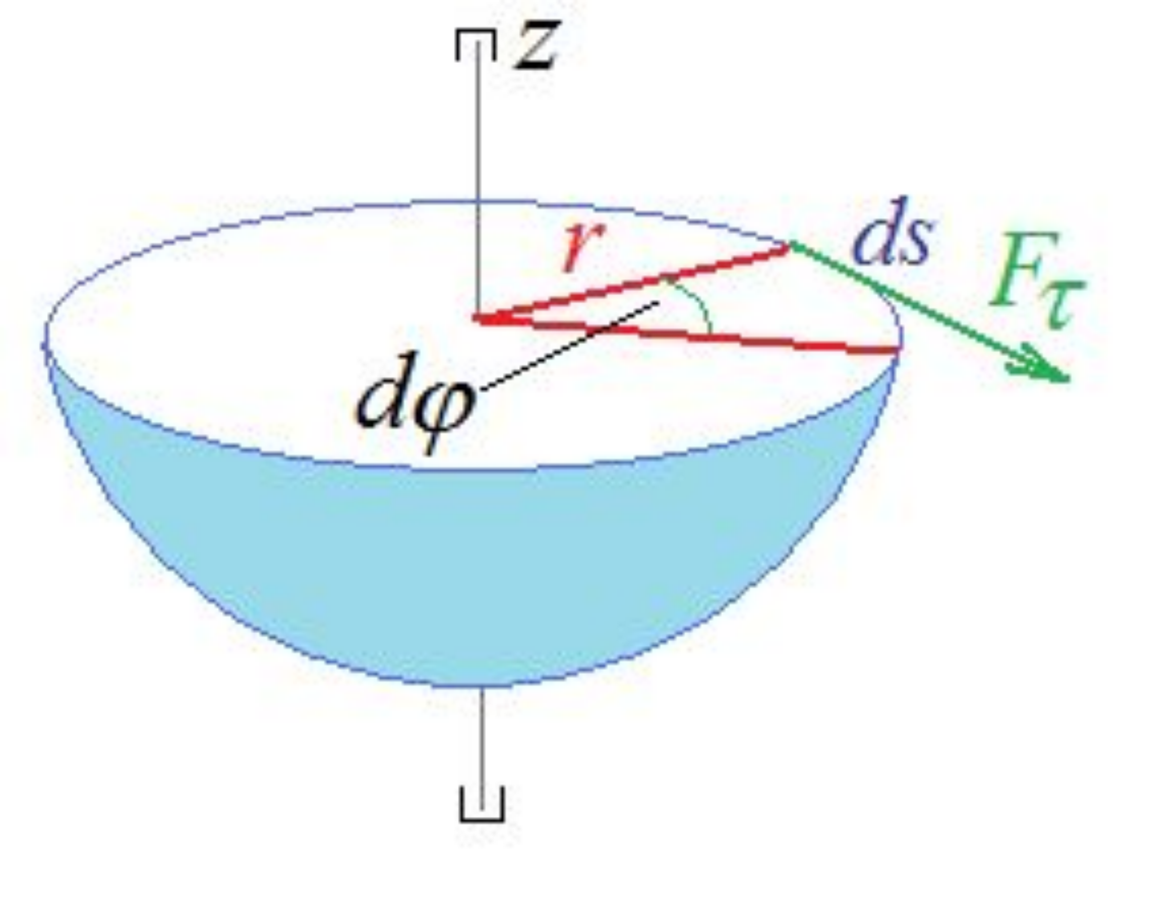
Работа при вращательном движении



Элементарная работа

$$dA = F_\tau ds$$

$$ds = r d\varphi$$

$$dA = F_\tau r d\varphi$$

$$dA = M_z d\varphi$$

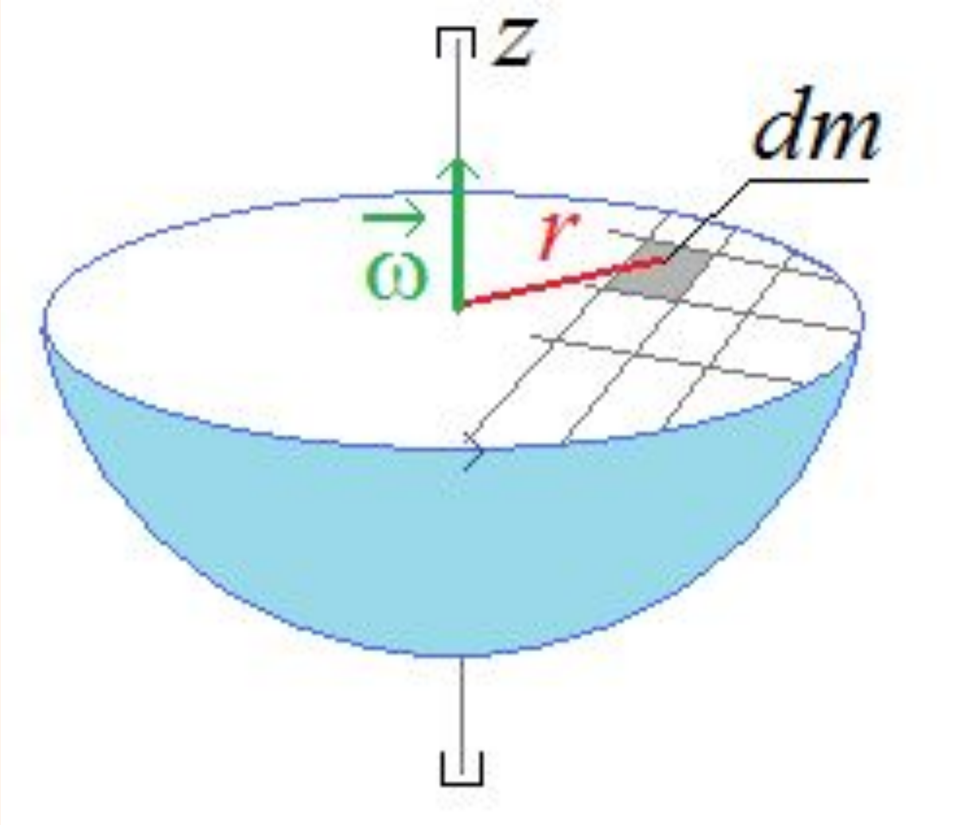
Полная работа

