

Теория возраста

E_1 – энергия нейтрона до рассеяния
 E_2 – энергия после рассеяния

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{A^2 + 2 \cdot A \cdot \cos \Theta + 1}{(A+1)^2}$$

или $\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) + (1-\alpha) \cdot \cos \Theta]$, где $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$

Отсюда следует, что:

Водород!!!

$$\frac{E_{\max}}{E_1} = 1 \quad \text{при} \quad \cos \Theta = 1, \quad \Theta = 0$$

$$\frac{E_{\min}}{E_1} = \alpha \quad \text{при} \quad \cos \Theta = -1, \quad \Theta = \pi$$

$$\frac{\Delta E_{\max}}{E_1} = \frac{E_1 - E_{\min}}{E_1} = 1 - \alpha$$

$$\text{или} \quad \alpha \cdot E_1 \leq E_2 \leq E_1$$

Средний логарифм потери энергии при одном СТОЛКНОВЕНИИ

$$\xi = \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{\int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \cdot p(E_2) dE_2}{\int_{E_1}^{\alpha E_1} p(E_2) dE_2} = - \int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \cdot \frac{dE_2}{E_1(1-\alpha)}$$

Интегрируя получим:
Поскольку это равно 1, а это равно $-\frac{dE_2}{E_1(1-\alpha)}$

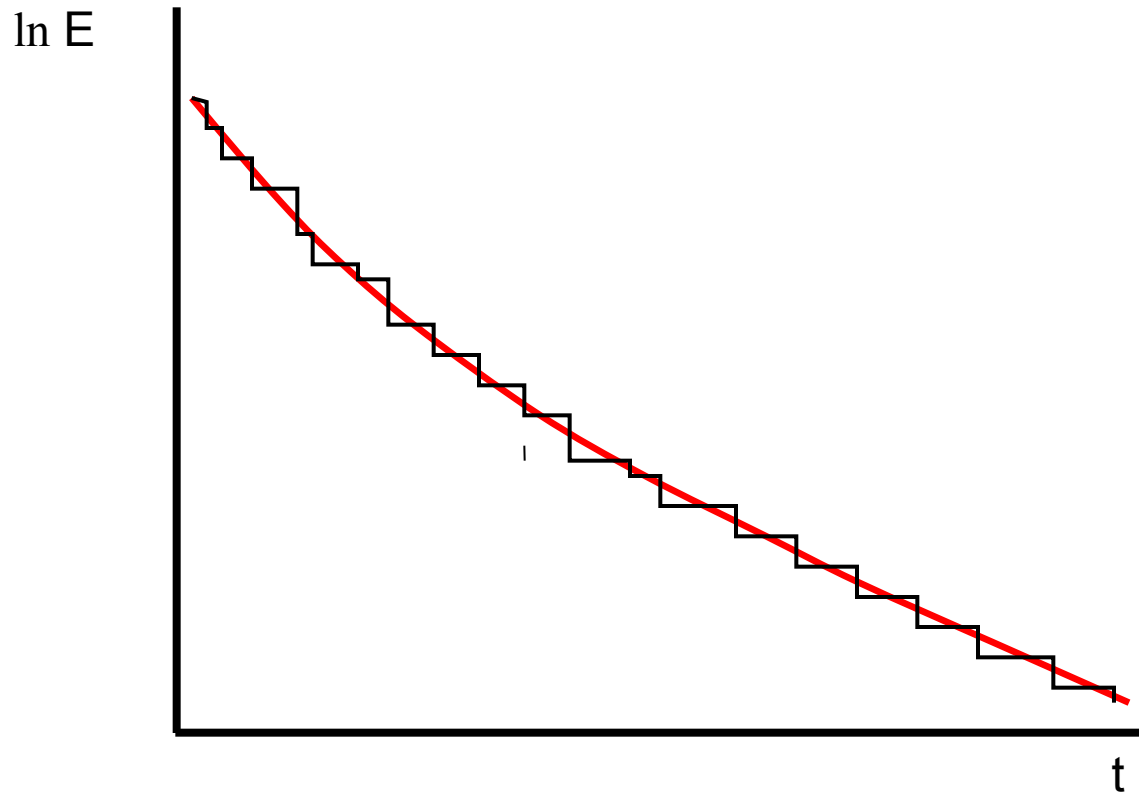
$$\xi = \frac{1}{1-\alpha} \int_1^{\alpha} \ln(x) dx = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \quad \left(\text{замена переменной } x \equiv \frac{E_2}{E_1}\right)$$

или $\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1}$, при $A > 10$ $\xi \approx \frac{2}{A+2/3}$

Летаргия

$$U = \ln\left(\frac{E_0}{E}\right)$$

Обычно $E_0 = 2 \text{ Мэв}$



Среднее число столкновений с 2 МэВ до тепловой энергии

$$N = \frac{\ln(2 \cdot 10^6 / 0.0253)}{\xi}$$

	Массовое число	ξ	N
Водород	1	1.000	18
Дейтерий	2	0.725	25
Гелий	4	0.425	43
Литий	7	0.268	67
Бериллий	9	0.209	86
Углерод	12	0.158	114
Кислород	16	0.120	150
Уран	238	0.00838	2172

