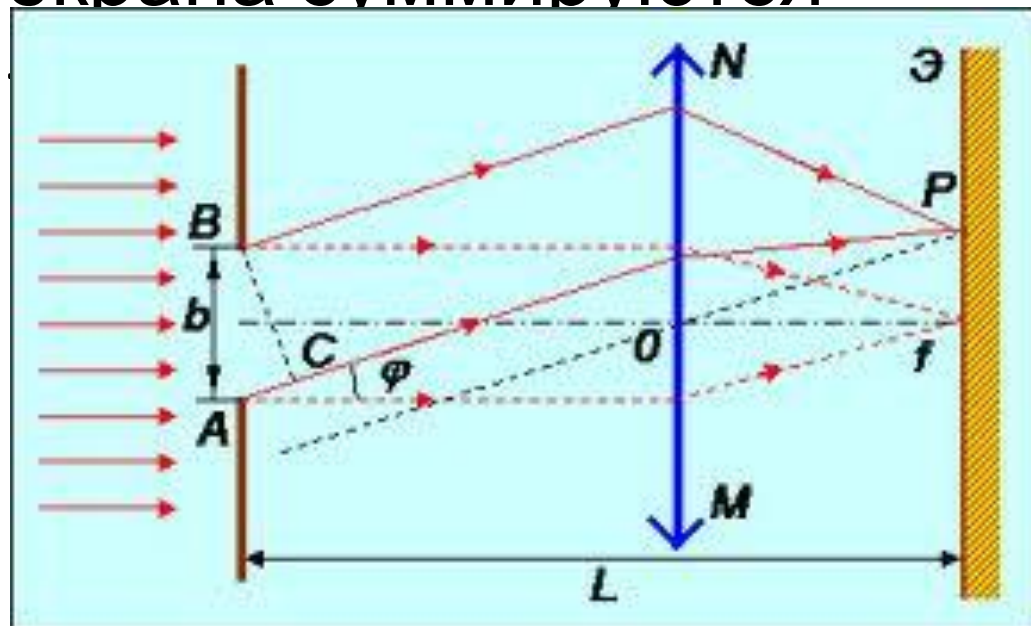


# Лк-37

Дифракция Фраунгофера

(Дифракция Фраунгофера – это дифракция в пара-лельных лучах). Дифрагирующая волна имеет пло-ский фронт, а дифракционная картина получается с помощью линзы, на экране в ее фокальной плос-кости.

Рассматриваем дифракцию на узкой щели. Для этого фронт волны в щели разбивается на мно-жество участков – источников вторичных волн и в произвольной точке экрана суммируются колебания, доставлен-ные туда вторичными волнами от этих источников.



Интенсивность света в какой-либо точке экрана определяется через дополнительный параметр  $\alpha$

$$I = I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2 \quad (37.1)$$

Этот параметр - угол закручивания дуги из суммируемых векторов выражается через ширину щели –  $b$ , длину волны света –  $\lambda$  и угол дифракции  $\varphi$

$$\alpha = \frac{2\pi b \sin(\varphi)}{\lambda} \quad (37.2)$$

При малых углах дифракции можно считать, что

$$\alpha = \frac{2\pi b}{\lambda} \varphi \quad (37.3)$$

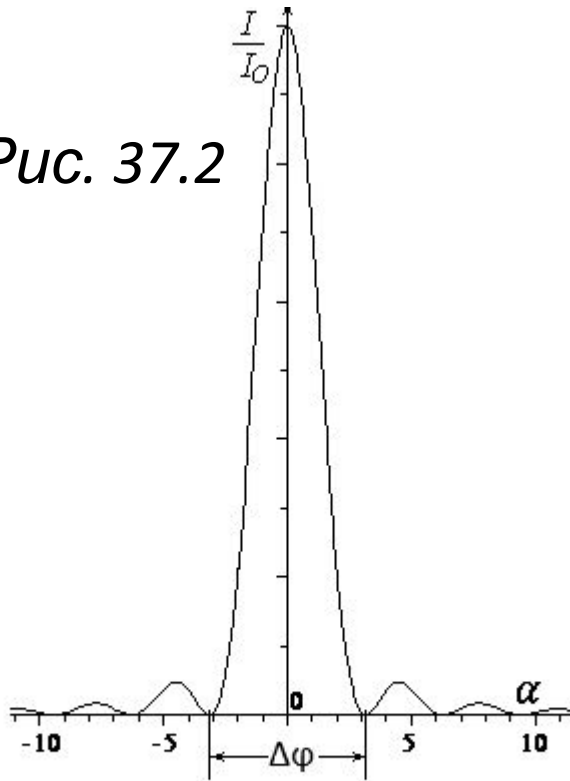
$\frac{I}{I_0}$  $\frac{I}{I_0}$ 

Рис. 37.2

На рисунке показан график функции  $\left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{(\frac{\alpha}{2})}\right)^2$  и фотография дифракционной картины от щели. Ширина главного максимума, на границах которого  $\alpha/2 = \pm\pi$ , определится на основе (37.3)

$$\Delta\varphi = 2 \lambda/b.$$

Чем уже щель, тем шире главный максимум. На него приходится более 90% светового потока. Однако боковые максимумы также видны.

