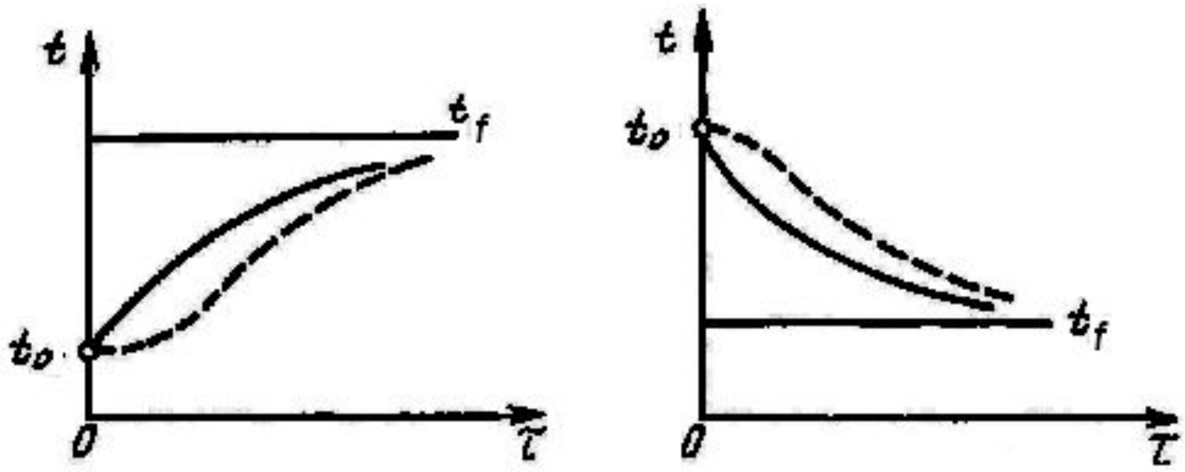
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

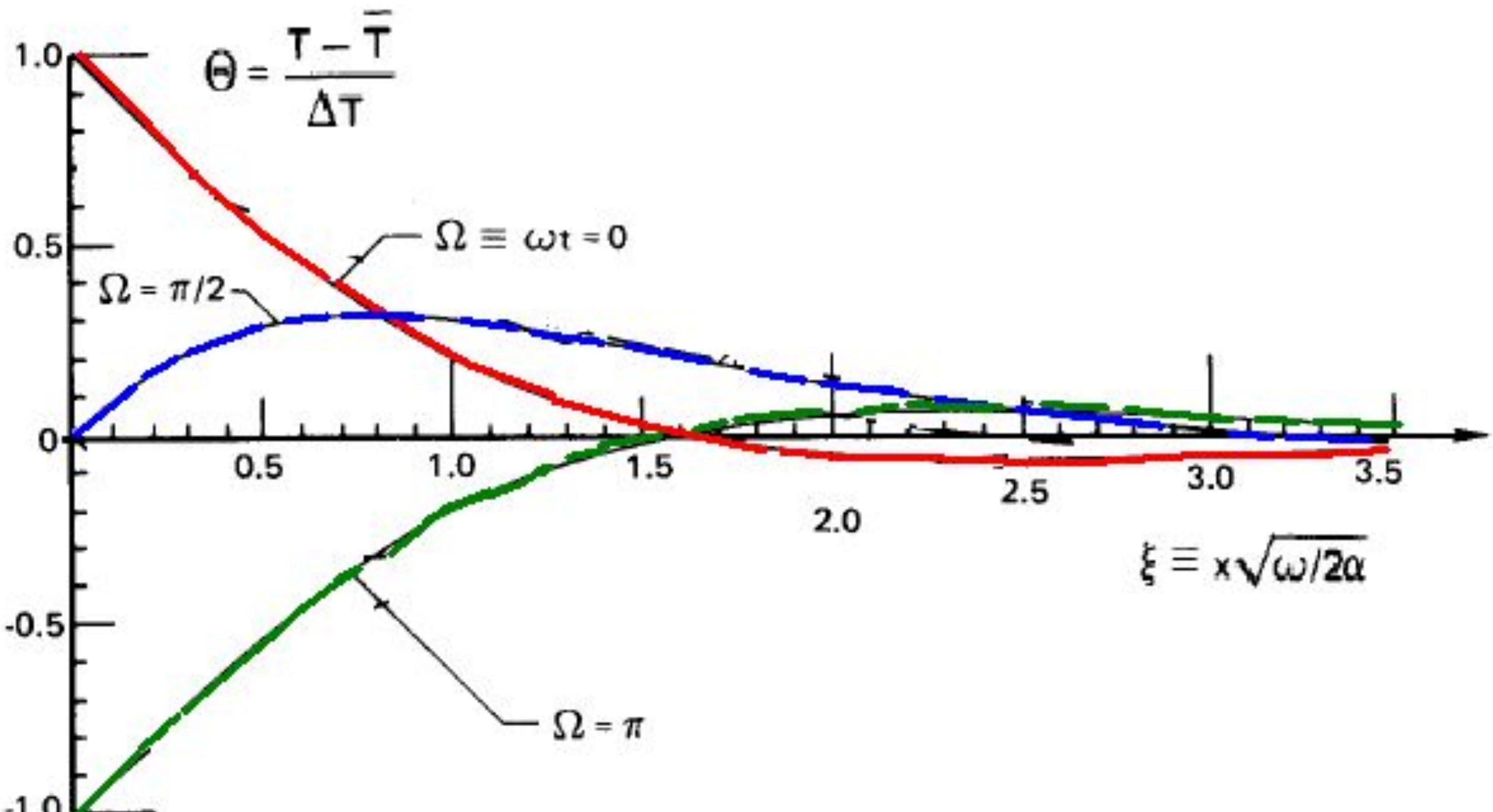
Нестационарный процесс : температура конструктивных элементов меняется во времени (пуск, остановка, аварийные ситуации).