λ_s - средняя длина свободного пробега по отношению к рассеянию; $\lambda_s = 1/\Sigma_s$

v – скорость нейтрона между столкновениями

$v \cdot \frac{dt}{\lambda_s}$ - количество столкновений за время dt

При одном столкновении уменьшение $\ln E$ равно $-\xi$, поэтому:

$$-d \ln E = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot dt$$

ИЛИ

$$du = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot dt$$

Если источник и поглощение нейтронов отсутствуют, то:

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(r,t) \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D \cdot v \cdot \Delta n(r,t)$$

$n(r,t)dt$ – число нейтронов в 1см^3 , которые диффундировали в течение dt

$n(r,u)du$ – число нейтронов в 1см^3 , с летаргией U в интервале от U до $U+du$

Поэтому:

$$n(r,u)du = n(r,t)dt \quad \text{откуда :}$$

$$n(r,t) = n(r,u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r,u)$$

Вспомним, что:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{см. основы мат.анализа})$$

Поэтому:

$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial n(r, t)}{\partial u}$$
$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial n(r, t)}{\partial u}$$

Следовательно:

$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r, u) \right]$$

Теперь подставим всё это в уравнение:

$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = D \cdot v \cdot \Delta n(r, t)$$

Получим:

$$\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r, u) \right] = D \cdot v \cdot \Delta \left[\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r, u) \right]$$

или

$$\xi \Sigma_s \cdot \frac{\partial}{\partial u} [\xi \Sigma_s \cdot \Phi(r, u)] = D \cdot \Delta [\xi \Sigma_s \cdot \Phi(r, u)]$$

$$q = \xi \Sigma_s \cdot \Phi(r, u) \quad - \text{плотность замедления}$$

Поэтому:

$$\Delta q = \frac{\xi \Sigma_s}{D} \frac{\partial q}{\partial u}$$

Введя новую переменную τ :

$$\tau(u) \equiv \int_0^u \frac{D}{\xi \Sigma_s} du$$

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau} \quad - \text{уравнение возраста}$$

Время диффузии и время замедления

$$du = -\frac{dE}{E} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} dt$$

$$t = \int_0^t dt = \int_{E_T}^{E_0} \frac{\lambda_s}{\xi \cdot v} \frac{dE}{E}, \quad v = \sqrt{2E/m},$$

$$t = \frac{\bar{\lambda}_s}{\xi} \cdot \sqrt{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{E_T}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \right)$$

	λ_s , см	Время замедления, сек	Время диффузии, сек
Вода	1.1	10^{-5}	$2.1 \cdot 10^{-4}$
Тяжёлая вода	2.6	$4.6 \cdot 10^{-5}$	0.15
Бериллий	1.6	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$
Графит	2.6	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$

Диффузионно-возрастное приближение

$$\left. \begin{array}{l} \text{или} \\ \frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(r,t) - \Sigma_a \cdot \Phi(r,t) + Q \\ \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(r,t) - \Sigma_a \cdot \Phi(r,t) + Q \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{-уравнение баланса} \\ \text{тепловых нейтронов} \end{array}$$

$$Q - \text{источник тепловых нейтронов} = \lambda(r, \tau_T, t) \cdot \varphi$$

$$\Delta q(r, \tau, t) = \frac{\partial q(r, \tau, t)}{\partial \tau}$$

$$q(r, 0, t) = \frac{k_\infty}{\varphi} \Sigma_a \Phi(r, t) + S(r)$$

$$q(R_{zp}, \tau, t) = 0$$

$$\Phi(R_{zp}, t) = 0$$

$$\Delta q(r, \tau, t) = \frac{\partial q(r, \tau, t)}{\partial \tau} \quad (1)$$

Пусть,

$$q(r, \tau, t) = R(r) \cdot \Theta(\tau) \cdot T(t) \quad (2)$$

Подставляя в (1) получим,

$$\Delta R(r) \cdot \Theta(\tau) \cdot \cancel{T(t)} = R(r) \cdot \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} \cdot \cancel{T(t)}$$

или

$$\frac{\Delta R(r)}{R(r)} = \frac{1}{\Theta(\tau)} \cdot \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau}$$