**Пятиминутка:** На щель шириной  $b = 0,05$  мм падает нормально монохроматический свет ( $\lambda = 0,6$  мкм). Определить угол  $\varphi$  между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу

## **Дифракция на проволоке. Принцип Бабинне.**

Для нахождения дифракционной картины от проволоки толщиной  $b$  проведем следующие рассуждения. При расчете дифракционной картины от щели той же ширины  $b$  мы искали суммарный вклад от вторичных источников, расположенных на открытой части исследуемого объекта. Для проволоки, наоборот, данная часть объекта будет закрытой, а остальное пространство открытым. Такие объекты, как бы дополняющие друг друга, носят название дополнительных.

Обозначим распределение поля на экране в случае дифракции на щели  $U_{\text{щ}}(\varphi)$ , а на проволоке -  $U_{\text{п}}(\varphi)$ , где  $\varphi$  – угловая координата после препятствия. Тогда сумму полей  $U_{\text{щ}}(\varphi) + U_{\text{п}}(\varphi)$  можно предста-вить как сумму интегралов по открытым областям для каждого из этих объектов, или как интеграл от суммы открытых областей. Но отверстия для дополнительных объектов располагаются так, что "открывают" весь волновой фронт падающего излучения, следовательно  $U_{\text{щ}}(\varphi) + U_{\text{п}}(\varphi) = U_0(\varphi)$ , где  $U_0(\varphi)$  — волновое возмущение на экране в случае отсутствия какого-либо препятствия.

Таким образом, сумма распределений полей от дополнительных объектов равна полю, наблюдаемому на экране при отсутствии препятствия. Полученный результат носит название **принципа Бабине**.

Если исходное поле  $U_0(\varphi)$  пучок параллельных лучей, идущих под углом  $\varphi = 0$ , то для  $\varphi \neq 0$   $U_0(\varphi) = 0$ . В этом случае для  $\varphi \neq 0$  принцип Бабине дает

$U_{\text{щ}}(\varphi) = -U_{\text{п}}(\varphi) = 0$ . Но интенсивность света – это квадрат амплитуды, следовательно при  $\varphi \neq 0$  :

$$I_{\text{щ}}(\varphi) = I_{\text{п}}(\varphi). \quad (37.4)$$

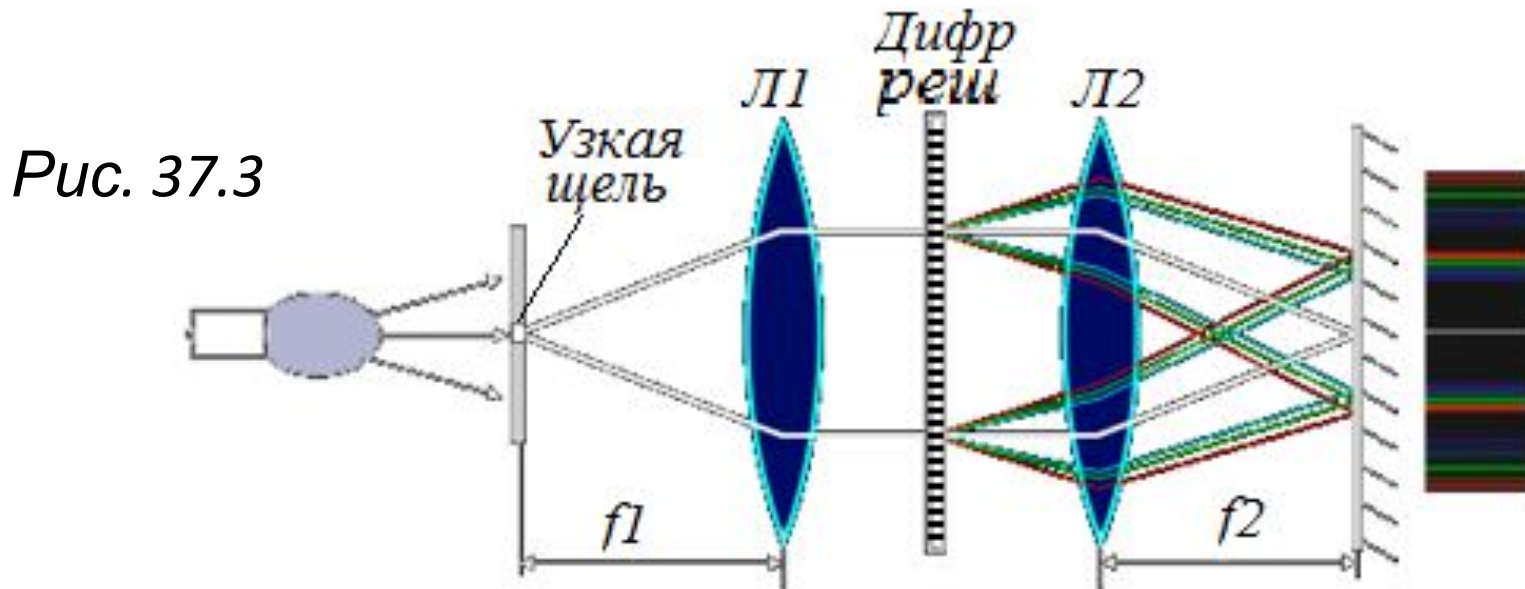
Т.е. дифракционная картина от щели шириной  $d$  и проволоки той же толщины одинаковы, за



