Вращательное движение твердого тела
Уравнение вращательного движения

Угловая скорость и угловое ускорение тела

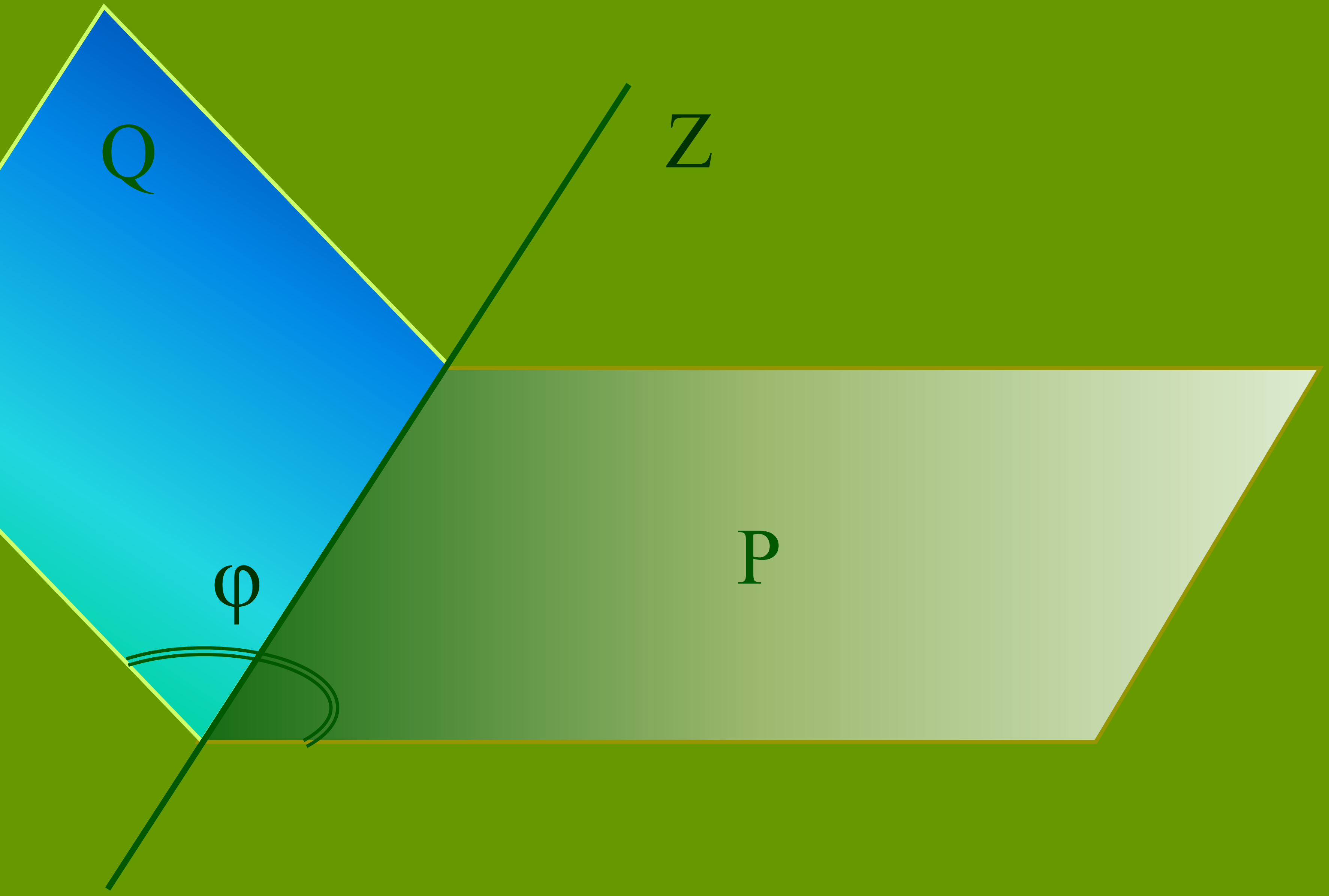
Вращательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными.

Эта прямая называется ***осью вращения тела.***

Все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Зададим направление оси вращения z. Проведем через эту ось две полуплоскости: неподвижную полуплоскость P и подвижную полуплоскость Q, связанную с твердым телом и вращающуюся вместе с ним.