Две группы нестационарных процессов теплопроводности:

1. Тело стремится к тепловому равновесию с окружающей средой при нагревании (охлаждении) тела;



2. Температура тела претерпевает регулярные периодические изменения (температурные волны).



Уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{Dt}{d\tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \cancel{\left(\overline{W} \cdot grad\ t\right)} = a\nabla^2 t + \cancel{\frac{q_v}{c_p \rho}}$$

Одномерное дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Уравнение нестационарной теплопроводности

Ищем $t(x,\tau)$

Новая переменная:

$$\vartheta = t_f - t(x,\tau)$$ нагрев тела

$$\vartheta = t(x,\tau) - t_f$$ охлаждение тела

$$\boxed{\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}}$$

t_f – температура окружающей среды

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

безразмерная переменная

Решение в общем виде:

$$\vartheta(x,\tau) = Fun\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

$$\boxed{\vartheta(x,\tau) = \vartheta_0 \cdot erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)}$$

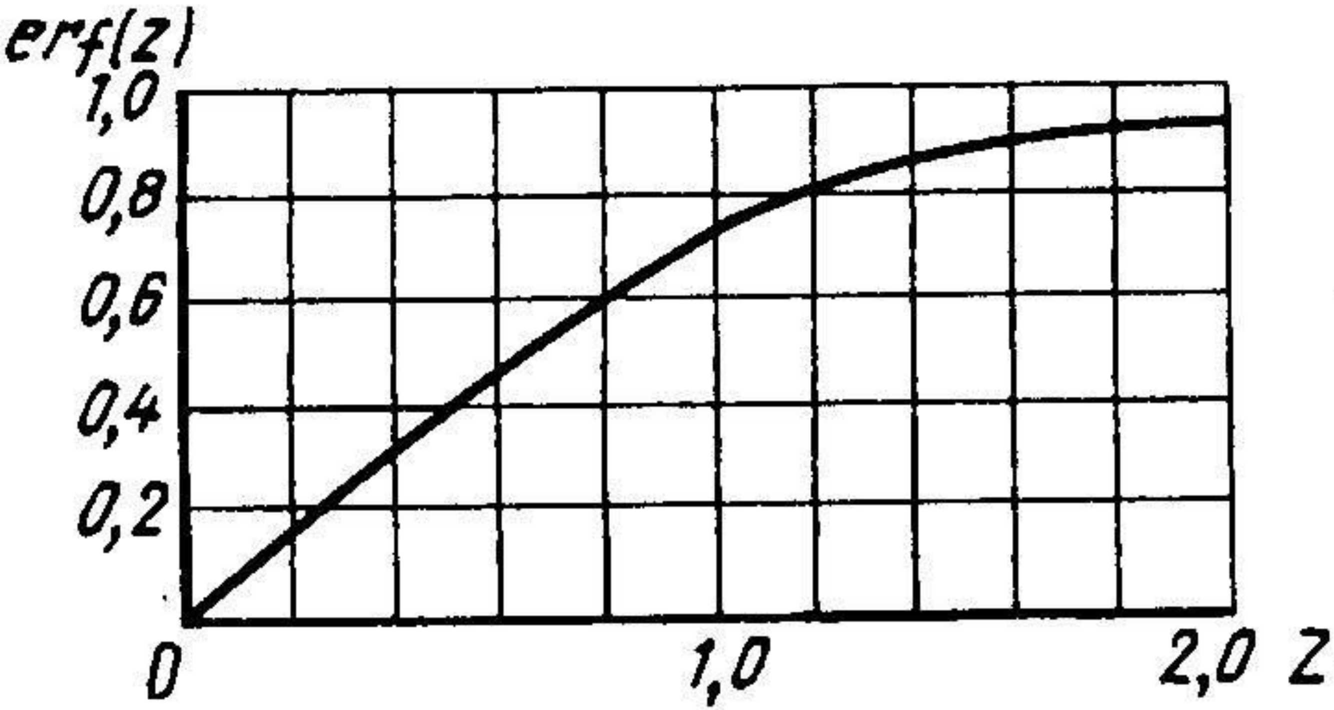
Уравнение нестационарной теплопроводности

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp\left(-\xi^2\right) d\xi$$

- интеграл ошибок Гаусса (табулированная функция ошибок)

$$\mathrm{erf}(0) = 0$$

$$\mathrm{erf}(\infty) = 1$$



Теплопроводность тела с бесконечно малым термическим сопротивлением

Малое внутреннее термическое сопротивление $\frac{\delta}{\lambda}$

температура тела изменяется во времени, но одинакова во всех точках тела

Дано:

Произвольное тело объемом V и поверхностью F с начальной температурой t_o , охлаждается в среде с температурой t_f

Баланс энергии для твердого тела:

$$\underbrace{c\rho V\frac{dt}{d\tau}}_{\text{уменьшение внутренней энергии тела}} = \alpha\ \underbrace{\left[t(\tau) - t_f\right]\cdot F}_{\text{количество тепла, отводимое от поверхности конвекцией}}$$