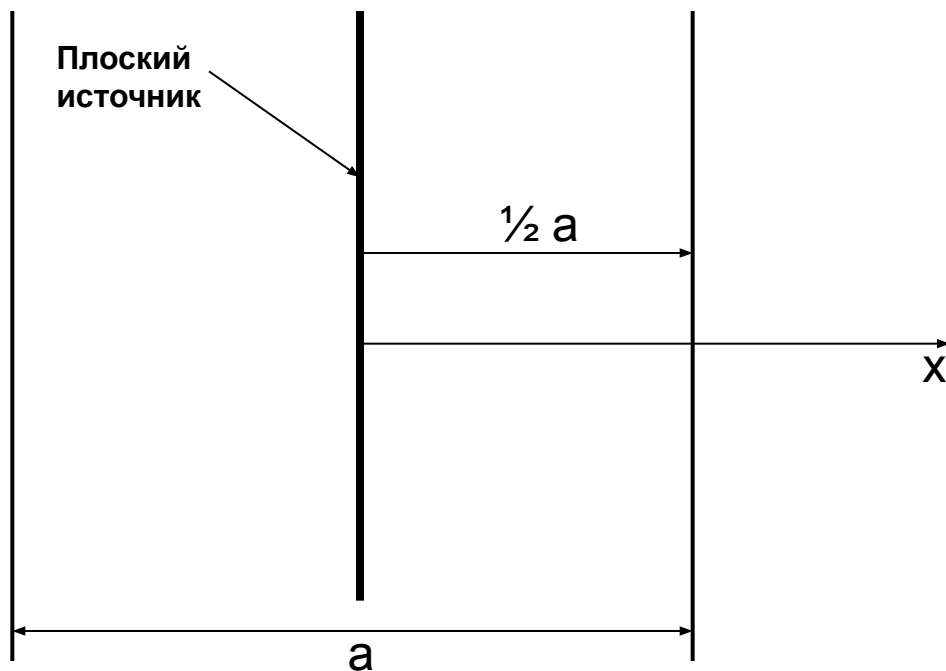
Исходя из этого,

$$\frac{\Delta R(r)}{R(r)} = -B^2 \quad \text{или} \quad \Delta R(r) + B^2 R(r) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Theta(\tau)} \cdot \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} = -B^2, \text{ решение имеет вид: } \Theta(\tau) = A \cdot e^{-B^2 \cdot \tau} \quad (4)$$

Критическое условие

Пусть имеем плоский реактор с источником быстрых нейтронов на плоскости симметрии



Тогда (для понятности) заменив $R(r)$ на $X(x)$ имеем,

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + B^2 \cdot X(x) = 0$$

С граничными условиями $X(a/2)=0$

Решение с учётом условия симметрии:

$$X_n = A_n \cos B_n x \quad (5)$$

Используя граничное условие получаем, что:

$$B_n^2 = \left(\frac{n \cdot \pi}{a} \right)^2, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), а его и выражение (4) в формулу (2), получим:

$$q(r, \tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n \cdot \pi}{a} x \cdot e^{-B_n^2 \cdot \tau} \cdot T_n(t), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (7)$$

Внешний источник представим рядом Фурье:

$$S(r) = S \cdot \delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos \frac{n \cdot \pi}{a} x, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в уравнение связи $q(r, 0, t) = \frac{k_{\infty}}{\varphi} \sum_a \Phi(r, t) + S(r)$ получим:

$$\Phi(r, t) = \frac{\varphi}{k_{\infty} \cdot \sum_a} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot T_n(t) - S_n] \cos \frac{n \cdot \pi}{a} x, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (9)$$

Подставим (9) и (7) в уравнение диффузии тепловых нейтронов,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} = D \Delta \Phi(r, t) - \Sigma_a \cdot \Phi(r, t) + \varphi \cdot q(r, \tau_T, t)$$

и учитывая, что члены рядов Фурье линейно независимы, имеем:

$$\frac{1}{v} \frac{\varphi}{k_\infty \cdot \Sigma_a} A_n \frac{\partial T_n}{\partial t} = - \frac{\varphi}{k_\infty} \left[\frac{D \cdot B_n^2}{\Sigma_a} + 1 \right] \cdot (A_n \cdot T_n(t) - S_n) + \varphi \cdot A_n e^{-B_n^2 \cdot \tau_T} \cdot T_n(t) \quad (10)$$

Помня, что $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ квадрат длины диффузии тепловых нейтронов
а, $\frac{1}{v \cdot \Sigma_a} = l_0$ время жизни теплового нейтрона в бесконечной среде

перепишем (10) в виде,

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \left[\frac{k_\infty \cdot e^{-B_n^2 \cdot \tau_T} - (1 + L^2 \cdot B_n^2)}{l_0} \right] \cdot T_n(t) + \frac{1 + L^2 \cdot B_n^2}{l_0 \cdot A_n} S_n$$

Введём важные обозначения:

$$k_n \equiv \frac{k_\infty \cdot e^{-B_n^2 \cdot \tau_T}}{1 + L^2 \cdot B_n^2} \quad \text{и} \quad l_n \equiv \frac{l_0}{1 + L^2 \cdot B_n^2}$$

Перепишем в виде:

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \left(\frac{k_n - 1}{l_n} \right) \cdot T_n(t) + \frac{S_n}{l_n \cdot A_n} \quad (10)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$T_n(t) = e^{\frac{(k_n - 1)t}{l_n}} + \frac{S_n}{A_n \cdot (1 - k_n)} \quad (11)$$

а поток тепловых нейтронов согласно (9),

$$\Phi(r, t) = \frac{\varphi}{k_\infty \cdot \Sigma_a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot e^{\frac{(k_n - 1)t}{l_n}} + \frac{S_n \cdot k_\infty \cdot e^{-B_n^2 \tau_T}}{(1 + L^2 \cdot B_n^2) \cdot (1 - k_n)} \right] \cos \frac{n \cdot \pi}{a} x, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (12)$$

