Презентация на тему:

«Степени свободы»

Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

Если в уравнении вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в форме метода сил не учитывать силы сопротивления, то получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{y}+\omega^{2}y=\frac{P}{m}.$$

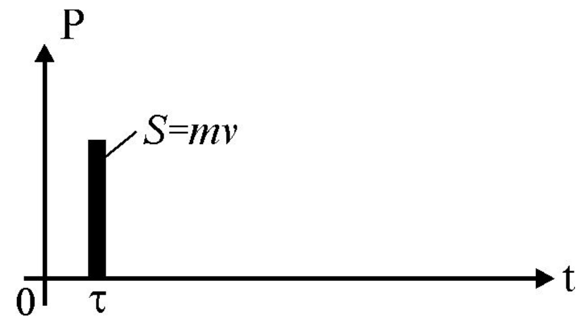
Общее решение этого уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнений:

$$y=y_{од}+y_{ч},$$

где $y_{од}$ совпадает с решением уравнения собственных колебаний, а частное решение зависит от вида динамической нагрузки.

Частное решение уравнения будем искать путем разложения нагрузки на сумму мгновенных импульсов.

а) Действие мгновенного импульса



Пусть на находящуюся в покое систему с массой m в момент времени τ действует мгновенный импульс $S=mv$:

После этого система начнет свободно колебаться. Если не учитывать силы сопротивления, колебания будут гармоническими:

$$y=a\sin(\omega t+\phi).$$

В момент воздействия мгновенного импульса масса еще не успевает изменить свое положение, однако сообщает ему некоторую скорость.

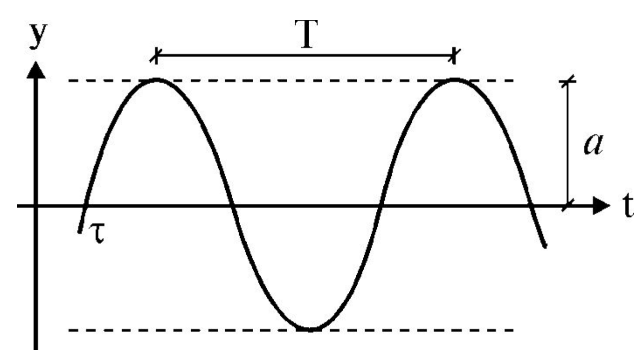
Поэтому $y_{\tau=t}=0,\ v_{\tau=t}=S/m$.

По этим условиям найдем начальную фазу и амплитуду колебаний:

$$\phi=-\omega\tau, \qquad a=\frac{S}{m\omega}.$$

Значит, воздействие мгновенного импульса приводит к колебанию массы по гармоническому закону

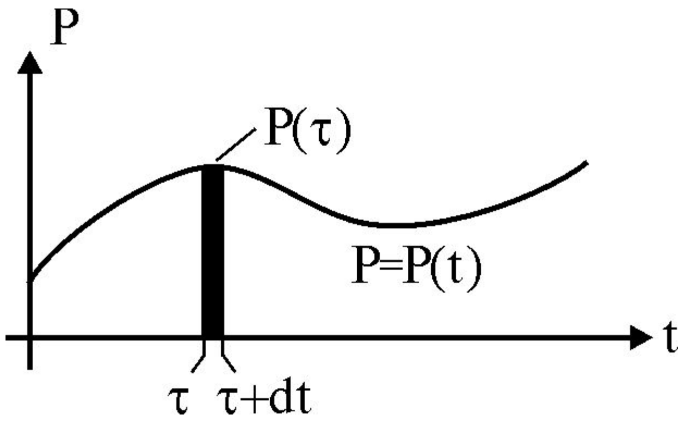
$$y=\frac{S}{m\omega}\sin\omega(t-\tau)$$



с круговой частотой ω и периодом T:

б) Действие произвольной силы

Если на систему действует нагрузка изменяющаяся по закону *P(t)*, ее можно рассматривать как сумму бесконечно большого числа мгновенных импульсов $S = P(\tau)\,d\tau$:



Тогда

$$y_ч = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(t)\sin\omega\left(t-\tau\right)dt.$$

Это выражение называется ***интегралом Дюамеля***.