уменьшение
внутренней энергии тела

количество тепла,
отводимое от поверхности конвекцией

Теплопроводность тела с бесконечно малым термическим сопротивлением

Решение уравнения

$$\vartheta = \vartheta_o \cdot e^{-\left(\frac{\alpha F}{c\rho V}\right)\cdot\tau}$$

$$\vartheta_o = t_o - t_f$$

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{F}}$$

$$\frac{\alpha\cdot F\cdot\tau}{c\cdot\rho\cdot V} = \frac{\alpha\cdot F\cdot\tau\cdot\lambda_w}{c\cdot\rho\cdot V\cdot\lambda_w} = \frac{\alpha\cdot L}{\lambda_w}\cdot\frac{a\cdot\tau}{L^2} = \mathrm{Bi}\cdot\mathrm{Fo}$$

Число Био (Biot)

Число Фурье (Fourier)

$$\boxed{\vartheta(\tau) = \vartheta_o\cdot e^{-Bi\cdot Fo}}$$

Теплопроводность тела с бесконечно малым термическим сопротивлением

Мгновенная плотность теплового потока от тела:

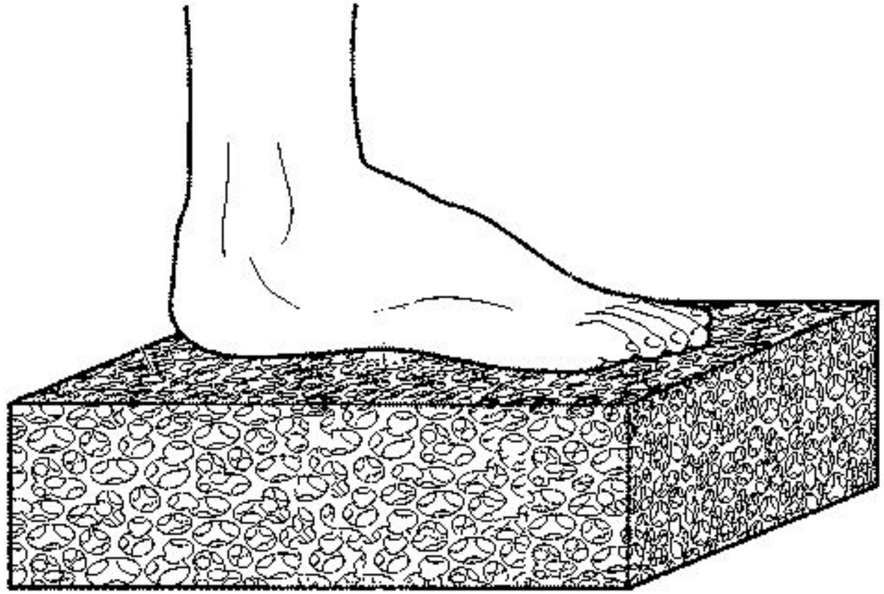
$$q(\tau) = \alpha \left[t(\tau) - t_f\right]$$

Суммарное количество тепла, отданное телом за время τ_*

$$Q = \int_0^{\tau_*} q(\tau)\, d\tau = \alpha\, (t_o - t_f) F \int_0^{\tau_*} e^{-Bi \cdot Fo} d\tau$$

Если *Bi* < 0,1, то ошибка не превышает 5%.

Поле температур в полубесконечном массиве



дерево

бетон

металл

Температуры одинаковы:
пола - 20°С
ноги - 36°С

Ощущения разные ?

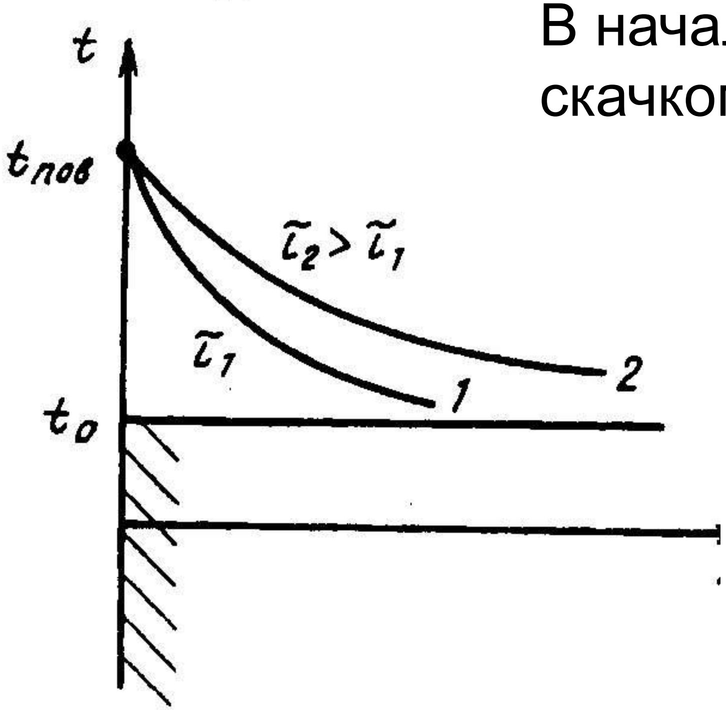
Поле температур в полубесконечном массиве

Полубесконечное тело – тело, ограниченное одной плоской поверхностью. Температура тела вдали от этой поверхности принимается неизменной.

