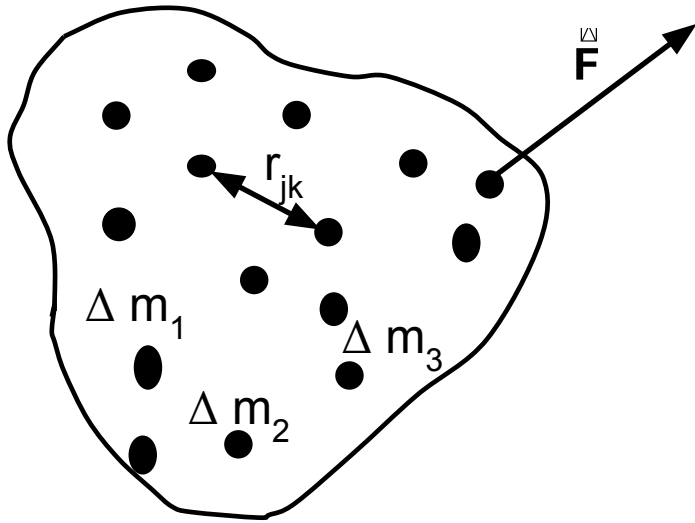


# Движение абсолютно твёрдого тела

# Понятие абсолютно твёрдого тела



$\Delta m_i$  - элементарная масса

$\vec{F}$  - внешняя сила

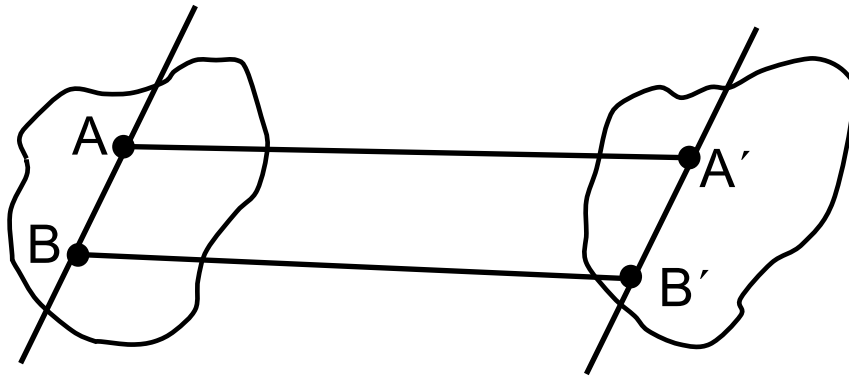
$r_{jk}$  - расстояние между точками  $j$  и  $k$

## Абсолютно твёрдое тело –

тело , расстояние между двумя любыми точками которого во время движения остаётся неизменным, т.е. тело не деформируется

$$r_{jk} = \text{const}$$

# Поступательное движение абсолютно твердого тела



$$AB \parallel A'B'$$

$$AA' = BB'$$

Поступательное движение абсолютно твердого тела называется такое движение тела, при котором любая прямая, проведенная через две произвольные точки, перемещаются параллельно самой себе ( $AB \parallel A'B'$ )

Скорости и ускорения при поступательном движении тела одинаковы для всех точек этого тела

# Закон движения центра масс тела

$$\Delta m_i \vec{a} = \vec{f}_i + \vec{F}_i$$

$\vec{a}$  - ускорение, одинаково для всех точек тела

$$\sum_i \Delta m_i \vec{a} = \sum_i \vec{f}_i + \sum_i \vec{F}_i$$

$\vec{f}_i$  - внутренняя сила, действующая на точку  $i$  со стороны других точек

$$\sum_i \vec{f}_i = 0$$

$$\vec{a} \sum_i \Delta m_i = \sum_i \vec{F}_i$$

$\vec{F}_i$  - внешняя сила, действующая на точку  $i$

$$\sum_i \Delta m_i = m$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{F} = m \vec{a}}$$