в) Действие вибрационной нагрузки

При действии вибрационной нагрузки $P(t)=P_0\sin\theta t$

$$y_ч=\frac{1}{m\omega}\int_0^t P_0\sin\theta\tau\cdot\sin\omega(t-\tau)\,d\tau .$$

После его интегрирования получим

$$y=y_0\sin\omega t+y_ч=y_{соб}+\frac{P_0}{m(\omega^2-\theta^2)}\left(\sin\theta t-\frac{\theta}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Первое слагаемое правой части этого выражения $y_{соб}$ и слагаемое в скобках $\theta\sin\omega t$ относятся к собственным колебаниям с частотой ω. Из-за наличия демпфирования эти колебания достаточно быстро затухают. Поэтому в общем решении можно оставить только второе слагаемое из выражения в скобках:

$$y=\frac{P_0\sin\theta t}{m(\omega^2-\theta^2)} .$$

Так как $\omega^2=\dfrac{1}{m\delta}$,

$$\frac{1}{m}=\omega^2\delta\,,\qquad \frac{P_0}{m}=\omega^2\delta P_{\theta m}=\omega^2 y\quad .$$

Тогда

$$y=\frac{P_{\theta m}\sin\theta t}{m(\omega^2-\theta^2)}=\frac{\omega^2 y_{cm}\sin\theta t}{\omega^2-\theta^2}=\frac{1}{(1-\theta^2/\omega^2)}\,y_{cm}\sin\theta t.$$

Из этой формулы следует, что когда $\theta\rightarrow\omega$, то $y\rightarrow\infty$. Такое резкое увеличение перемещений при колебаниях называется ***резонансом***.

В действительности перемещения сооружения бесконечно большими быть не могут, т.к. существует демпфирование колебаний за счет внутреннего трения и сопротивления среды.

Тем не менее, амплитуды колебаний могут быть значительными, что может привести к разрушению сооружения.

Чтобы этого не случилось, стремятся избежать резонанса или близкого к нему состояния.

Определим отношение максимального динамического перемещения к статическому перемещению:

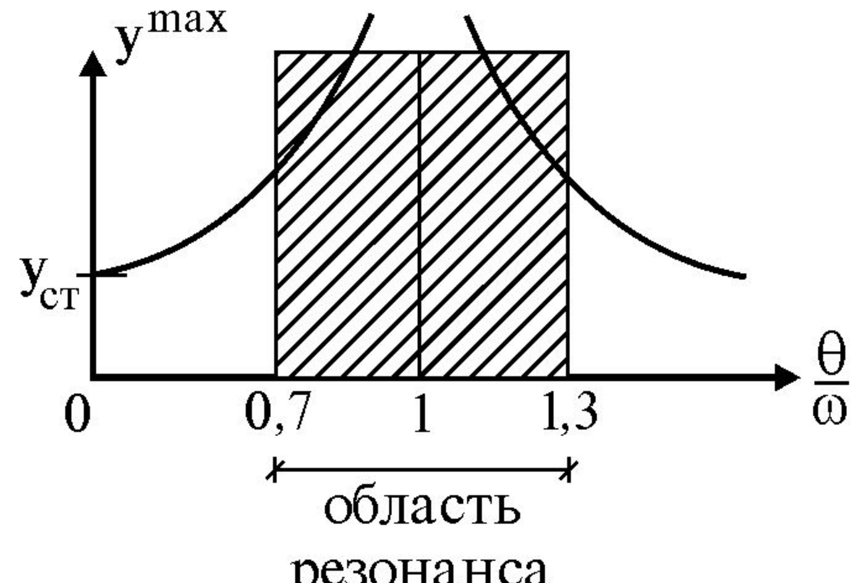
$$\mu = \frac{y_{дин}^{max}}{y_{ст}} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\theta}{\omega}\right)^2}.$$

Оно называется ***динамическим коэффициентом***. Как следует из формулы, резонанса не будет, если отношение частоты вибрационной силы θ к частоте ω не равняется единице.