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}}$$

Пусть тело имеет температуру $t(x,0) = t_o$

При $x \to \infty$ $t(\infty, \tau) = t_o = \text{const}$



В начальный момент времени $t_{пов}$ меняется скачком и далее остается неизменной

$$t(0,\tau) = t_{пов} = \text{const}$$

$$\boxed{\frac{t_{пов} - t(x,\tau)}{t_{пов} - t_0} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)}$$

решение уравнения

Поле температур в полубесконечном массиве

Плотность теплового потока на границе $x = 0$

$$q(x=0,\tau) = -\lambda \left.\frac{dt(\tau)}{dx}\right|_{x=0} = \lambda\,(t_{пов} - t_o)\frac{\partial}{\partial x}\left[erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]_{x=0}$$

или

$$q(x=0,\tau) = \frac{\lambda\,(t_{пов} - t_o)}{\sqrt{\pi a \tau}} = \frac{b\,(t_{пов} - t_o)}{\sqrt{\pi\tau}}$$

$$\boxed{b = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \equiv \sqrt{\lambda c_p \rho}}$$

теплопроницаемость (теплоусвояемость)

показывает насколько велико количество тепла, воспринимаемое (или теряемое) телом через один квадратный метр поверхности при внезапном изменении температуры поверхности на 1 градус

Поле температур в полубесконечном массиве

Значения теплопроницаемости $b = \sqrt{\lambda \rho c_p}$ $\left(\frac{Bm \cdot c^{1/2}}{м^2 K} \right)$

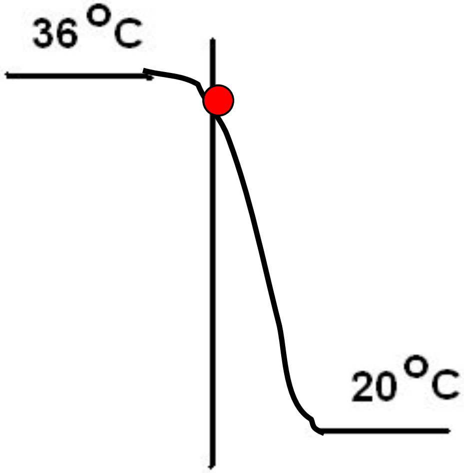
Материал	b
Медь	36 000
Железо	15 000
Бетон	6 600
Вода	1 400
Песок	1 200
Дерево	400
Тепловая изоляция	5 - 200
Накипь	40
Газ	6

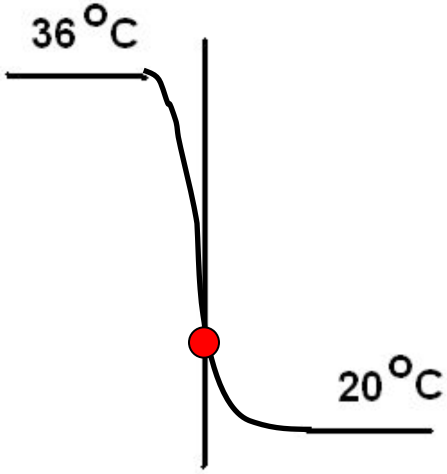
Поле температур в полубесконечном массиве

	дерево	бетон	сталь
			
	$\lambda \downarrow$	$\lambda \downarrow$	$\lambda \uparrow$
b	400	6000	8000

$$\left(\text{Вт} \cdot \text{с}^{1/2}\right) / \left(\text{м}^2\text{К}\right)$$

$$q \sim b = \sqrt{\lambda \rho c_p}$$





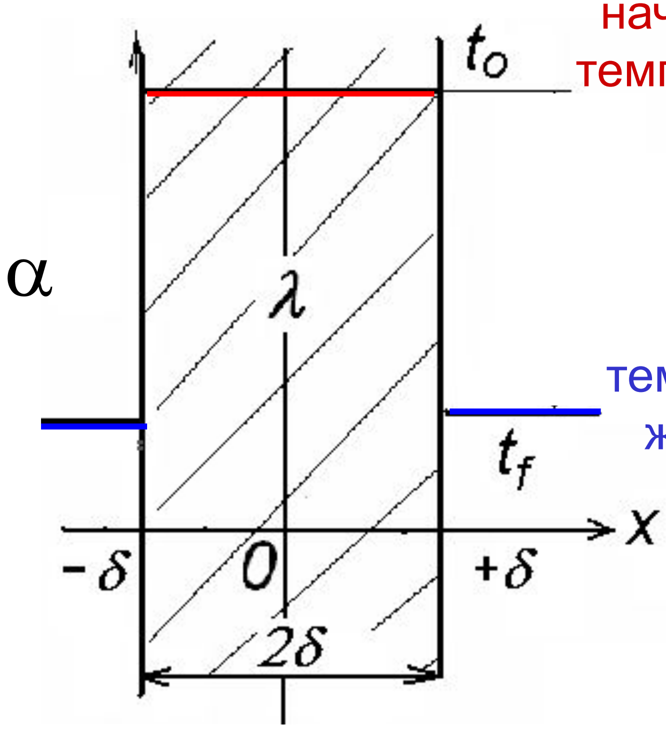
Нестационарное поле температуры в пластине

$$* \quad \boxed{\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}}$$

$$\vartheta = t - t_f$$

Начальные условия:

$$\vartheta(\tau = 0) = \vartheta_0 = t_o - t_f$$



начальная температура

температура жидкости

Граничные условия:

$$x = 0 \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

$$x = \pm\delta \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \pm\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta$$

Нестационарное поле температуры в пластине

Решение уравнения как произведение двух функций:

$$\vartheta(x,\tau) = \varphi(\tau)\cdot\psi(x)$$

Предполагаемое решение подставляем в ★

После разделения переменных:

$$\frac{1}{a}\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{\psi}\left(\psi'' + \frac{\psi'}{x}\right) = -k^2 = const$$

Решения:

$$\varphi(\tau) = C\cdot\exp\left(-k^2 a\tau\right) \qquad \psi(x) = C_0'\cos(kx) + C_0''\sin(kx)$$

$$\vartheta(x,\tau) = C_0\cdot\exp(-ak^2\tau)\left[C_0'\cos(kx) + C_0''\sin(kx)\right]$$

С и k любые

Нестационарное поле температуры в пластине

1 Г.У.