$m$  - масса тела

$\vec{F}$  - главный вектор внешних сил

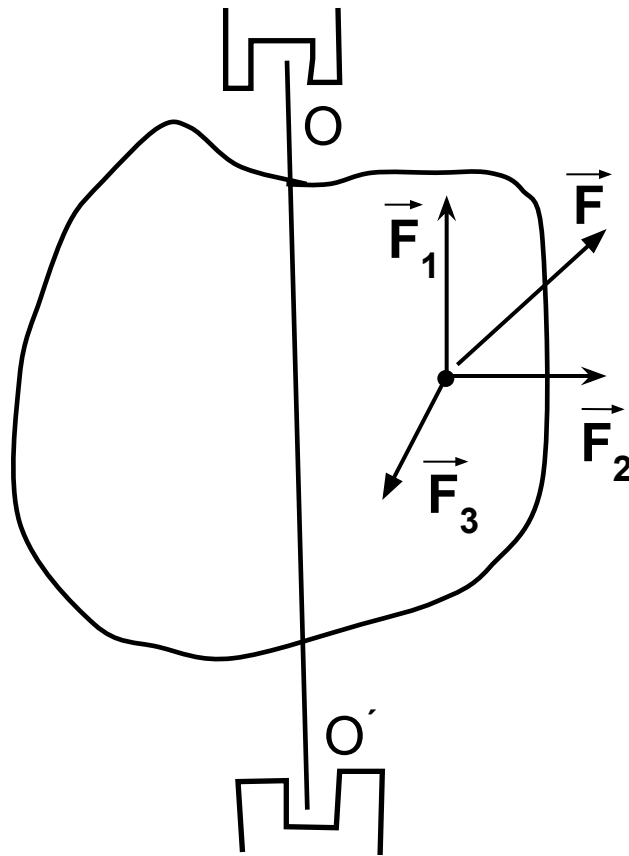
Центр масс тела движется так, как движется материальная точка с массой, равной массе тела  $m$ , под влиянием силы, равной главному вектору внешних сил  $\vec{F}$

Центром масс называется такая воображаемая точка тела, радиус - вектор которой  $\vec{R}$ , выражается через радиусы векторы  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots$  материальных точек тела по формуле

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m}$$

$m = m_1 + m_2 + \dots + m_N$  – общая масса тела, состоящего из  $N$  материальных точек

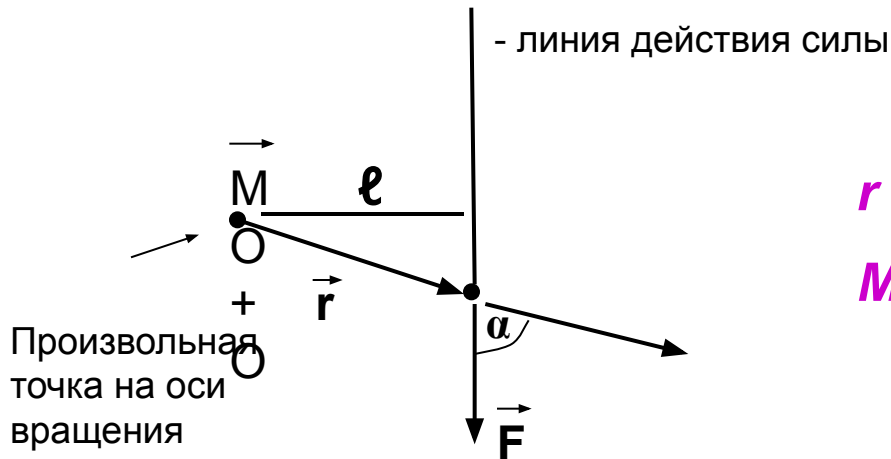
# Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



*Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором материальные точки тела движутся по concentric окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.*

$OO'$  - ось вращения тела

# Момент силы относительно точки



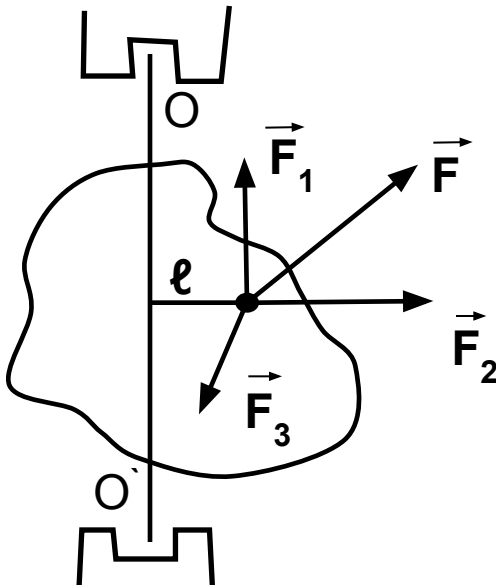
$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$$