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$$

Если $M_z = const.$, то

$$A = M_z \Delta\varphi$$

Кинетическая энергия вращения



Для каждой МТ

$$dW_k = \frac{dm}{2} v^2$$

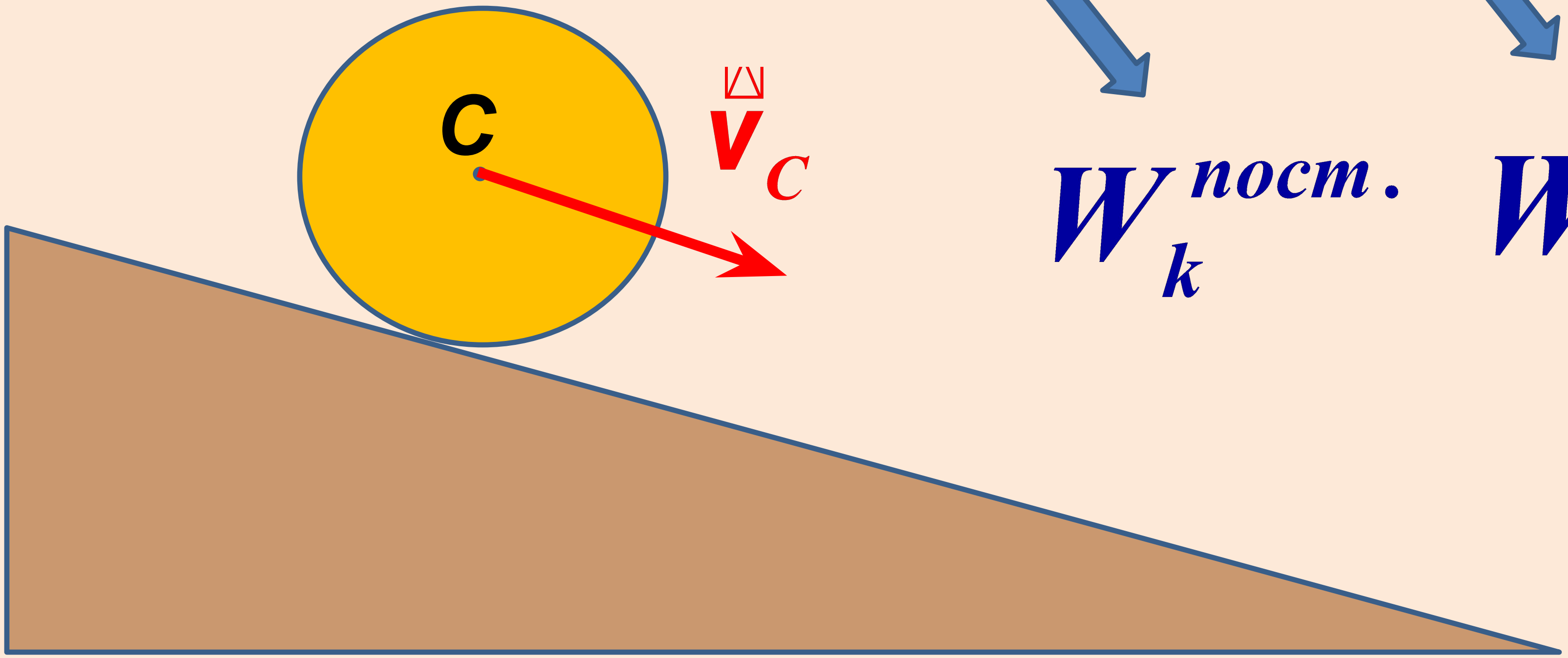
$$dW_k = \frac{dm \cdot r^2 \omega^2}{2}$$