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = C_0\cdot\exp(-ak^2\tau)\cdot k\cdot\left[-C_0'\sin(k\cdot 0)+C_0''\cos(k\cdot 0)\right]=0$$

$$C_0''=0$$

2 Г.У.

$$x=\pm\delta \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\pm\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta \qquad C_0\cdot C_0'=A$$

$$k\cdot \cancel{A}\cdot\exp(-\cancel{ak^2\tau})\cdot\sin(k\delta)=\frac{\alpha}{\lambda}\cancel{A}\cdot\exp(-\cancel{ak^2\tau})\cdot\cos(k\delta)$$

$$ctg(k\delta)=\frac{k\delta}{\alpha\delta/\lambda} \qquad k\delta=\mu$$

Bi

Характеристическое уравнение

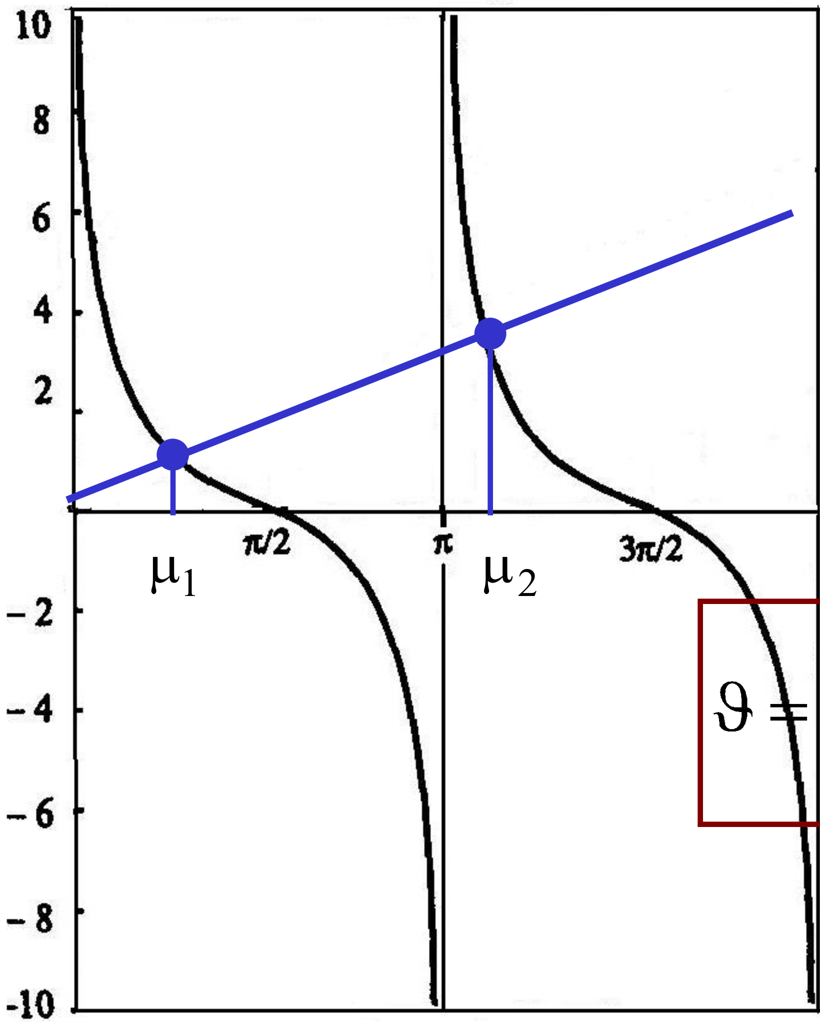
$$\boxed{ctg(\mu)=\frac{\mu}{Bi}}$$

δ - половина толщины пластины

Нестационарное поле температуры в пластине

Графическое решение характеристического уравнения

$$\boxed{ctg(\mu) = \frac{\mu}{Bi}} \quad y_1 = ctg(\mu) \quad y_2 = \frac{\mu}{Bi}$$



$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n$$

Частные решения

$$\vartheta_n = A_n \cos(\mu_n \frac{x}{\delta}) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{\delta^2})$$

Общее решение

$$\boxed{\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \frac{x}{\delta}) \cdot \exp(-\mu_n^2 \cdot \frac{a\tau}{\delta^2})}$$

Поля температуры в телах простой формы

$$\boxed{\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)}$$

Общее уравнение для пластины, цилиндра и шара

$$\vartheta = t - t_f$$

n=0 для пластины
n=1 для цилиндра,
n=2 для шара

Граничные условия:

$r = 0$ (середина пластины, цилиндра, центр шара $\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0$

$r = R$ (граничный размер) $\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \pm \frac{\alpha}{\lambda}\vartheta$