## *Дифракционная решетка.*

Дифракционная решётка - оптический прибор, предназначенный для анализа спектрального состава оптического излучения. Дифракционная решётка состоит из тысяч узких и близко расположенных щелей. Из-за интерференции вторичных волн интенсивность света, прошедшего через дифракционную решётку различна в различных направлениях. Имеются выделенные направления, в которых световые волны от различных щелей решётки складываются в фазе, многократно усиливая друг друга.

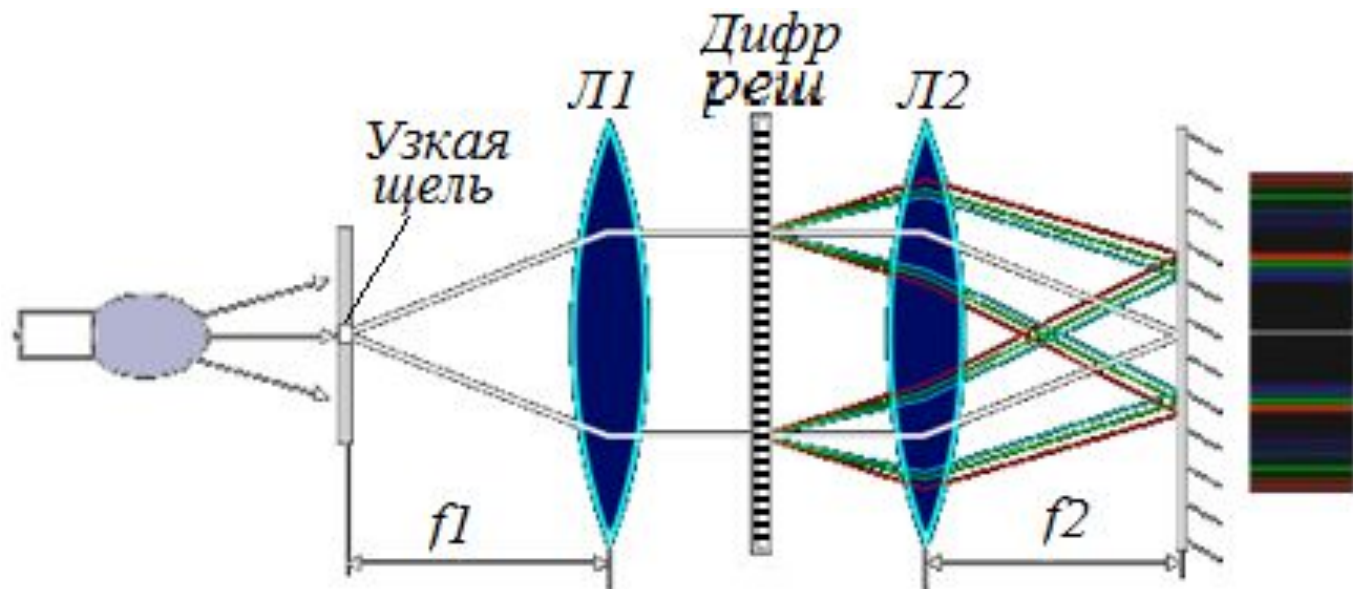
При освещении решётки монохроматическим светом на её выходе наблюдаются узкие лучи с большой интенсивностью. Так как направления на интерференционные максимумы зависят от длины волны, белый свет, прошедший через дифракционную решётку, будет расщепляться на множество лучей разного цвета. Таким образом мы можем исследовать спектральный состав света.



Оптическая схема анализатора спектра с дифракционной решеткой: Узкая щель, находящаяся в фокусе линзы  $L1$ , освещается источником света.

Параллельный пучок света после линзы направляется на дифракционную решетку. За решеткой находится вторая линза, которая формирует изображение щели на экране в своей фокальной плоскости.