Двугранный угол φ между этими полуплоскостями, отчитываемый от неподвижной полуплоскости P к подвижной полуплоскости Q, называется ***углом поворота тела.***


Q
Z
P
φ

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, т.е. является функцией времени t:

$$\varphi = f(t)$$

Это уравнение называется ***уравнением вращательного движения тела.***

Оно полностью определяет положение тела в любой момент времени.

Угловая скорость и угловое ускорение тела

Величина, характеризующая быстроту изменения угла φ поворота с течением времени, называется *угловой скоростью тела (1 рад/с).*

$$\tilde{\omega} = d\varphi / dt = \dot{\varphi}$$

Числовая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется *угловым ускорением тела* *(1 рад/с^2).*

$$\tilde{\varepsilon} = d^2\varphi / dt^2 = \ddot{\varphi}$$

Уравнение равномерного вращения тела

Вращение тела с постоянной скоростью называется *равномерным*.

Пусть в начальный момент времени $t_0=0$ угол поворота имеет значение φ_0 , тогда

$$d\varphi / dt = \omega = const; d\varphi = \omega \cdot dt.$$

Проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих начальному моменту $t_0=0$ и произвольному моменту времени t:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt; \varphi - \varphi_0 = \omega t \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Уравнение равнопеременного движения тела

Вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно, называют *равнопеременным* вращением.

При этом, если абсолютная величина угловой скорости увеличивается, то вращение называют *равноускоренным*, а если уменьшается – *равнозамедленным*.

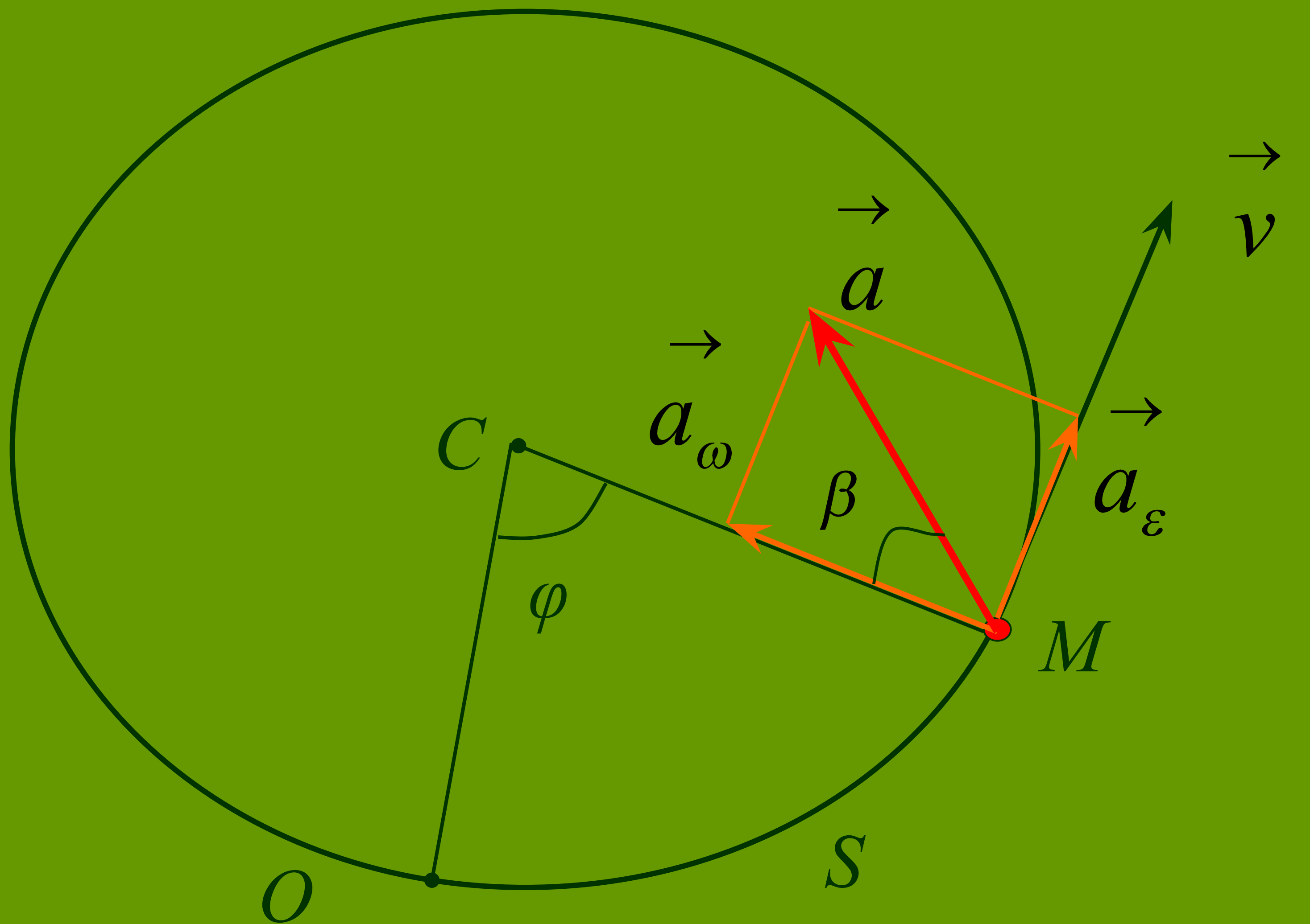
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \varepsilon \cdot t^2 / 2$$