Учитывая принятые нормы, потребуем, чтобы эти частоты отличались не менее чем на 30%:

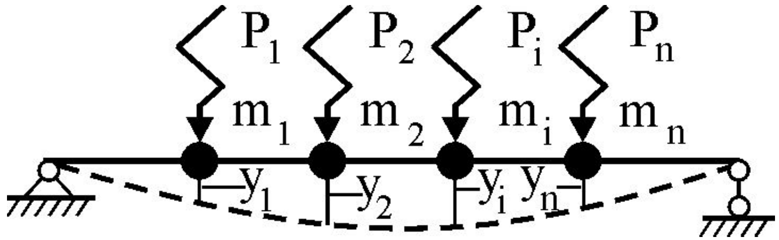
$$\left|1 - \frac{\theta}{\omega}\right| \geq 0,3.$$

Этот критерий позволяет установить так называемую резонансно-опасную зону (на рис. – заштрихованная область):



Колебания систем с *n* степенями свободы

Невесомую балку с *n* точечными массами можно рассматривать как колебательную систему с *n* динамическими степенями свободы:



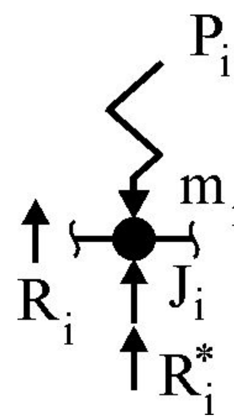
Если на массы будут действовать динамические силы

$$P_1=P_1(t),\ \ .\ .\ .\ .\ ,\ \ P_n=P_n(t),$$

то в них возникнут инерционные силы

$$J_1 = m_1\ddot{y}_1\ , \ldots\ \ ,\ \ J_n = m_n\ddot{y}_n\ ,$$

а со стороны балки будут действовать силы упругости $R_1, \ .\ .\ .\ ,\ R_n$ и силы сопротивления среды $R_1^*, \ldots\ \ ,\ R_n^*.$



Из условия равновесия сил, действующих на произвольную массу m_i, получим

$$J_i + R_i + R_i^* - P_i = 0.$$

Если силы упругости R_i определять по методу сил, и все *n* уравнений объединить в систему уравнений, получим матричное уравнение

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}}+\mathbf{y}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}^{*}=\boldsymbol{\delta}\mathbf{P}$$

– ***уравнение колебаний системы со многими степенями свободы в форме метода сил***.

По виду оно соответствует уравнению колебаний системы с одной степенью свободы. Однако здесь все обозначения матричные:

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{m}=\mathbf{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

матрица масс **матрица податливости** **динамическая матрица**

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ **– вектор перемещений**

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$ **– вектор нагрузки**

Собственные колебания систем с *n* степенями свободы

При **P**=**P***= **0** получим уравнение собственных колебаний

$$\mathbf{d}\,\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

которое является системой *n* дифференциальных уравнений. Его решение ищется в виде суммы *n* частных решений:

$$\mathbf{y} = \sum \mathbf{y}_i = \sum \mathbf{a}_i\, sin(\omega t + \varphi),$$

где вектора $\mathbf{a}_i$ – формы собственных колебаний.

Подстановка этого решения в исходное уравнение приводит к алгебраическому уравнению

$$(\mathbf{d} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{a}_i = \mathbf{0},$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

– ***собственное значение*** матрицы **d**.

Это матричное уравнение в обычной записи является системой однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (d_{11}-\lambda)a_{1i}+d_{12}a_{2i}+\ldots+d_{1n}a_{ni}=0, \\ d_{21}a_{1i}+(d_{22}-\lambda)a_{2i}+\ldots+d_{2n}a_{ni}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n1}a_{1i}+d_{n2}a_{2i}+\ldots+(d_{nn}-\lambda)a_{ni}=0, \end{cases}$$

которая имеет два типа решения:

1) тривиальное решение $a_{1i}=a_{2i}=\ldots=a_{ni}=0$; тогда колебаний не будет;

2) неопределенное решение; для этого определитель системы уравнений должен равняться нулю:

$$\det(\mathbf{d}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} (d_{11}-\lambda) & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & (d_{22}-\lambda) & \ldots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & (d_{nn}-\lambda) \end{bmatrix} = 0.$$

Если раскрыть этот определитель, получим полином *n*-ной степени относительно λ:

$$\lambda^{n} - q_{1}\lambda^{n-1} + q_{2}\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} q_{n-1}\lambda + (-1)^{n} q_{n} = 0.$$

Такой полином имеет *n* корней $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n$, которые называются ***собственными значениями*** матрицы **d**.

