ЛЕКЦИЯ 4, часть 2.

Элементы релятивистской механики

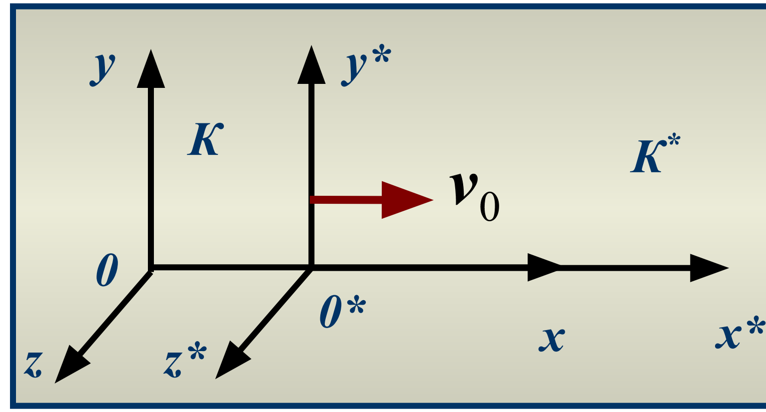
План лекции

1. Преобразования Лоренца. Длина тел в разных системах отсчета
2. Преобразования Лоренца. Промежуток времени между событиями.
3. Преобразования Лоренца. Преобразование и сложение скоростей.
4. Релятивистское выражение для импульса.
5. Релятивистское выражение для энергии.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

1. Одновременность событий в разных системах отсчета.



Пусть в системе отсчета ***K*** в точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = T$.

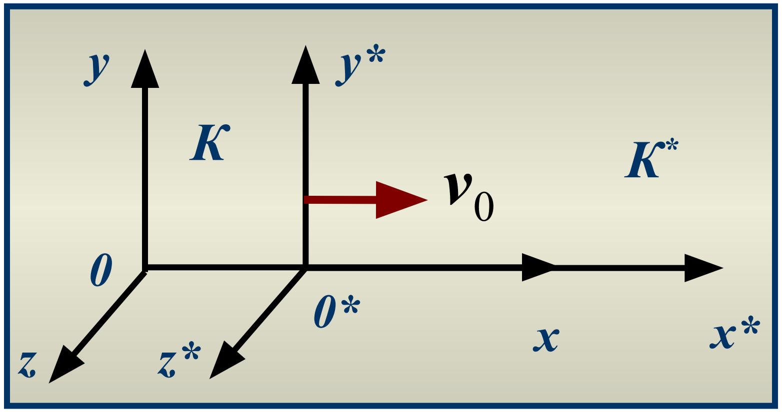
Запишем для K^*:
$$t_1^* = \frac{T + (\beta / c)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2^* = \frac{T + (\beta / c)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Видно, что если события в системе ***K*** пространственно разобщены, т.е. $x_1 \neq x_2$, то в системе K^* они не будут одновременными ($t_2^* \neq t_1^*$) . Знак разности $t_2^* - t_1^*$ определяется знаком выражения
$$(\beta / c)(x_1 - x_2)$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

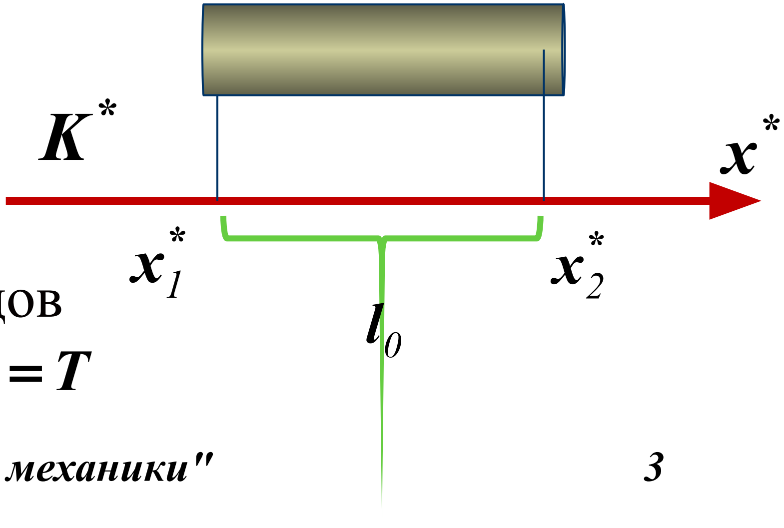
Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

2. Длина тел в разных системах отсчета .



Рассмотрим расположенный вдоль оси x^* стержень, покоящийся относительно K^*.

Стержень движется относительно системы K со скоростью $v = v_0$. Определим его длину.