Из формулы угловой скорости находим

$$\varepsilon = \left|\omega - \omega_0\right| / t,$$

т.е. при равнопеременном вращении *абсолютное значение углового ускорения* тела равно отношению изменения угловой скорости тела за некоторый промежуток времени к числовой величине этого промежутка.

Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси



Определим модуль скорости точки M, называемой вращательной или окружной скоростью этой точки

$$v = \left| ds / dt \right| = R \left| d\phi / dt \right| = R\omega$$

Модуль вращательной скорости точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела.

Модули вращательных скоростей различных точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения.

Определим ускорения точек вращающегося тела:

Модуль *вращательного ускорения* точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на модуль углового ускорения точки.

$$a_{\varepsilon} = a_{\tau} = \left| d\tilde{v} / dt \right| = R \left| d\tilde{\omega} / dt \right| = R\varepsilon$$

Модуль *центростремительного ускорения* точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на квадрат угловой скорости точки.

$$a_\omega = a_n = v^2 / R = R^2 \cdot \omega^2 / R = R \cdot \omega^2$$

Модуль полного ускорения точки равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} =$$

$$= R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Тангенс угла β , составленного вектором ускорения $\vec{a}$ с радиусом окружности СМ:

$$tg\beta = a_\tau / a_n = R\varepsilon / (R\omega^2) = \varepsilon / \omega^2$$

Пример решения задачи

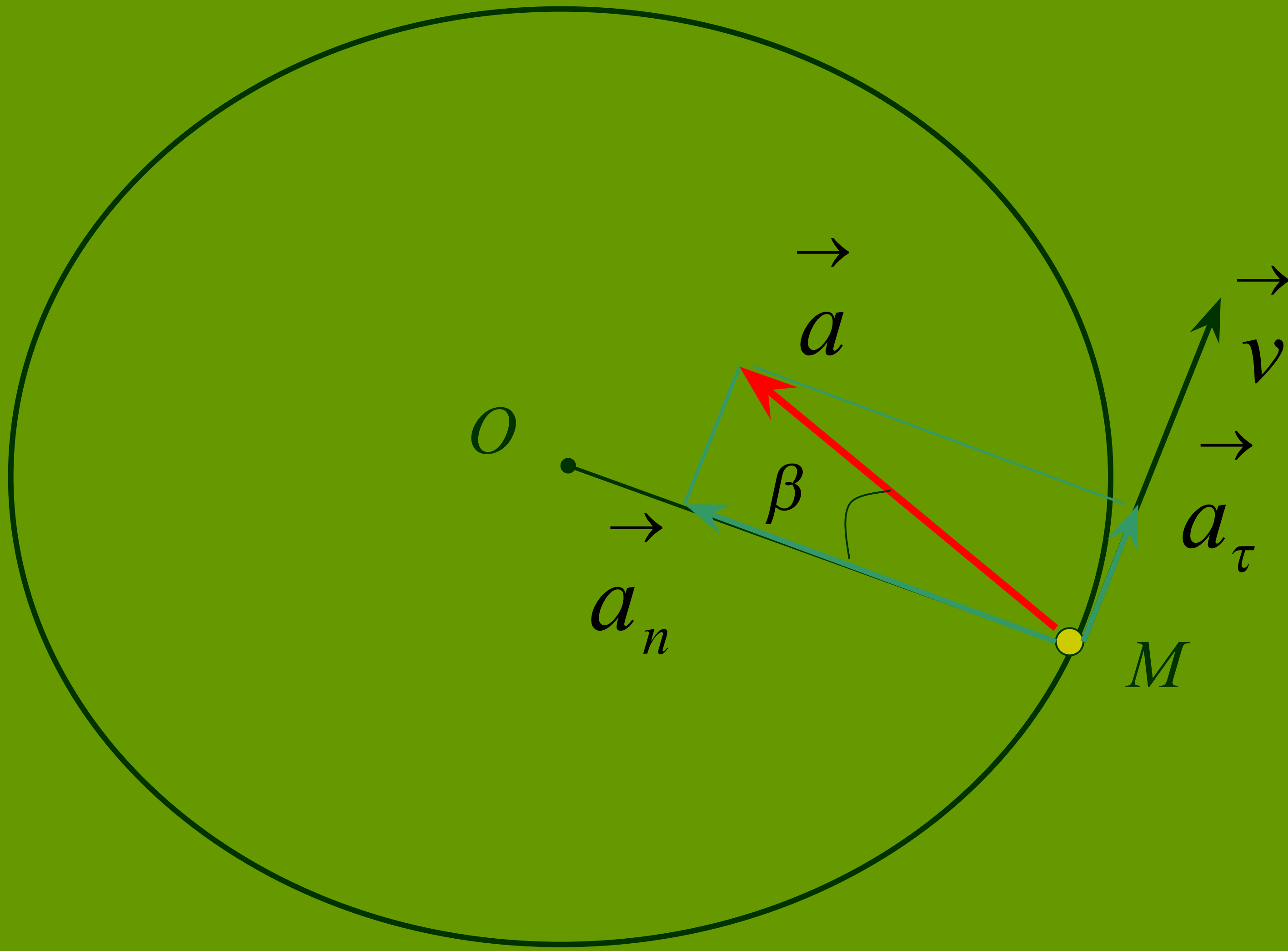
Пример 1

Вращение маховика в период пуска машины определяется уравнением

$$\varphi = (1/3)t^3,$$

где t – в секундах, φ – в радианах.

Определить модуль и направление ускорения точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 50 см, в тот момент, когда ее скорость равна 8 м/с.