Дифракция на решетке приводит к тому, что изображение щели оказывается



в различных местах для волн с различной  $\lambda$ .

Рассмотрим простейшую дифракционную решетку, работающую на пропускание. Эта решетка представляет собой плоский экран с чередующимися прозрачными и непрозрачными полосами. Все прозрачные полосы имеют одинаковую ширину -  $a$ . Все непрозрачные полосы также имеют одинаковую ширину -  $b$ . Сумма  $a+b=d$  называется шагом (или периодом) решетки. Общее число штрихов решетки обозначим  $N$ . Тогда ширина решетки равна произведению  $Nd$

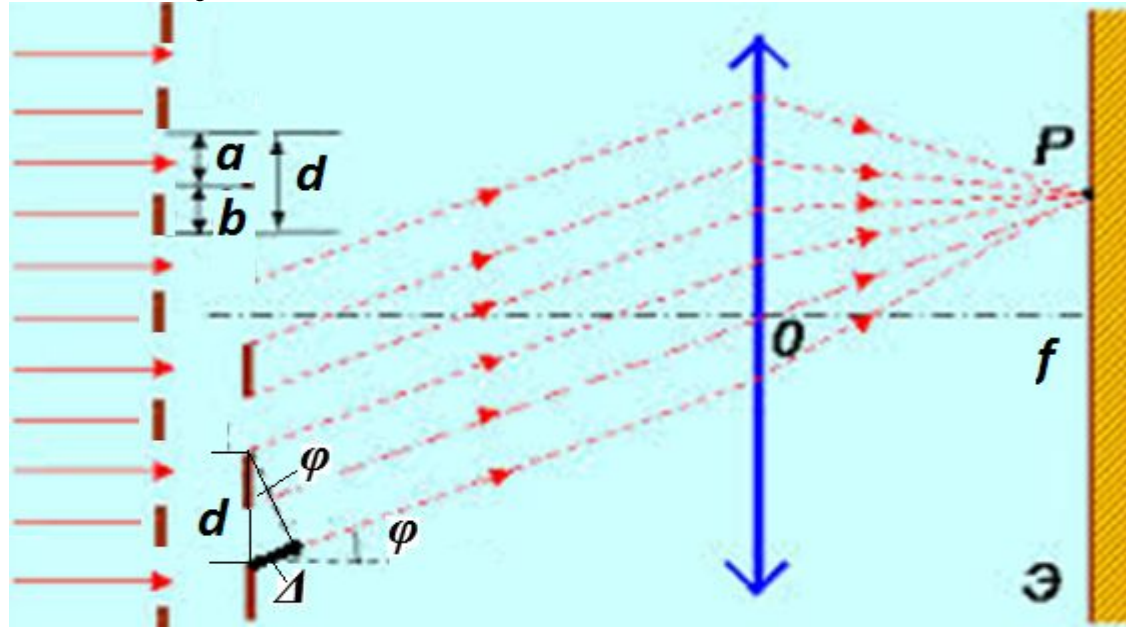


Рис. 37.4

Главный дифракционный максимум образуется при условии, что волны от соседних штрихов решетки приходят в точку наблюдения в одинаковой фазе. Для этого соответствующая разность хода  $\Delta = d \sin(\varphi)$  должна быть кратна  $\lambda$ . Поэтому условие т.н. главных максимумов запишется в виде:

$$d \sin(\varphi_{max}) = m \lambda \quad (37.5)$$

где  $m$  - целое число, называемое порядком главного максимума. Это основная формула дифракционной решетки.

*Пятиминутка: решетка имеет 300 штрихов на 1 мм. Длина волны света 500 нм. Определить угол направления на гл. максимум 2 порядка.*

Оценим амплитуду дифрагировавшей волны и ее зависимость от угла дифракции  $\varphi$ . Разность фаз между волнами от соседних щелей одинакова. Число щелей велико. Тогда картина сложения амплитуд будет аналогична картине сложения при дифракции на одной щели. Векторы амплитуд будут лежать на дуге окружности. При изменении направления наблюдения  $\varphi$  дуга окружности будет сворачиваться или разворачиваться в дугу меньшего или большего радиуса при сохранении длины дуги.

Направление главного максимума соответствует условию, когда дуга разворачивается в прямую линию. Если дуга сворачивается в окружность, то интенсивность света в этом направлении равна нулю. При этом разность фаз волн от первого и

последнего щелевого источника  
 Следовательно разность фаз волн двух соседних щелей равна  $2\pi/N$ .