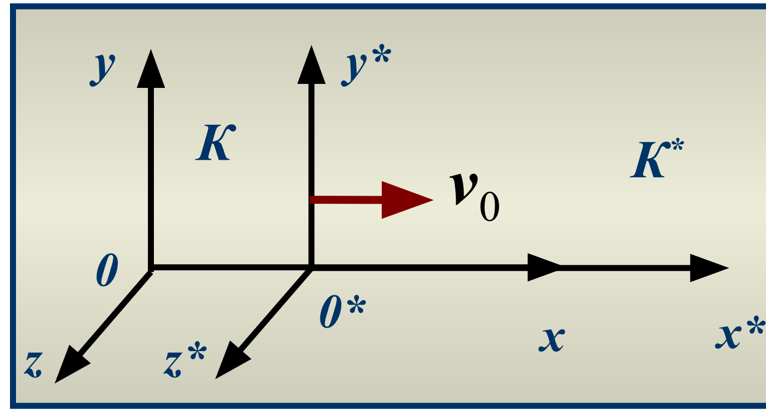


Отметим в системе K координаты концов стержня x_1^* и x_2^* в момент времени $t_1 = t_2 = T$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

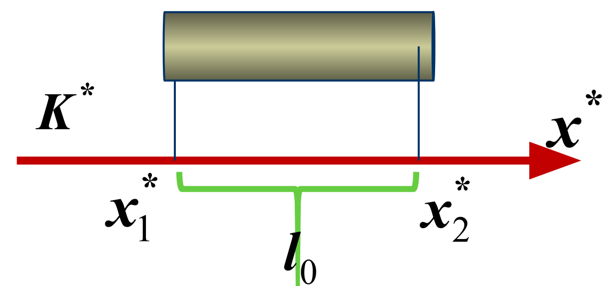
Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

2. Длина тел в разных системах отсчета .



$l = x_2 - x_1$ - длина стержня, измеренная в системе K. Воспользуемся преобразованиями Лоренца.

$$x_1^* = \frac{x_1 - v_0 T}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad x_2^* = \frac{x_2 - v_0 T}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$



$$\boxed{x_2^* - x_1^* = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}}$$

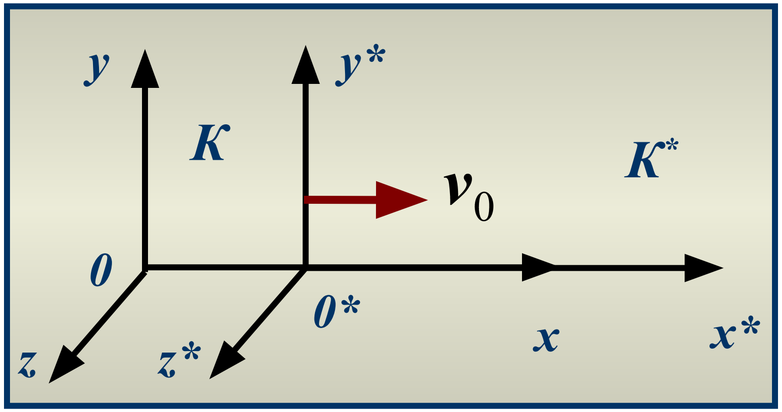
Лоренцево сокращение

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

3. *Промежуток времени между событиями.*



Пусть в системе K^* происходят два события. Первому событию соответствует координата $x_1^* = a$ и момент времени t_1^*.

Второму событию соответствует координата $x_1^* = x_2^* = a$ и момент времени t_2^*.

Воспользуемся преобразованиями Лоренца для перехода в систему отсчета K.

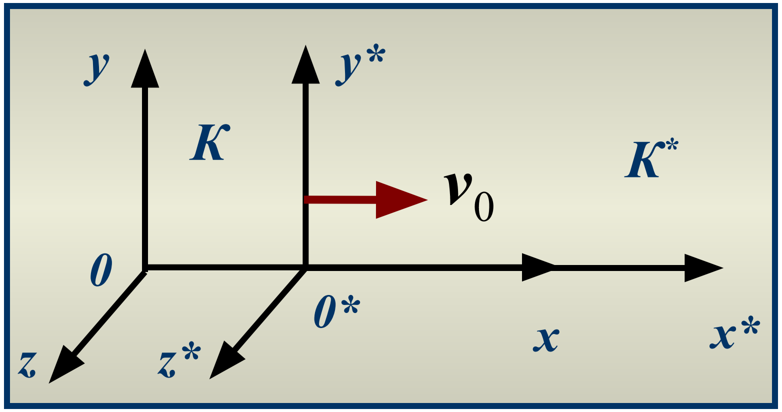
$$t_1 = \frac{t_1^* + (v_0/c^2)a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad t_2 = \frac{t_2^* + (v_0/c^2)a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

3. *Промежуток времени между событиями.*

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2^* - t_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}$$



Введем обозначения: $t_2 - t_1 = \Delta t$, $t_2^* - t_1^* = \Delta t^*$

$$\Delta t = \frac{\Delta t^*}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}$$

Пусть события происходят с одной и той же частицей, которая покоится в системе K^* и движется со скоростью $v = v_0$, если наблюдение вести из системы K.