$$W_k = \int dW_k = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm \qquad W_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Для катящегося тела

$$W_k = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}$$

$$W_k^{пост.} \qquad W_k^{вр}$$



Основной закон динамики вращательного движения

Тангенциальная сила $F\tau$, совершая работу $dA = M_z d\varphi$ увеличивает кинетическую энергию тела на dWk.

$$M_z d\varphi = dW_k$$

Справа распишем

$$dW_k = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega d\omega$$

Возьмем производную по времени

$$M_z \frac{d\varphi}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\varphi}{dt} \varepsilon$$

Сократив на $d\phi/dt$, получим основной закон динамики вращательного движения:

$$M_z = I\varepsilon$$

Если $\vec{F} = \vec{F}_\tau$, то справедлива векторная форма:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

Этот закон вращательного движения аналогичен II-му закону Ньютона для поступательного движения.

Физический смысл момента инерции: если на тела, обладающие разными моментами инерции подействовать одним и тем же моментом силы, то тело, обладающее **большим** моментом инерции, получит **меньшее** угловое ускорение.

Момент инерции есть мера инертности тела для вращательного движения.

Уравнение моментов

Момент импульса твердого тела

$$L_z = I_z \omega$$

Возьмем производную по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = M_z$$

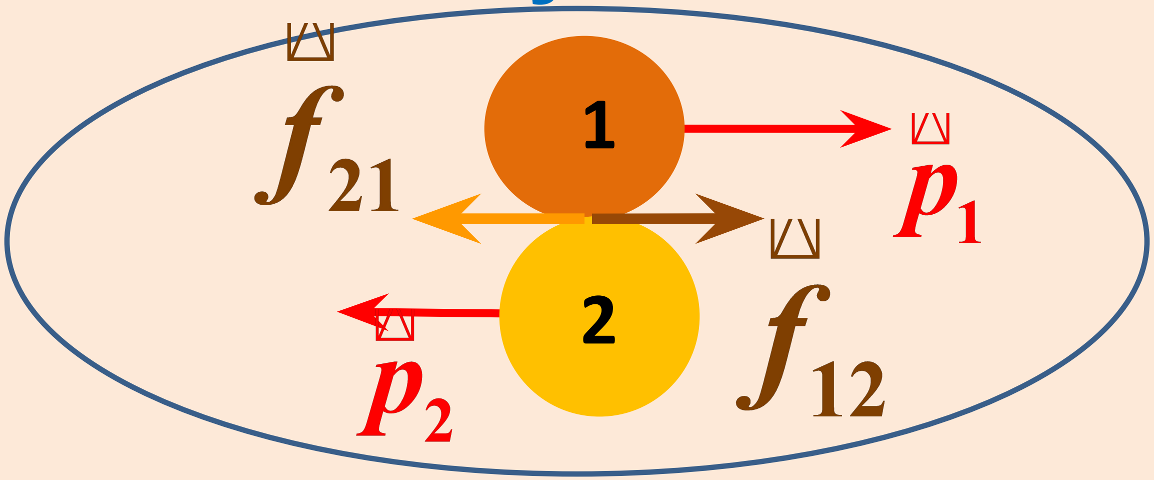
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \text{ или } \dot{L}_z = M_z$$

В векторной форме:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим замкнутую систему тел. Сумма моментов внешних сил равна нулю.