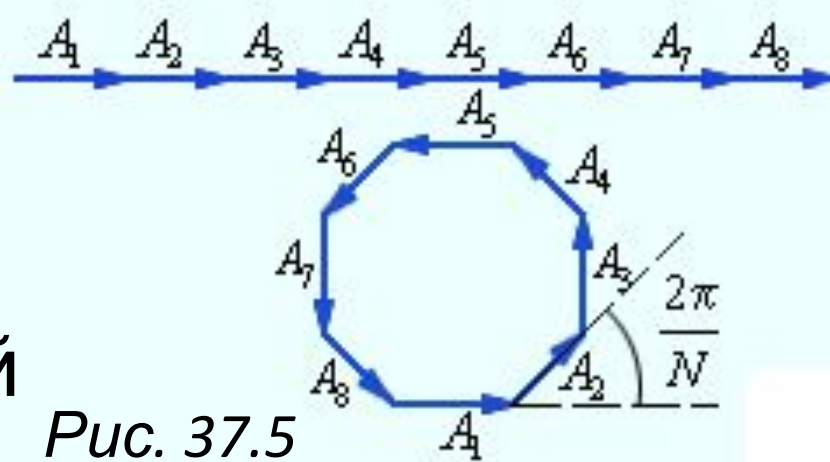


Рис. 37.5

Гл. максимум

Соседний минимум

Направления на минимум будут удовлетворять условию:

$$d \sin(\vartheta) = m\lambda + k\lambda/N, \quad (37.6)$$

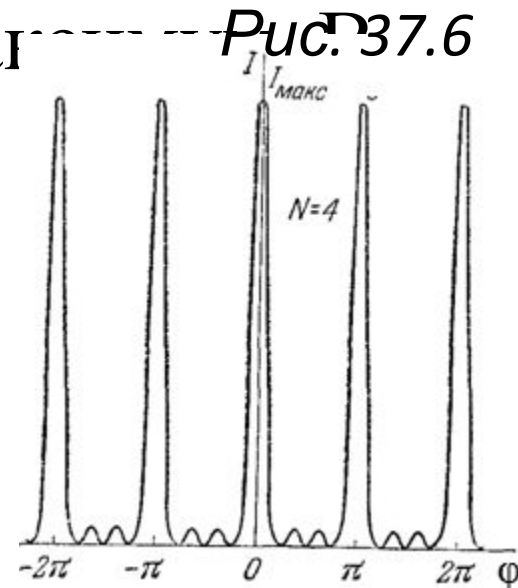
Сравним условия дифракционного максимума (37.5) и дифракционного минимума (37.6)

$$d \sin(\varphi_{max}) = m\lambda, \quad - \text{условие максимума} \quad (37.7)$$

$$d \sin(\varphi_{min}) = m\lambda + k\lambda/N, \quad - \text{условие минимума} \quad (37.8)$$

Видим, что (37.6) является общей формулой экстремумов амплитуды светового вектора при дифракции на решетке. Если  $k=0$  или  $k=N$ , формула выражает направление на максимум. Если  $k=1, 2, 3 \dots N-1$ , формула дает направление на минимум.

Отсюда следует вывод о том, что между соседними главными максимумами находятся  $N-1$





Определим угловую ширину какого-либо главного максимума как разность углов  $\varphi_{max} - \varphi_{min}$  при  $k=1$ , т.е. угловое расстояние между главным максимумом и ближайшим к нему минимумом

Взяв разность синусов углов максимума и ближайшего минимума, получим

$d\sin(\varphi_{max}) - d\sin(\varphi_{min}) = \lambda/N$ . Используем тригонометрическую формулу

$$\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) = -2\cos(\alpha_1/2 + \alpha_2/2)\sin(\alpha_1/2 - \alpha_2/2)$$

Поскольку углы  $\varphi_{max}$  и  $\varphi_{min}$  близки, можно записать

$$\varphi_{max} - \varphi_{min} = \lambda / (Nd\cos(\varphi_{max})) \quad (37.9)$$

Произведение  $Nd$  – это общая ширина решетки. С ее увеличением главные максимумы становятся уже, что позволяет различить спектральные линии близкие по длине волн.

Критерием разрешения двух спектральных линий с близкими длинами волн принято условие, при котором максимум одной волны приходится на минимум другой, который является ближайшим к ее максимуму. Это условие можно записать в виде формул:

$$d \sin(\varphi_{\max 1}) = m \lambda_1 = d \sin(\varphi_{\min 2}) = m \lambda_2 + \lambda_2 / N$$

Из этого равенства получим

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta \lambda = \lambda_2 / (Nm) \quad (37.10)$$

Обычно пользуются величиной относительного разрешения –  $\Delta\lambda/\lambda=1/(Nm)$ . (37.11)