Поля температуры в телах простой формы

Решение уравнения как произведение двух функций:

$$\vartheta = \varphi(\tau) \cdot \psi(r)$$

подставляем

Получаем два обычных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{a}\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{\psi}\left(\psi'' + \frac{n\ \psi'}{r}\right) = -k^2$$

Решения:

$$\varphi(\tau) = C \cdot \exp\left(-k^2 a\tau\right)$$

$$\psi_0 = C_0' \cos(kr) + C_0'' \sin(kr)$$ для $n=0$

$$\psi_1 = C_1' \cdot J_0(kr) + C_1'' \cdot Y_0(kr)$$ для $n=1$

$$\psi_2 = \frac{C_2' \cdot \sin(kr) + C_2'' \cdot \cos(kr)}{kr}$$ для $n=2$

Полное решение уравнения

$$\boxed{\vartheta = C \cdot \exp\left(-k^2 a\tau\right) \cdot \psi_i(kr)}$$

Поля температуры в телах простой формы

В безразмерном виде

Для пластины толщиной 2δ

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\frac{\mu_n x}{\delta} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot Fo\right)$$

$$A_n = \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n}$$

μ_n - корни трансцендентного уравнения

$$ctg\mu = \mu / Bi$$

$$Fo = a\tau / \delta^2 \qquad Bi = \alpha \cdot \delta / \lambda_w$$

Поля температуры в телах простой формы

Для цилиндра радиусом R

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot J_0(\mu_n R) \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot Fo\right)$$

$$A_n = \frac{2J_1(-\mu_n)}{\mu_n^2\left[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)\right]}$$

μ_n - корни уравнения

$$\mu J_1(\mu) = J_0(\mu) \cdot Bi$$

$$Fo = a\tau / R^2$$

$$Bi = \alpha \cdot R / \lambda_w$$

Поля температуры в телах простой формы

Для шара радиусом R

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \mu_n \frac{r}{R}}{\mu_n \frac{r}{R}} \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \cdot Fo\right)$$

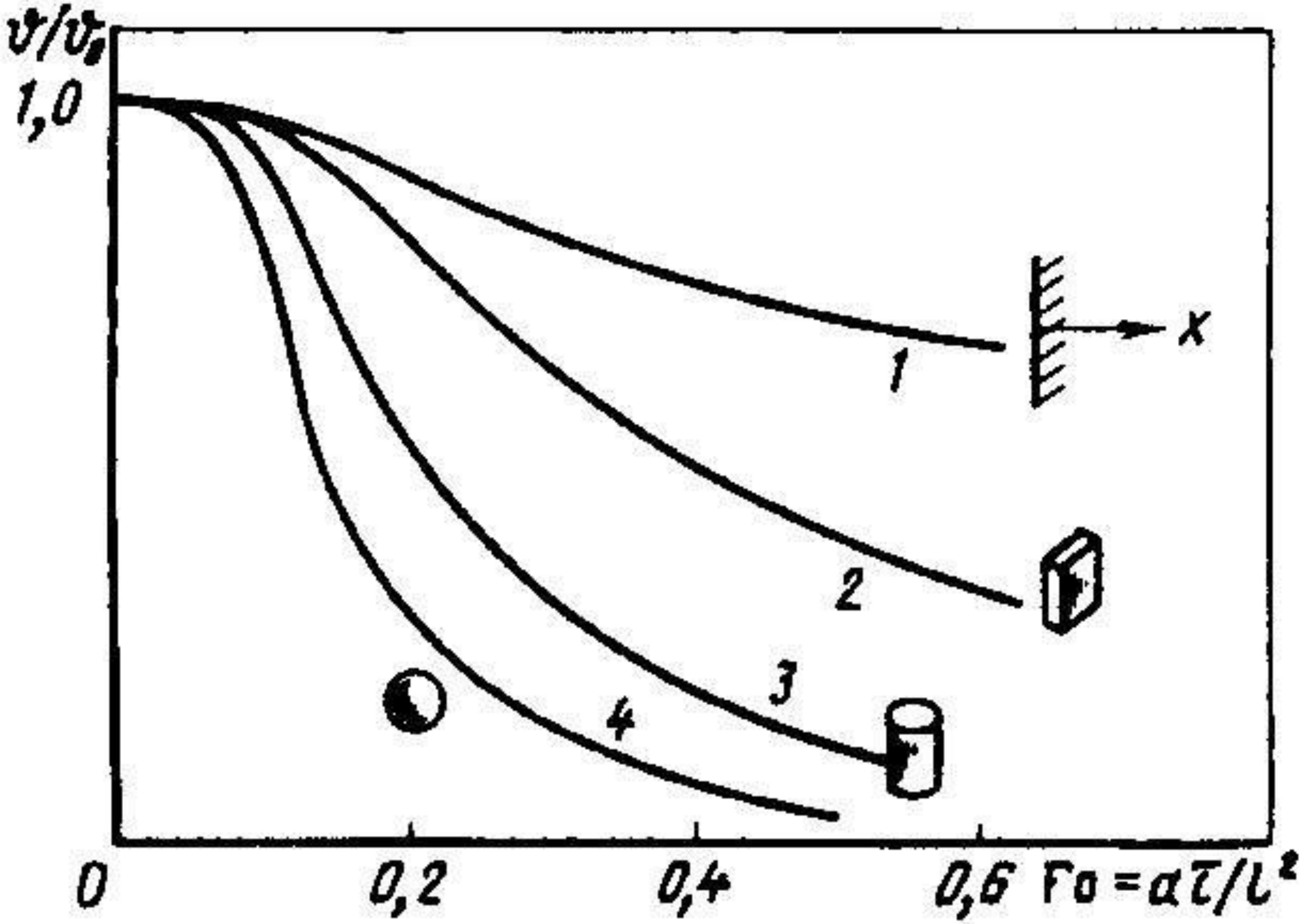
$$A_n = \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}$$

