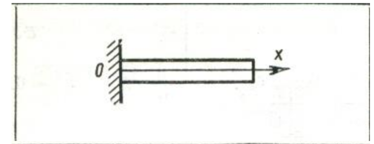
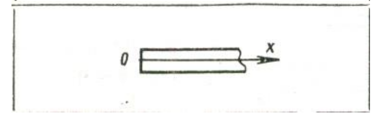
Семинар13. Продольные колебания стержня

Основные типы краевых условий для продольных колебаний стержней

1. $\boldsymbol{u = 0}$

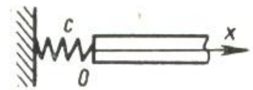


2. $EF\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$

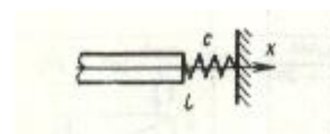


3. $EF\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = N$

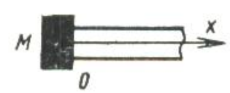
4.1. $EF\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - cu = 0$



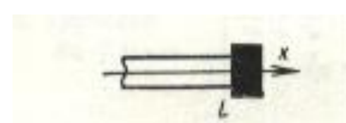
4.2. $EF\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + cu = 0$



5.1. $EF\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = M\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$



5.2. $EF\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = -M\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$



1. Записать уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (8.2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (8.2a)$$

2. Записать решение уравнения продольных колебаний стержня

$$u(x,t) = U(x)\sin\omega t \quad (8.3a)$$

3. Подставить решение в уравнение продольных колебаний стержня и получить обыкновенное дифференциальное уравнение для функции ***U(x)***

$$U'' + \beta^2 U = 0 \quad (8.4) \quad \text{где } \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad (8.5)$$

4. Записать общее решение обыкновенного дифференциального уравнения для функции ***U(x)***

$$U(x) = C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x \quad (8.6)$$

5. Записать краевые условия для продольных колебаний стержня при ***x=0 и x=L*** относительно ***u(x,t)***

6. Подставить решение (8.3а) в краевые условия относительно ***u(x,t)***

7. Записать краевые условия при ***x=0 и x=L*** относительно ***U(x)***

8. Подставить общее решение (8.6) в краевые условия и получить систему линейных однородных уравнений для определения C_1. и C_2

9. Из условия существования ненулевого решения этой системы приравнять нулю ее определителя.

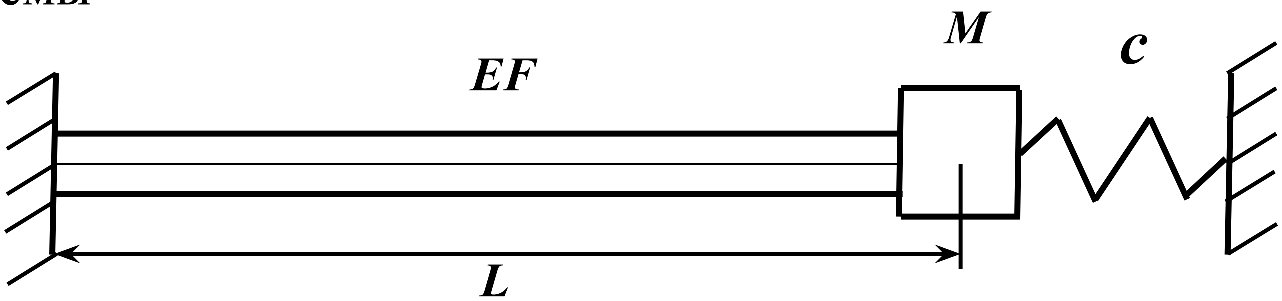
10. Раскрыть определитель системы и получить уравнение частот.

11. Определить частоты собственных колебаний.

12. Формы собственных колебаний определяются ненулевым решением C_j при $\omega = \omega_k$

где ω_k - одна из собственных частот.

Пример 3. Определить собственную частоту продольных колебаний стержневой системы



1. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (8.2a) \qquad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

2. Решение

$$u(x,t) = U(x)\sin\omega t \quad (8.3a)$$

3. Подстановка (8.3а) в (8.2а) приводит к уравнению

$$U'' + \beta^2 U = 0 \quad (8.4) \quad \text{где } \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad (8.5)$$

4. Общее решение (8.4) можно представить в виде

$$U(x) = C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x \quad (8.6)$$

4. Общее решение (8.4) можно представить в виде

$$U(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x \quad (8.6)$$

5. Граничные условия

u (0, t) = 0 (x = 0)

$$EF\frac{\partial u}{\partial x} = -M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - cu \quad (x = L)$$

7. Подставим (8.3а) в граничные условия

U (0) = 0 (x = 0)

$$EF\frac{\partial U}{\partial x} = -M(-\omega^2)U - cU \quad (x = L)$$

8. Подставим (8.6) в граничные условия относительно ***U(x)***

$$U(0) = 0 \quad C_2 = 0$$

$$U(x) = C_1 \sin \beta x \quad (8.6a)$$

$$EF\frac{\partial U}{\partial x} = -M(-\omega^2)U - cU \quad (x = L)$$

$$EFC_1\beta \cos \beta L = +MC_1\omega^2 \sin \beta L - cC_1 \sin \beta L$$

9. Для того, чтобы было не нулевое решение необходимо

$$EF\beta \cos \beta L = (+M\omega^2 - c)\sin \beta L$$

$$EF\beta \cos \beta L = (+M\omega^2 - c)\sin \beta L$$

10. ***Преобразования***

$$EF\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} = (+M\omega^2 - c)tg\frac{\omega L}{c_0} \;\Bigg|\; : M\omega$$

$$\frac{EF}{M}\sqrt{\frac{\rho}{E}} = (\omega - \frac{c}{\omega M})tg\,\frac{\omega L}{c_0}$$

$$\frac{EF}{M}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\sqrt{\frac{\rho}{\rho}} = (\omega - \frac{c}{\omega M})tg\,\frac{\omega L}{c_0}$$

$$\frac{\rho FL}{M}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = (\omega - \frac{c}{\omega M})Ltg\,\frac{\omega L}{c_0}$$

$$\frac{\rho FL}{M}c_0 = (\omega - \frac{c}{\omega M})Ltg\,\frac{\omega L}{c_0}$$

$$\frac{\rho FL}{M} = (\frac{\omega L}{c_0} - \frac{cL}{\omega\, c_0 M})tg\,\frac{\omega L}{c_0}$$

$$\frac{\rho FL}{M} = \left(\frac{\omega L}{c_0} - \frac{\omega_0^2 L}{\omega\, c_0}\right)tg\,\frac{\omega L}{c_0}$$

$$\frac{\rho FL}{M} = \left(\chi - \frac{\omega_0^2 L^2 / c_0^2}{\chi}\right)tg\chi$$

11. Собственные частоты продольных колебаний определяются из уравнения

$$\frac{\rho FL}{M} = \left(\chi - \frac{\omega_0^2 L^2 / c_0^2}{\chi} \right) tg\chi$$

12. Собственные формы продольных колебаний

$$U_k(x) = \sin \frac{\omega_k x}{c_0} \quad (10.9)$$