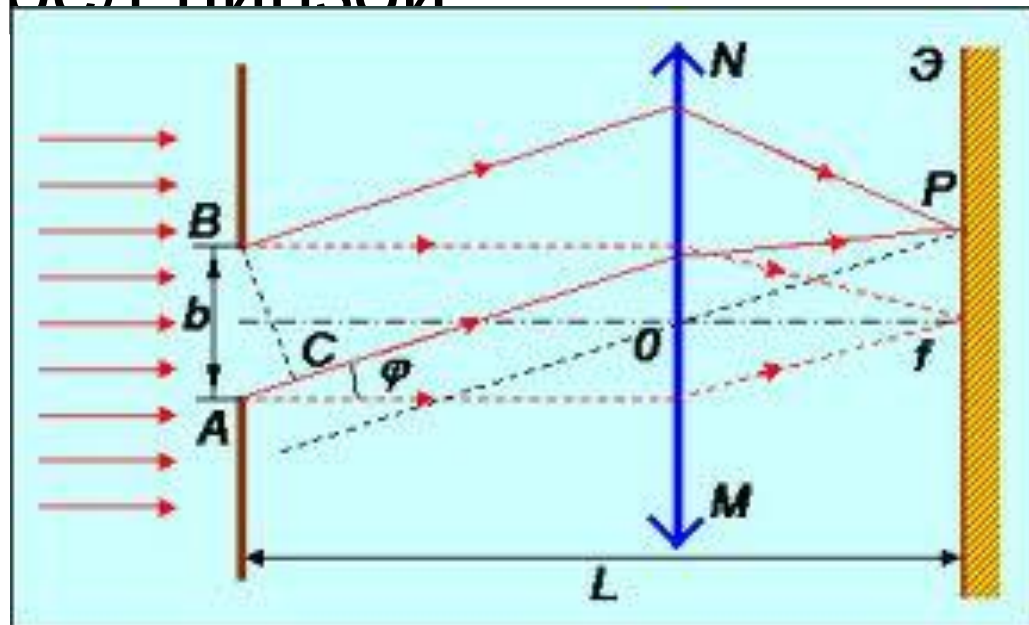
Разрешающая способность решетки определяется числом штрихов-  $N$  и порядком используемого максимума –  $m$ .

## **Дифракционный предел разрешения оптических инструментов**

можно определить как минимальное расстояние между двумя точечными источниками, которые изображаются линзой в виде отдельных светлых пятен. Почему точечный источник изображается в виде пятна, а не точки?

Вернемся к дифракции Фраунгофера на щели. Если щель широкая, то параллельный пучок лучей должен сфокусироваться линзой в точку. Вместо этого мы имеем дифракционную картину с угловой шириной главного максимума  $\Delta\phi = 2\lambda/b$ . То вместо линии с нулевой шириной мы имеем полосу шириной  $d = f \Delta\phi = 2f\lambda/b$ . Если перед линзой

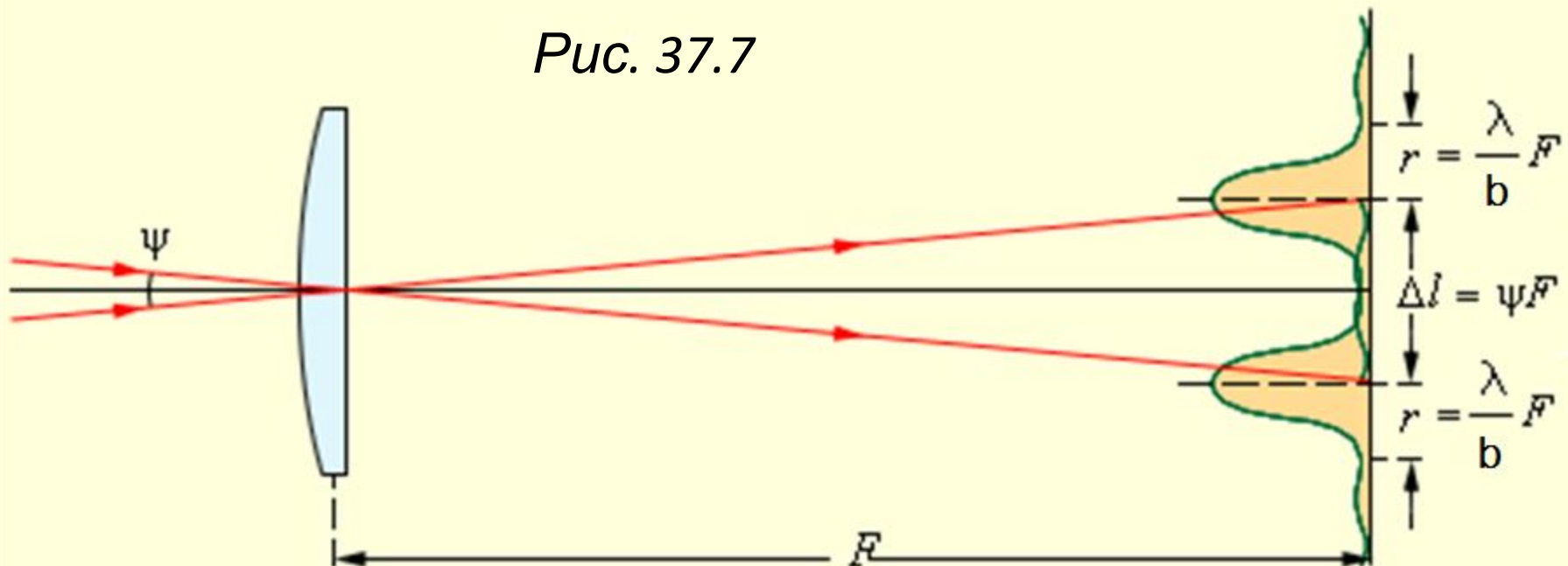
Нет препятствия в виде щели, то его роль играет оправа линзы.



