

# Гидродинамика Солнца

Лекция 6

# Дифференциальное вращение Солнца на поверхности

---

По пятнам (Newton & Nunn, 1951):

$$\Omega = \Omega_0 (1 - b \cos^2 \theta),$$

$\theta = \pi/2 - \psi$  — коширота (полярный угол),

$\Omega_0 = 2.90 \times 10^{-6}$  — угловая скорость  
на экваторе,

$$b = 0.19$$

# Дифференциальное вращение Солнца на поверхности

---

По Допплеру (Howard *et al.*, 1983):

$$\Omega = \Omega_0 (1 - b \cos^2 \theta - c \cos^4 \theta),$$

$\theta = \pi/2 - \psi$  — коширота (полярный угол),

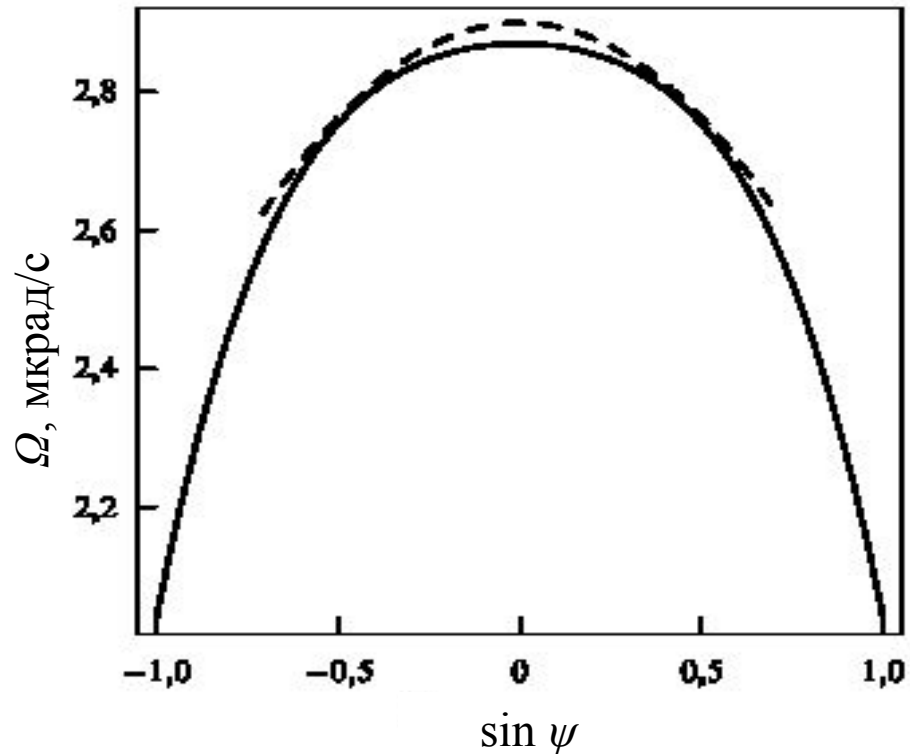
$\Omega_0 = 2.87 \times 10^{-6}$  — угловая скорость на экваторе,