$\vec{f}_{12}$ **и** $\vec{f}_{21}$ – **силы взаимодействия**

$$\vec{M}_{12} = \frac{d\vec{L}_1}{dt}, \quad \vec{M}_{21} = \frac{d\vec{L}_2}{dt}, \quad \vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}$$

Полный момент импульса системы тел

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

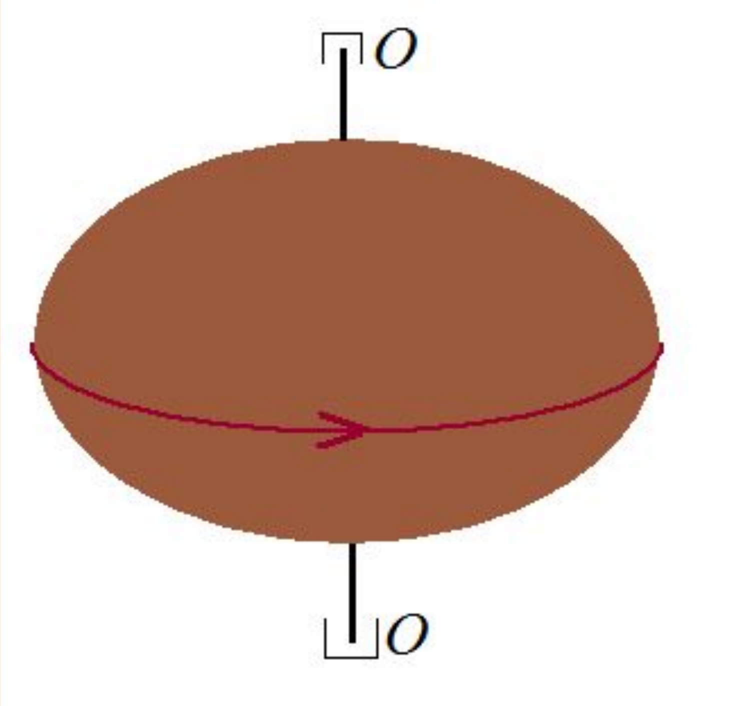
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)}{dt} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = 0$$

В замкнутой системе тел полный момент импульса сохраняется.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ или } \vec{L} = const.$$

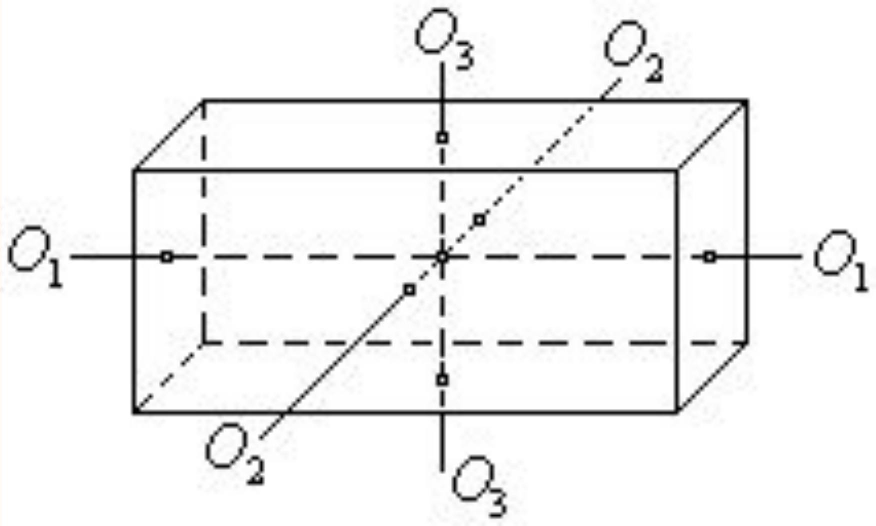
Свободные и главные оси вращения

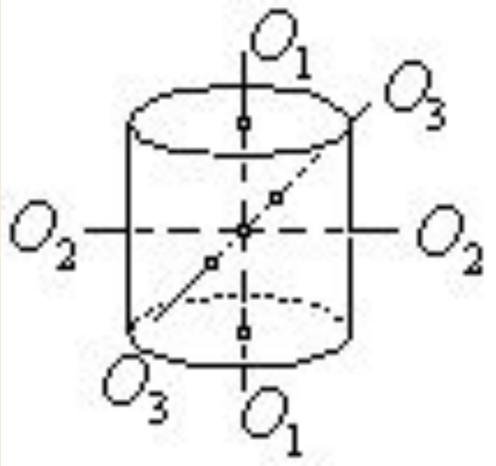
Ось вращения, положение которой в пространстве остается неизменным в отсутствие внешних сил, называется свободной осью тела.



