или

$$a_n = \frac{\omega^2 R^2}{R}$$

$$a_n = \omega^2 R$$

Характеристики равномерного вращения

Период T равен времени, за которое происходит один оборот.

Частота вращения ν равна числу оборотов в единицу времени.

$$T = \frac{1}{\nu} \text{ и } \nu = \frac{1}{T}$$

Угловая скорость при равномерном вращении:

$$\omega = \frac{\varphi_{об}}{t_{об}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$