$r \cdot \sin \alpha = \ell$  - плечо силы

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = \ell \cdot F$$

$$M = \ell \cdot F$$

# Момент силы относительно оси



Вращение тела вызывается составляющей  $F_3$ , перпендикулярной плоскости, в которой лежит ось вращения

$$M = \ell \cdot F_3$$

Модуль момента силы относительно оси  $OO'$

# Основное уравнение динамики вращательного движения

$$\vec{F}_i = \Delta m_i \cdot \vec{a}_i$$

$$\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = \Delta m_i \cdot \varepsilon \cdot \vec{r}_i^2$$

$$\vec{M}_i = I_i \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots = J_1 \vec{\varepsilon} + J_2 \vec{\varepsilon} + \dots$$

$$\boxed{\vec{M} = J \vec{\varepsilon}}$$

Основное уравнение  
вращательного движения  
твёрдого тела

$$\vec{a}_i = \varepsilon \vec{r}_i$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon = \text{const}$$

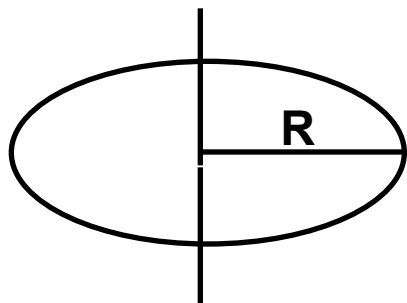
$\Delta m_i \cdot r_i^2 = J_i$  – момент  
инерции материальной  
точки относительно оси  
вращения

$J_1 + J_2 + \dots = J$  –  
момент инерции  
тела относительно  
оси вращения



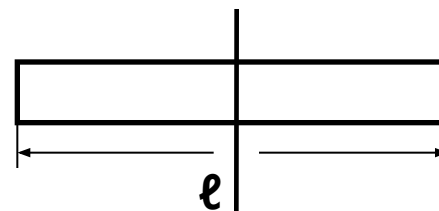
# Моменты инерции некоторых тел относительно оси, проходящей через центр тяжести ( $J_o$ )

1) Кольцо



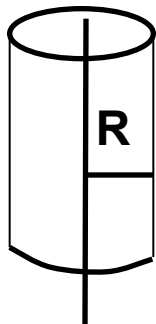
$$J_o = m R^2$$

3) Стержень



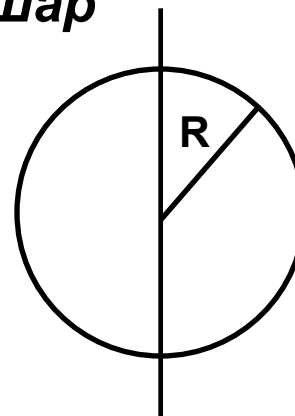
$$J_o = 1/12 m l^2$$

2) Сплошной цилиндр



$$J_o = 1/2 m R^2$$

4) Шар



$$J_o = 2/5 m R^2$$

# Работа и энергия вращательного движения твёрдого тела

При поступательном движении

$$\text{Работа : } A = F \cdot d$$

Кинетическая энергия:

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2} m v^2$$

При вращательном движении

$$A = M \cdot d\varphi$$

$$E_{\text{к}} = \frac{J \omega^2}{2}$$

*Если тело вращается и движется поступательно:*

$$E_{\text{к}} = \frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}$$

(Пример: движение колеса по дороге)

# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТЕЛА

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$$

- основное уравнение вращательного движения твёрдого тела

$\vec{M}$  – момент силы,  $J$  – момент инерции,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d \vec{\omega}}{d t} \quad - \text{угловое ускорение}$$

$$\vec{M} = J \cdot \frac{d \vec{\omega}}{d t}; \quad \vec{M} \cdot d t = J \cdot d \vec{\omega};$$

$\vec{M} \cdot d t = d (J \vec{\omega})$  - если ось вращения не изменяет своего положения

$\vec{L} = J \vec{\omega}$  – момент импульса тела, или интеграл движения

$\vec{M} \cdot d t$  – импульс момента внешних сил

Импульс момента внешних сил, действующих на тело, равен изменению момента импульса тела.

# Закон сохранения момента импульса

Если система замкнутая, то внешние  $\vec{M}$  силы не действуют, и момент внешних сил  $\vec{M} = 0$ .

$$\vec{M} \cdot dt = d(J \cdot \vec{\omega}); \quad J \cdot \vec{\omega} = \vec{L} \quad \text{момент импульса}$$

$$d(J \cdot \vec{\omega}) = 0;$$

$$J \cdot \vec{\omega} = \text{const}$$

Если система замкнутая, то момент импульса системы сохраняется.

Сохраняется не только величина момента импульса, но и направление.

Если  $J$  - уменьшается, то  $\vec{\omega}$  - увеличивается и наоборот.