Тогда $\Delta t^* = \Delta\tau$ собственное время частицы (в системе K^*)

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}$$

Движущиеся часы идут медленнее, чем неподвижные.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

4. *Преобразование скоростей*

Компоненты скорости v частицы в системе K равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

В системе K^* компоненты скорости v^* той же частицы равны

$$v^*_{x^*} = \frac{dx^*}{dt^*}, \quad v^*_{y^*} = \frac{dy^*}{dt^*}, \quad v^*_{z^*} = \frac{dz^*}{dt^*}$$

Найдем формулы, связывающие компоненты скорости в разных системах. Запишем преобразования Лоренца

$$x = \frac{x^* + v_0 t^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad y = y^*, \quad z = z^*, \quad t = \frac{t^* + (v_0/c^2)\, x^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

4. *Преобразование скоростей*

Получим следующие выражения:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{dx^* + v_0 dt^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ dy = dy^*, \qquad dz = dz^* \\ dt = \dfrac{dt^* + (v_0/c^2)dx^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \end{cases}$$

Разделив первую формулу на четвертую, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^* + v_0 dt^*}{dt^* + (v_0/c^2)dx^*} = \frac{dx^*/dt^* + v_0}{1 + (v_0/c^2)dx^*/dt^*}$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

4. *Преобразование скоростей*

Поскольку $\dfrac{dx}{dt} = v_x$, а $\dfrac{dx^*}{dt^*} = v^*_{x^*}$, то

$$\begin{cases} dx = \dfrac{dx^* + v_0 dt^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ dy = dy^*, \quad dz = dz^* \\ dt = \dfrac{dt^* + (v_0/c^2)dx^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\boxed{v_x = \frac{v^*_{x^*} + v_0}{1 + v^*_{x^*} v_0 / c^2}}$$

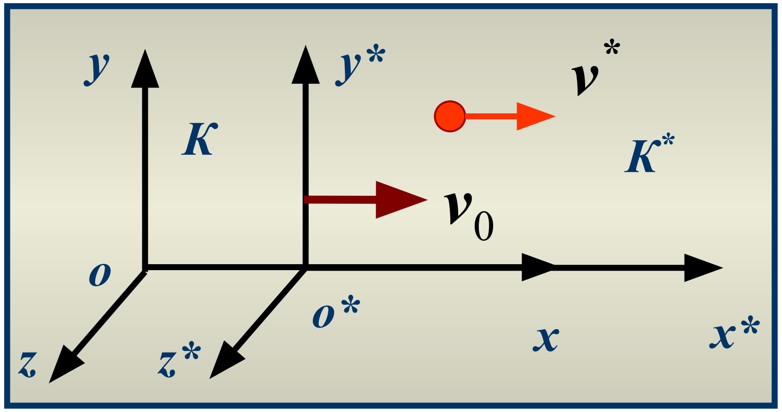
Аналогичным образом получим выражения для v_y и v_z, разделив формулы $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ на формулу $\boxed{4}$:

$$\boxed{v_y = \frac{v^*_{y^*}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v^*_{x^*} v_0 / c^2}} \qquad \boxed{v_z = \frac{v^*_{z^*}\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v^*_{x^*} v_0 / c^2}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

5. *Сложение скоростей*



Частица в системе K^* движется параллельно осям x и x^* в направлении v. Тогда

v_x совпадает с модулем скорости v частицы в системе K;

$v^*_{x^*}$ совпадает с модулем скорости v^* частицы в системе K^*. Запишем:

$$v_x = \frac{v^*_{x^*} + v_0}{1 + v^*_{x^*} v_0 / c^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{v^* + v_0}{1 + v^* v_0 / c^2}}$$

$$v_x = \frac{v^*_{x^*} + v_0}{1 + v^*_{x^*} v_0 / c^2}$$

$$v_y = \frac{v^*_{y^*} \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}{1 + v^*_{x^*} v_0 / c^2}$$

$$v_z = \frac{v^*_{z^*} \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}{1 + v^*_{x^*} v_0 / c^2}$$

<u>Получили релятивистский закон сложения скоростей</u>

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для импульса

$\vec{p} = m\vec{v}$ - выражение для импульса тела в классической механике;

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ - выражение для релятивистского импульса тела.

$$\boxed{p = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} mv}$$ - удобная для запоминания форма записи.

$$\boxed{F = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)}$$ - второй закон Ньютона в релятивистской механике .

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для энергии

Выражение для энергии получим, используя второй закон Ньютона. Умножим выражение на перемещение частицы $ds = vdt$.

$$Fds = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)vdt$$

Левая часть -выражение для работы.

Правая часть - приращение кинетической энергии частицы T за время dt.

$$dT = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)vdt = vd\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$vdv = d\left(v^2/2\right)$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для энергии

$$dT = v\left\{\frac{mdv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv\left(v\,dv/c^2\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\right\} = \frac{md\left(v^2/2\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{mc^2 d\left(v^2/c^2\right)}{2\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}$$

$$dT = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

После интегрирования получим:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + const$$

Определим выражение для константы. При $v = 0$ кинетическая энергия обращается в нуль. Следовательно $const = -mc^2$

Итог: $$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для энергии

В релятивистской механике свободная частица кроме кинетической энергии обладает еще так называемой энергией покоя E_0

$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

Выражение для полной энергии E частицы выглядит так:

$$E = T + E_0 = T + mc^2$$

Подставим в это выражение формулу для кинетической энергии, получим окончательно

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$