$\vec{a}$
$\vec{v}$
O
β
$\vec{a}_\tau$
$\vec{a}_n$
M

Решение:

По уравнению вращения маховика находим его угловые скорость и ускорение:

1. $\omega = d\varphi / dt = t^2$

2. $\varepsilon = \left| d^2\varphi / dt^2 \right| = 2t$

Используя формулу $v = R \cdot \omega$, находим момент времени t_1, когда скорость точки *M* равна *8 м/с:*

$$\omega_1 = v_1 / R = 8/0{,}5 = 16\,рад/с.$$

Из (1) находим t_1:

$$t_1 = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{16} = 4с.$$

Далее вычисляем:

$$\varepsilon_1 = 2 \cdot 4 = 8\,рад/с;$$

$$a_1^\tau = R \cdot \varepsilon_1 = 0{,}5 \cdot 8 = 4\,м/с^2;$$

$$a_1^n = R \cdot \omega_1^2 = 0{,}5 \cdot 16^2 = 128\,м/с^2;$$

$$a_1 = \sqrt{(a_1^\tau)^2 + (a_1^n)^2} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 128^2} = 128{,}6\,м/с^2.$$

Направление ускорения точки определяется углом β:

$$tg\beta_1 = \varepsilon_1 / \omega_1^2 = 8/16^2 =$$

$$= 1/32 \Rightarrow \beta_1 = 1^0 48'.$$

Пример 2

Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n=50c^{-1}$, после выключения тока, сделав $N=500$ оборотов, остановился. Определить угловое ускорение якоря.

Дано:

$n = 50 c^{-1}$

$N = 500$

$\varepsilon = ?$

Решение:

Закон движения: $\varphi = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$,

где $\varphi = 2\pi N$ $\omega_0 = 2\pi n$

Тогда $2\pi N = 2\pi n t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ (*)

С другой стороны: $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$

Так как якорь остановился, то $\omega = 0$

Получаем: $0 = 2\pi n - \varepsilon t$

Тогда $t = \dfrac{2\pi n}{\varepsilon}$

Подставим в формулу (*)

$$2\pi N = 2\pi n \frac{2\pi n}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2\pi n}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{2\pi^2 n^2}{\varepsilon}$$

Отсюда $$\varepsilon = \frac{\pi n^2}{N}$$

$$\varepsilon = 15{,}7 c^{-1}$$