Условно можно принять, что изображения двух светящихся линий можно различить, если главный дифракционный максимум одной из них попадет на первый дифракционный минимум другой. Для этого угловое расстояние между ними должно составить половину ширины дифракционного максимума, т.е.  $\psi =$

$\lambda$

Рис. 37.7



В случае микроскопа предмет располагается вблизи фокуса объектива. При этом две точки предмета могут быть различимы если расстояние между ними будет не меньше, чем

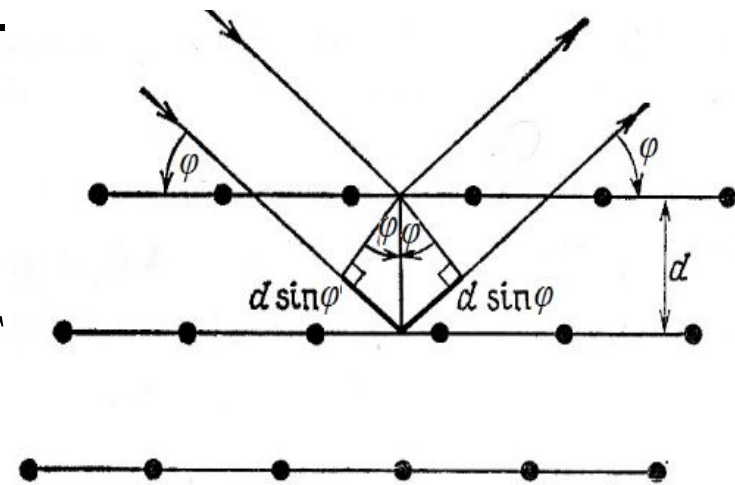
$$a = \psi f = \frac{\lambda f}{b} \quad (37.12)$$

Для круглого объектива  $b=1.22d$ , где  $d$  - его диаметр. Таким образом, для улучшения разрешающей способности объектива необходимо увеличивать его диаметр. Объективы фотокамер мобильных телефонов по этому показателю – очевидная дрянь.

# Дифракция рентгеновских лучей в кристаллах

Падающая на тело электромагнитная волна вызывает колебания электронов в атомах. При этом атомы излучают электромагнитные волны с той же длиной волны и сферическим фронтом. В результате, волна рассеивается по всем направлениям. Каждый из атомов становится источником рассеянных волн, которые в результате интерференции могут усиливать или ослаблять друг друга. Это означает, что энергия излучения рассеивается в разных направлениях с различной

Длина волны видимого света значительно превышает межатомные расстояния кристаллических тел. Отражение от них не приводит к заметным интерференционным явлениям. Рентгеновские лучи имеют меньшие длины волн, сравнимые с межатомными расстояниями ( $10^{-10}$  м). Это позволяет использовать рентгеновские лучи для исследования кристаллических тел или использовать кристаллические тела в роли дифракционных решеток для рентгеновских лучей. Пусть на кристалл под углом скольжения  $\varphi$ , падает пучок монохроматических рентгеновских лучей с длиной волны  $\lambda$





Лучи отражаются от параллельного поверхности семейства атомных плоскостей с межплоскостным расстоянием  $d$  под таким же углом  $\varphi$ . Как видно из рисунка, разность хода лучей, отраженных от соседних плоскостей расположения атомов равна  $\Delta=2d\sin(\varphi)$ . Если эта разность хода равна целому числу длин волн, отраженные лучи создадут интерференционный максимум, который можно зарегистрировать, изменяя угол  $\varphi$ . Условие максимума

$$2d\sin(\varphi)=n\lambda \quad (37.13)$$

Называют условием *Вульфа-Бреггов*.

Исследование дифракционного рассеяния рентгеновских лучей составляет целую отрасль материаловедения – **рентгеноструктурный анализ**.