μ_n - корни уравнения $\mu \cdot ctg\mu = 1 - Bi$

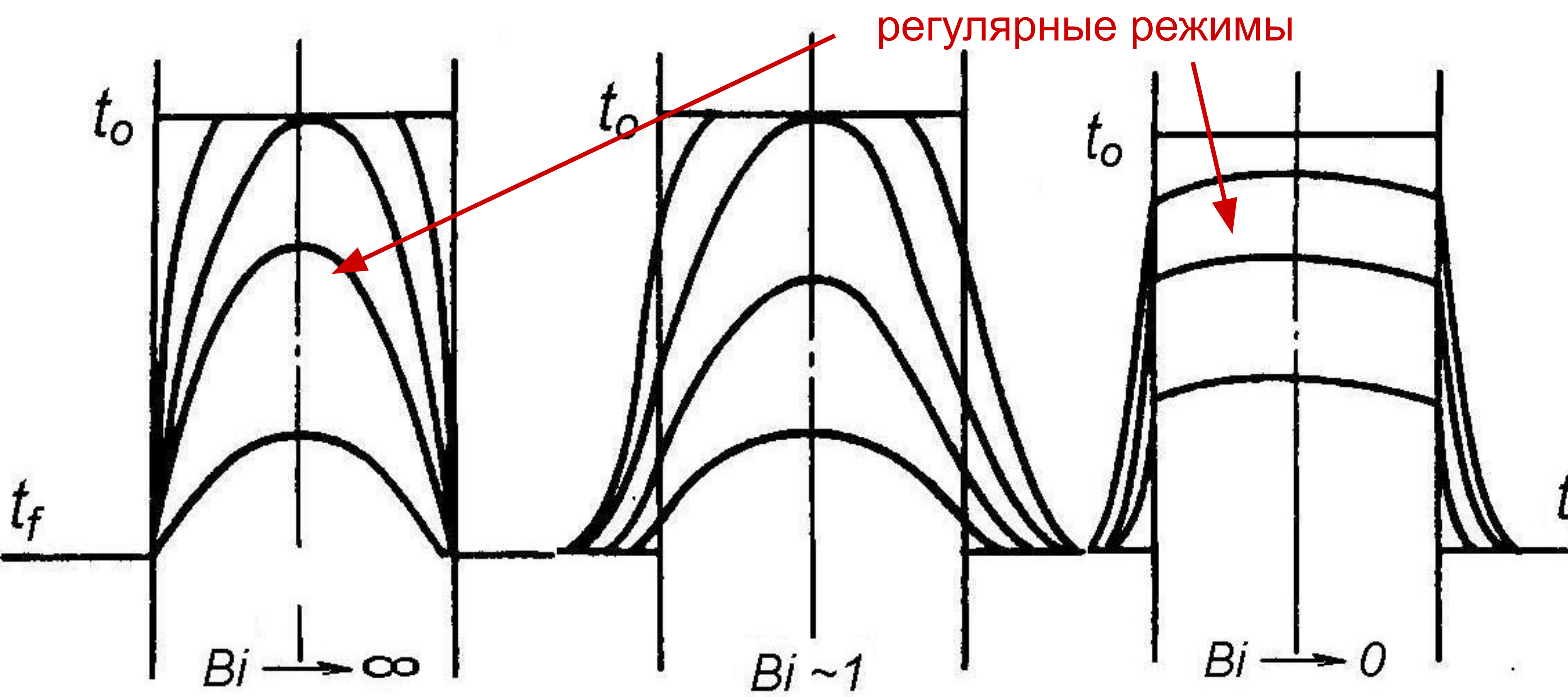
$$Fo = a\tau / R^2$$

$$Bi = \alpha \cdot R / \lambda_w$$

Поля температуры в телах простой формы



Поля температуры в телах простой формы



$$Bi = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda_w} = \frac{\delta / \lambda_w}{1/\alpha} = \frac{\text{Терм.сопротивление стенки}}{\text{Терм. сопротивление конвективного теплообмена}}$$

Регулярные тепловые режимы

Регулярный тепловой режим - нестационарный процесс теплопроводности, когда поле безразмерной температуры остается подобным себе во времени.

Температурное поле в телах разной формы: пластина, цилиндр, шар при охлаждении в среде с постоянной температурой и постоянным коэффициентом теплообмена :

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_o} = \sum_n A_n(\mathrm{Bi}) \cdot \Phi(x, y, z, \mathrm{Bi}) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \mathrm{Fo}}$$