Запишем собственные значения в порядке убывания:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n .$$

Так как $\lambda = 1/\omega^2$, то круговые частоты колебаний расположатся в порядке возрастания:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_n .$$

Эта последовательность называется ***спектром частот***, а наименьшая частота ω_1 называется ***основной частотой***.

Таким образом, динамическая система с *n* степенями свободы имеет *n* частот собственных колебаний (*n* собственных частот).

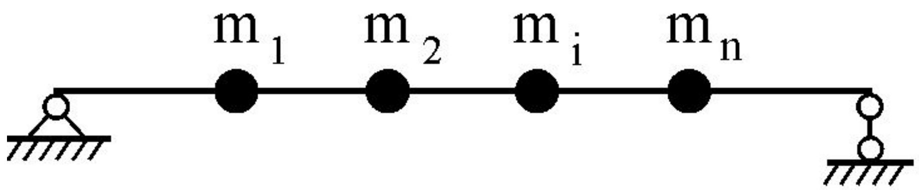
Для практических целей наиболее важными являются несколько наименьших, так называемых низших собственных частот.

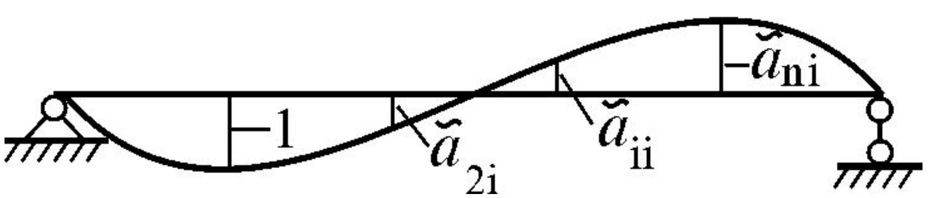
Каждой собственной частоте соответствует своя форма колебаний.

Для их определения собственные значения λ_i нужно поочередно подставлять в систему алгебраических уравнений.

Но во всех случаях определитель системы уравнений будет равняться нулю. Поэтому одно уравнение отбрасывают, а амплитуду одной массы считают условно определенной (например, можно принять $a_1=1$). Тогда из оставшихся уравнений можно вычислить амплитуды остальных масс.

Формы собственных колебаний динамической системы можно представить графически:





– *i*-ая форма собственных колебаний

Вынужденные колебания систем с *n* степенями свободы

Пусть на систему действуют вибрационные силы $P_i = \overline{P}_i \sin\theta t$.

Собереем их в общий вектор $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{P}} \sin\theta t$,

где $\overline{\mathbf{P}} = \{ \overline{P}_1 \quad \ldots \quad \overline{P}_n \}$ – амплитудные (наибольшие) значения вибрационных сил,

θ – круговая частота этих сил.

Тогда уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\boldsymbol{\delta}\, \mathbf{m}\, \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{P} .$$

Его общее решение равняется сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{од} + \mathbf{y}_{ч} = \mathbf{y}_{св} + \mathbf{y}_{вын} .$$

Как и в системах с одной степенью свободы, свободные колебания быстро затухают: $\mathbf{y}_{св} \to \mathbf{0}$. Поэтому, после установления колебаний, они будут совершаться с частотой вибрационной силы:

$$\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}} \sin\theta t.$$

Здесь $\overline{\mathbf{y}} = \{ \overline{y}_1 \quad \ldots \quad \overline{y}_n \}$ – вектор амплитуд колебаний масс.