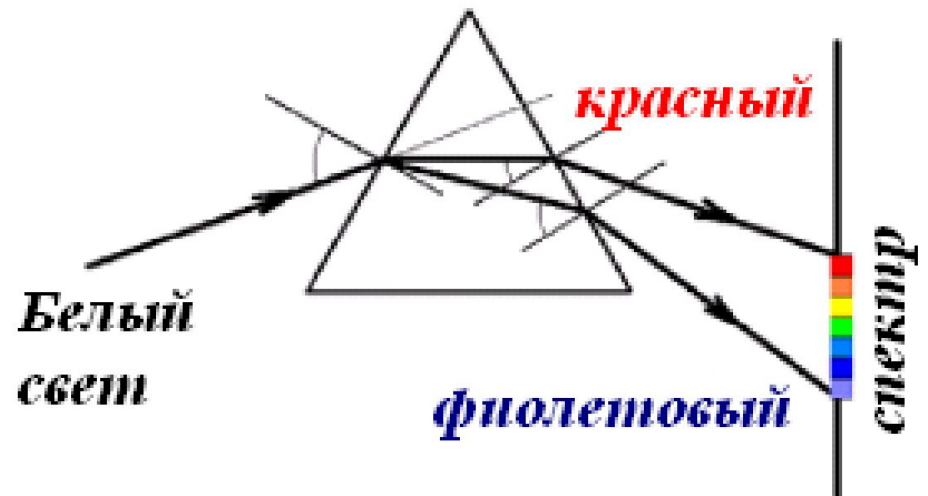
**Пятиминутка:** На грань кристалла падает параллельный пучок рентгеновских лучей с длиной волны  $0.075$  нм. Расстояние между атомными плоскостями равно  $0.2$  нм. Под каким углом скольжения следует направить лучи на поверхность, чтобы получить дифракционный максимум 1 порядка.

# Дисперсия света.

Нормальная и аномальная дисперсия

**Дисперсия света** – зависимость фазовой скорости света (показателя преломления) в среде от его частоты  $n = \varphi(\nu)$  или (от длины волны  $\lambda$ ):  $n = f(\lambda)$ .

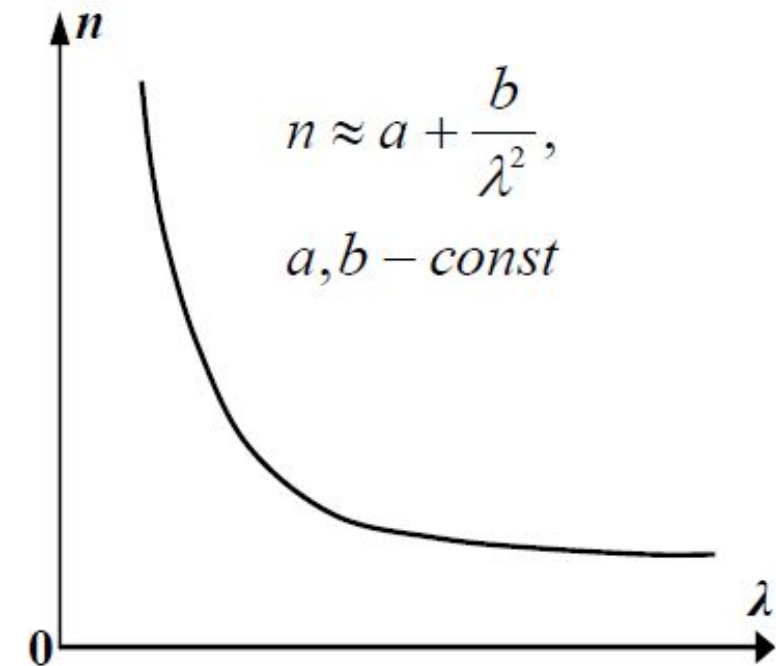
*Следствие дисперсии*  
разложение в спектр пучка белого света при прохождении через стеклянную призму



Зависимости  $n = \varphi(\nu)$ ;  $n = f(\lambda)$  – нелинейные и немонотонные.

*Дисперсия вещества* – величина,

определяемая соотношениями:  $D = \frac{dn}{d\lambda}$ ;  $D = \frac{dn}{d\nu}$



Области значений  $\nu$ ,  $\lambda$ , в которых дисперсия  $D$  увеличивается по модулю с ростом  $\nu$ , с уменьшением  $\lambda$

соответствуют *нормальной дисперсии света*.

*Нормальная дисперсия света*

наблюдается у веществ прозрачных для света.

Например, обычное стекло прозрачно для видимого света, и в этой области наблюдается нормальная дисперсия света в стекле

Если вещество поглощает часть лучей, то в области поглощения и вблизи неё ход дисперсии обнаруживает аномалию, т.е. на некоторых участках более короткие волны преломляются меньше, чем более длинные. Такой характер дисперсии называется *аномальной дисперсией*. Например, у обычного стекла эти полосы находятся в инфракрасной и ультрафиолетовой частях спектра.