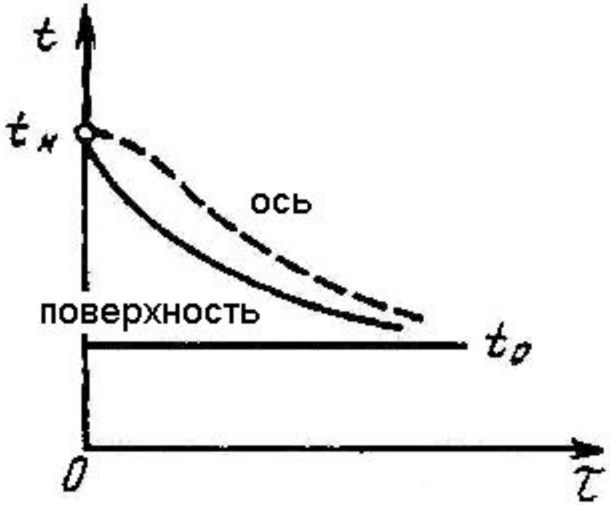
$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{L^2} \qquad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha \cdot \mathrm{L}}{\lambda_w} \qquad \theta = \frac{t(x, y, z, \tau) - t_f}{(t_o - t_f)}$$

Регулярные тепловые режимы

Две стадии охлаждения тела:

Первая стадия характеризуется влиянием начального распределения температуры в теле, когда скорость изменения температуры в разных точках тела во времени различны (начальный период).

Вторая стадия начинается с момента τ' когда скорость охлаждения не зависит от начальных условий и определяется лишь условиям теплообмена на границе, физическими свойствами тела, его геометрией и размерами.



Поле температуры описывается первым членом ряда

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_o} = A \cdot \Phi(x, y, z) \cdot e^{-m\tau} \qquad m = \mu_1^2 a / L^2$$

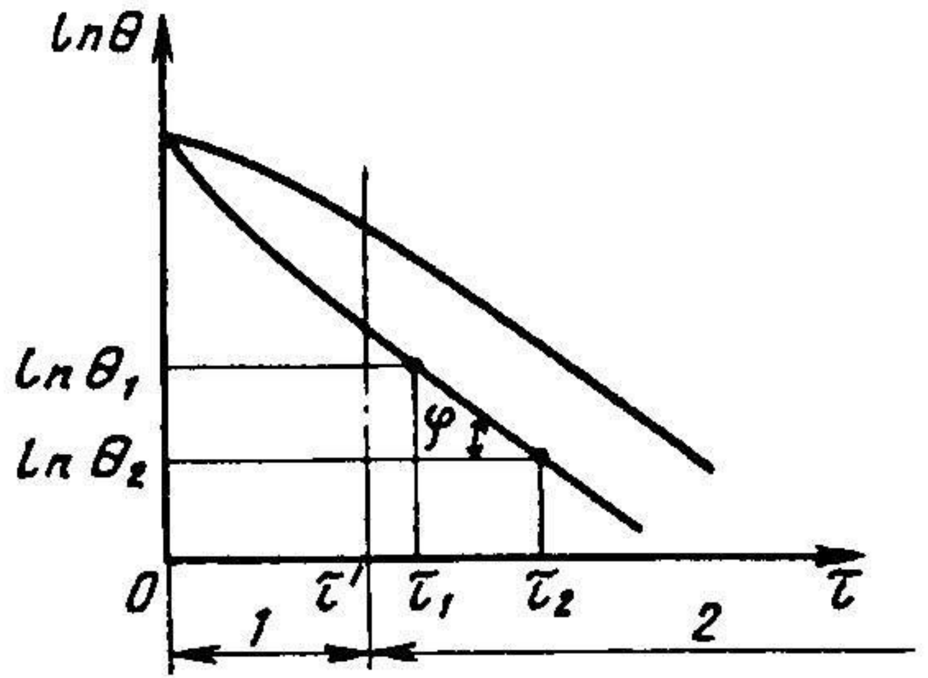
Регулярные тепловые режимы

После логарифмирования: $$\ln\theta = G(x, y, z) - m\tau$$

После дифференцирования по времени $$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = -m$$

Величина *m* - темп охлаждения, показывает, что относительная скорость изменения температуры не зависит ни от времени, ни от координат и является постоянной величиной.

$$\boxed{m = -tg\varphi = \frac{(\ln\theta_1 - \ln\theta_2)}{(\tau_2 - \tau_1)}}$$



Регулярные тепловые режимы

Виды регулярных тепловых режимов:

- Экспоненциальный, при граничных условиях III рода, описываемый соотношением

$$\theta = \Phi_1(x, y, z) \cdot e^{-m\tau}$$

- Линейный, при граничных условиях II рода, описываемый соотношением

$$\theta = \Phi_2(x, y, z) \pm m\tau$$

- Периодический - температурные волны.

Измерение свойств с помощью регулярных тепловых режимов

Тело с объёмом *V*, поверхностью *F*, обладающее высокой теплопроводностью (*Bi*<0,1) охлаждается в потоке жидкости. Распределение температуры близко к равномерному

$$\vartheta = \vartheta_o \cdot e^{-m\tau}$$

$$m = \frac{(\bar{\alpha} \cdot F)}{(c_p \cdot \rho \cdot V)}$$

Средний коэффициент теплообмена

Измеряя темп охлаждения

$$\boxed{\bar{\alpha} = \frac{m \cdot c_p \cdot \rho \cdot V}{F}}$$

Ограничения:

небольшие тела ($L \sim 10^{-2}$ м), Bi <1,

$\bar{\alpha} \leq 10^3$ Вт/(м^{2}К)

Измерение свойств с помощью регулярных тепловых режимов

Температуропроводность

Зная темп регулярного режима

$$m = \frac{\mu_1^2 a}{\delta}$$

$$\boxed{a = \frac{m\delta^2}{\mu_1^2}}$$

Ограничения:

вещества с низкой теплопроводностью λ<0,5 Вт/(м К), *Bi*>100).