Если учесть, что

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\theta^2\, \bar{\mathbf{y}} \sin\theta t, \quad \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{P}} \sin\theta t = \mathbf{y}_{\text{ст}} \sin\theta t,$$

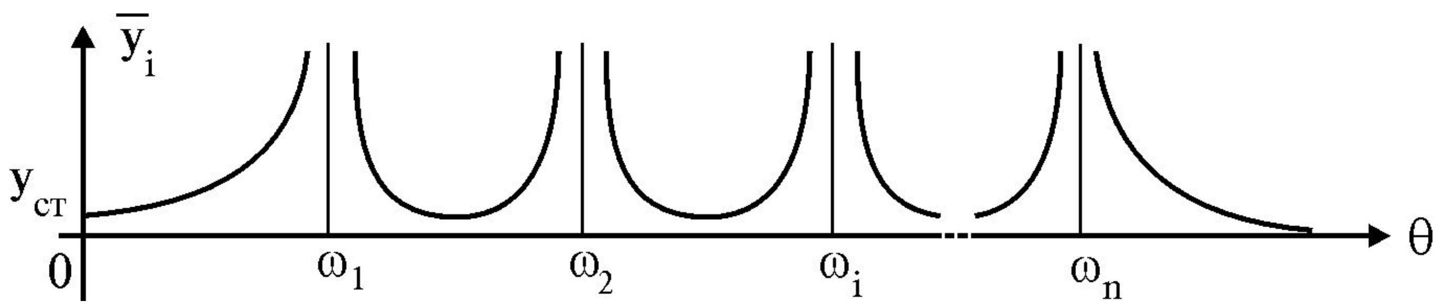
то уравнение вынужденных колебаний примет вид:

$$-\theta^2\, \boldsymbol{\delta}\mathbf{m}\, \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}} = (\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{P}}).$$

Из него можно найти вектор амплитуд колебаний:

$$\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{E} - \theta^2\, \boldsymbol{\delta}\mathbf{m})^{-1}\, \mathbf{y}_{\text{ст}}.$$

Однако, если частота вибрационной силы θ будет близка к одной из собственных частот ω_i, то определитель матрицы в скобках становится близкой к нулю. Это приводит к резкому увеличению амплитуд колебаний масс, т.е. к резонансу. Поэтому в системе с n степенями свободы возможны n резонансных состояний:



С учетом того, что

$$\mathbf{J} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} = -\theta^2\,\mathbf{m}\mathbf{y},$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$\left(\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{\theta^2}\mathbf{m}^{-1}\right)\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{y}_{cm},$$

которое в обычной записи является системой *n* уравнений:

$$\begin{cases} \delta^*_{11}\bar{J}_1 + \delta_{12}\bar{J}_2 + \ldots + \delta_{1n}\bar{J}_n = y_{1} & ; \\ \delta_{21}\bar{J}_1 + \delta^*_{22}\bar{J}_2 + \ldots + \delta_{2n}\bar{J}_n = y_{2} & ; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & \\ \delta_{n1}\bar{J}_1 + \delta_{n2}\bar{J}_2 + \ldots + \delta^*_{nn}\bar{J}_n = y_{n} & , \end{cases}$$

где

$$\delta^*_{ii} = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i\theta^2}.$$

Она называется ***системой канонических уравнений расчета на вибрационную нагрузку***.

Из него определяются максимальные значения инерционных сил $\bar{J}_i$.

После этого вычисляются обобщенные силы, действующие на систему $\bar{Q}_i = \bar{P}_i - \bar{J}_i$, затем максимальные значения внутренних усилий, а по ним проводится проверка прочности.

Порядок расчета на вибрационную нагрузку

Расчет на вибрационную нагрузку обычно состоит из решения трех задач динамики:

1) расчет на собственные колебания – определение частот и форм собственных колебаний из уравнения

$$det\left(\mathbf{d}-\theta\ \ \mathbf{E}\right)= \ ;$$

2) проверка на резонанс по условию

$$\left|\frac{\omega_i-\theta}{\omega_i}\right|\geq 0,2;$$

3) проверка динамической прочности

$$\sigma_{дин}^{max}=\frac{M_{дин}^{max}}{W}<\left[\sigma_{дин}\right].$$

При необходимости решается четвертая задача динамики – проверка динамической жесткости по условию

$$y_i<\left[y_i\right].$$

Спасибо за внимание!