Для любого тела существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции оси, которые могут служить свободными осями. Их называют <u>главными осями инерции</u>.

Моменты инерции относительно главных осей называют <u>главными моментами инерции</u> .

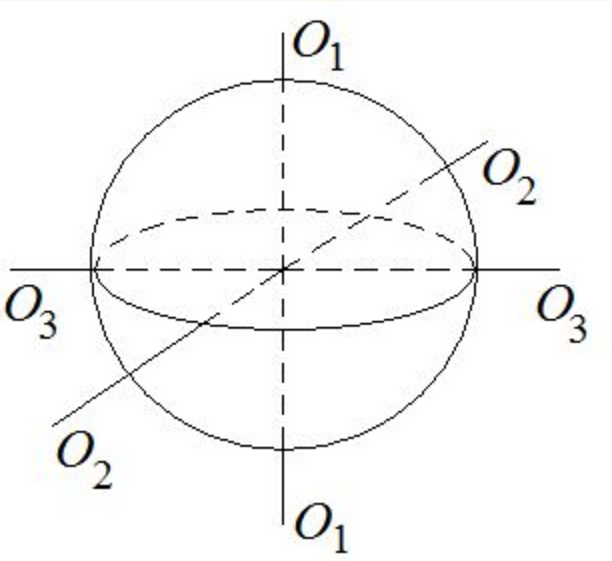




$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

$$I_2 = I_3$$

Симметричны й волчок



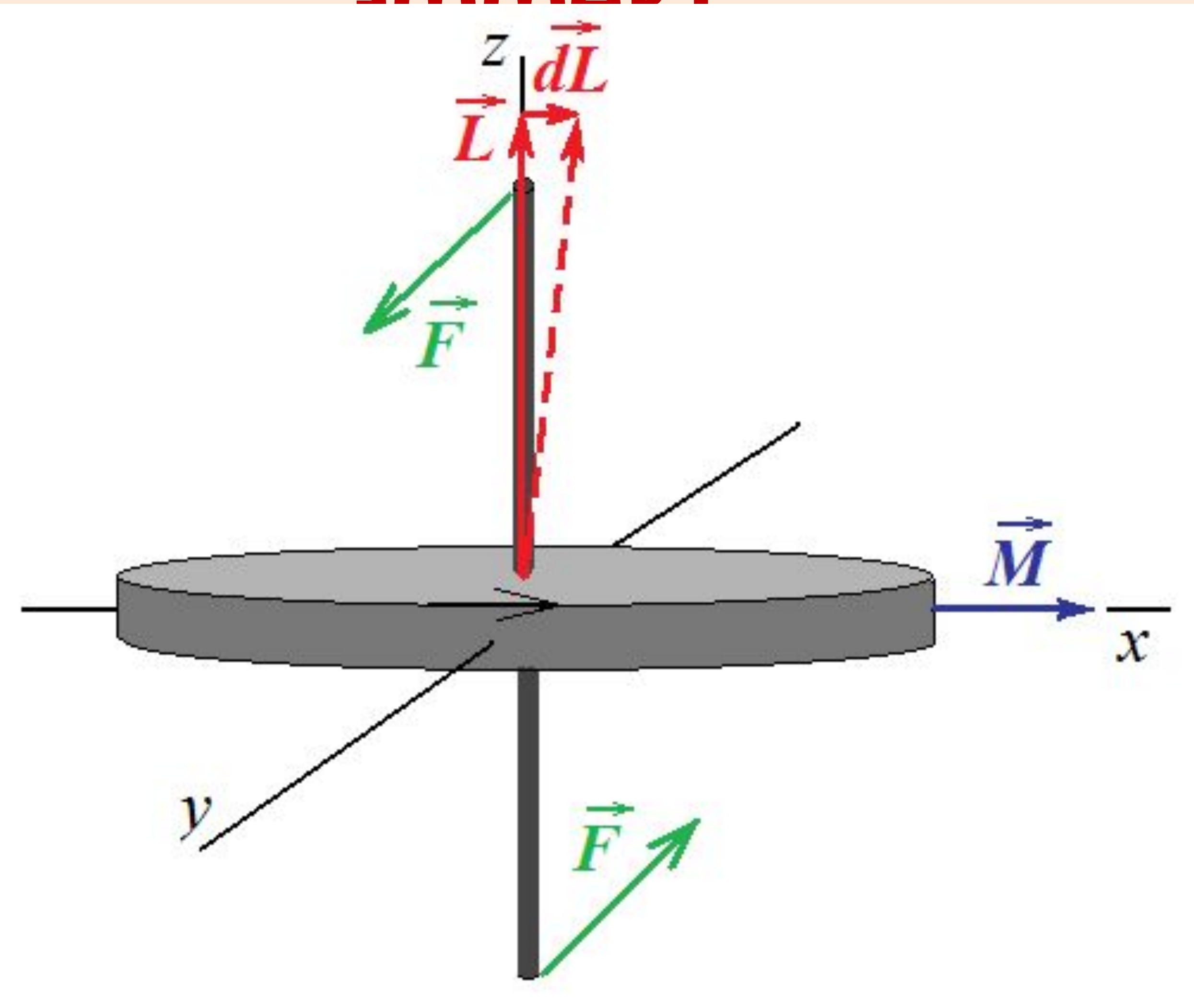
$$I_1 = I_2 = I_3$$

Шаровой волчок

Гироскоп
ы

Гироскоп - это массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии.

Гироскопический эффект



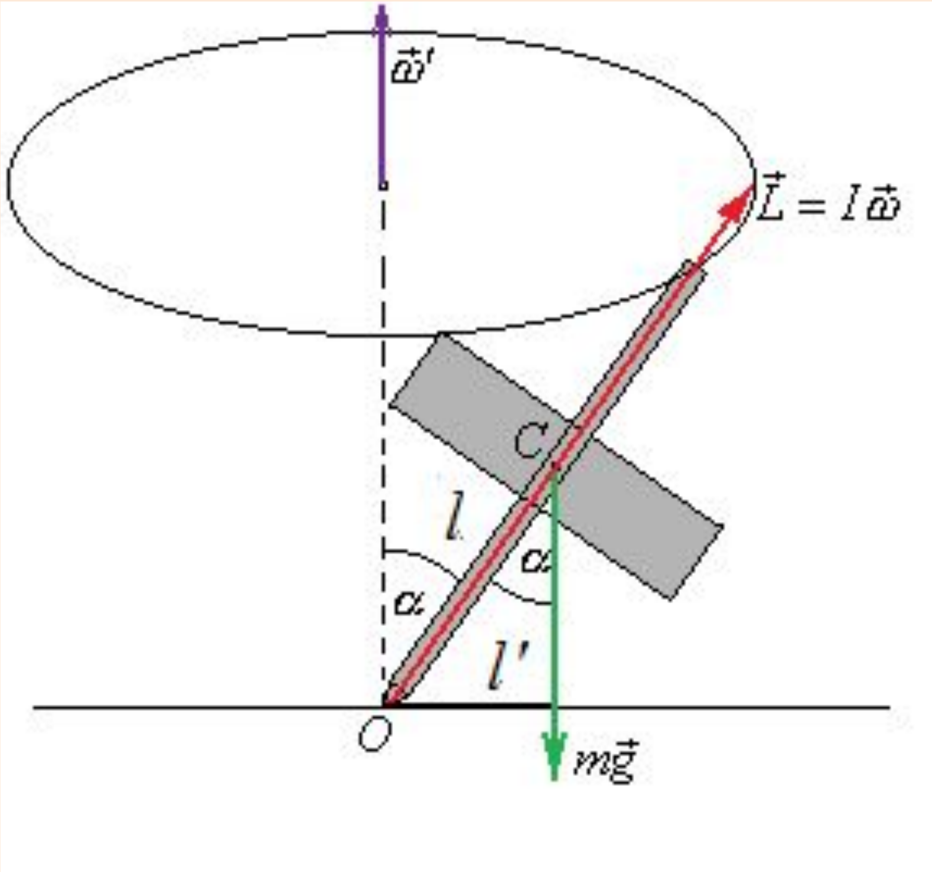
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

Движение оси, вдоль которой направлен момент импульса гироскопа, под действием внешних сил, называют прецессией.

Прецессия гироскопа под действием силы тяжести.



$$d\varphi = \frac{|d\vec{L}|}{L}$$

$$|d\vec{L}| = Mdt$$

$$d\varphi = \frac{Mdt}{L}$$

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}$$

ω' – угловая скорость прецессии гироскопа

$$\vec{M} = \left[\vec{\omega}', \ \vec{L}\right]$$

$$M = \omega' L \sin\alpha$$

$$M = mg\ell' = mg\ell \sin\alpha$$

$$\omega' L \sin\alpha = mg\ell \sin\alpha$$

$$\omega' = \frac{mg\ell}{L}$$