$$b = 0.12,$$

$$c = 0.17$$

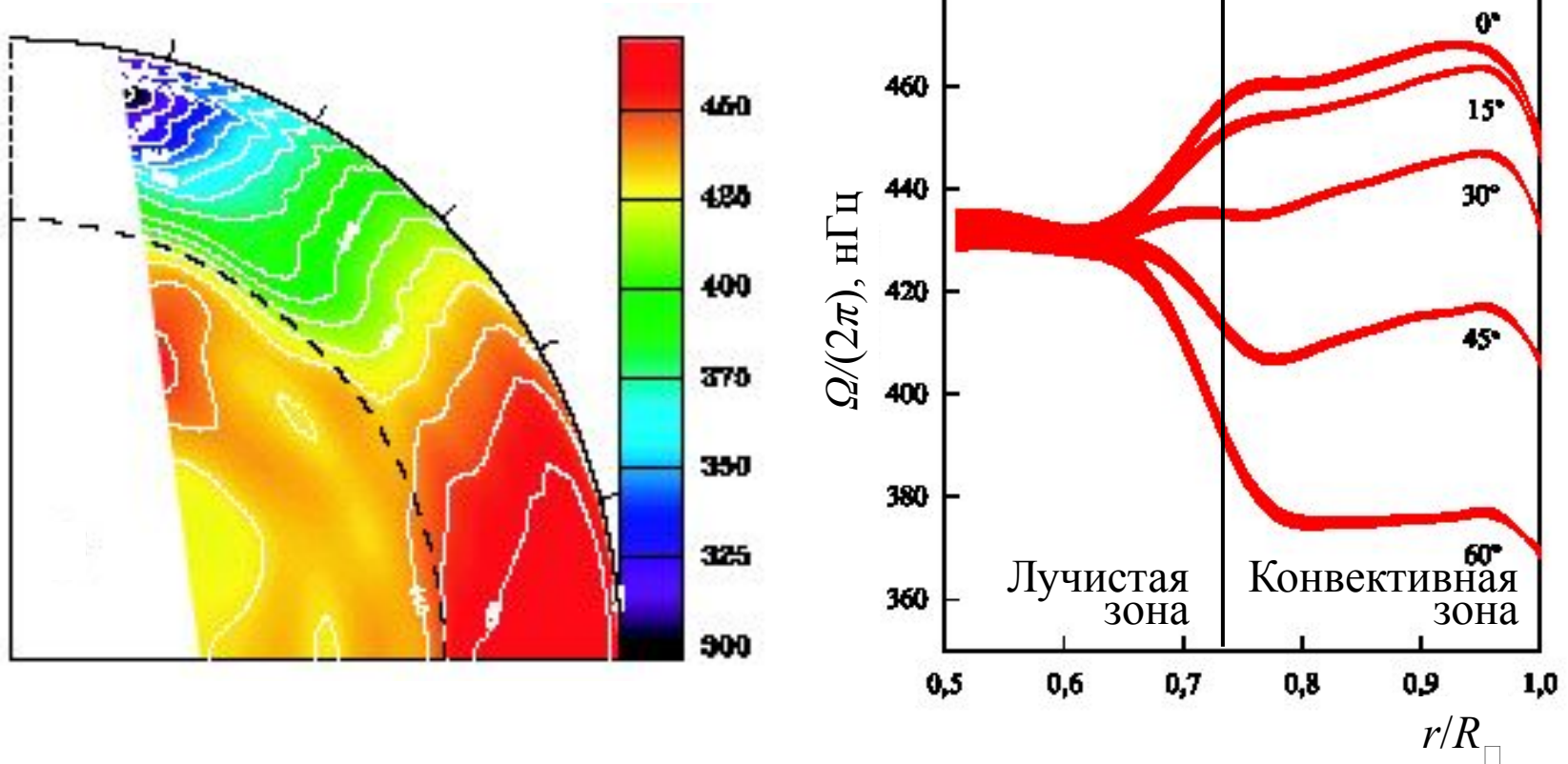
# Дифференциальное вращение Солнца на поверхности

---



Сплошная линия – Допплер, штриховая – пятна

# Дифференциальное вращение Солнца по данным гелиосейсмологии



---

Элементы теории  
дифференциального  
вращения

## Дифференциальное вращение — результат взаимодействия конвекции и вращения

---

А. И. Лебединский (1941):  
сила Кориолиса воздействует на  
конвективную турбулентность; **В**  
свою очередь, турбулентность возмущает  
вращение и делает его неоднородным

# Уравнение Навье – Стокса

---

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{в } i\text{-м уравнении:} \quad \dots \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \end{array} \right)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v}) = \rho \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)$$

(тензор вязких напряжений без учета второй вязкости)



## Приближение неупругости (**anelastic approximation**).

Разделение средней и флуктуирующей составляющих поля скоростей

---

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}, \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{V}, \quad \langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{0}$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \quad \text{или} \quad \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0$$

$$\rho u_i \operatorname{div} \mathbf{u} = -u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

# Усредненное уравнение Навье – Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle +$$

$$+ \frac{\nabla P}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{V}) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle + \frac{\nabla P}{\rho} = \mathbf{g}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - u_i \operatorname{div} \mathbf{u}$$

# Усредненное уравнение Навье – Стокса

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i = \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - \rho u_i \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \rho u_i \operatorname{div} \mathbf{u} = -u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i = \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + \nabla P = \rho \mathbf{g} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \langle u_j u_i \rangle)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + \nabla P = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{R}$$

Напряжения Рейнольдса  $R_{ij} = -\rho Q_{ij} \quad Q_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$

# Усредненная скорость в сферических координатах

---

В

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_m = \mathbf{e}_\varphi r \Omega \sin \theta + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \left( \mathbf{e}_\varphi \frac{\psi}{r \sin \theta} \right)$$

$\Omega = \Omega(r, \theta)$  – (дифференциальное) вращение

$\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m(r, \theta)$  – меридиональная циркуляция

$$\rho \mathbf{V}_m = \operatorname{rot} \left( \mathbf{e}_\varphi \frac{\psi}{r \sin \theta} \right) = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right)$$

# Азимутальная компонента усредненного уравнения Навье – Стокса

---

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \nabla \cdot \mathbf{R} \quad R_{ij} = -\rho Q_{ij} = -\rho \langle u_i u_j \rangle$$

$$[(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}]_\varphi = \frac{1}{2} \cancel{\nabla_\varphi} |\mathbf{V}|^2 - [\mathbf{V}_m \times [\nabla \times \mathbf{V}_\varphi]]$$

$$\text{rot } \mathbf{V}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \mathbf{e}_\theta$$

$$-[\mathbf{V}_m \times \text{rot } \mathbf{V}_\varphi] = \left[ \frac{V_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) + \frac{V_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) \right] \mathbf{e}_\varphi$$

# Азимутальная компонента усредненного уравнения Навье – Стокса

---

$$[(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}]_\varphi = -[\mathbf{V}_m \times \text{rot } \mathbf{V}_\varphi] = \left[ \frac{V_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) + \frac{V_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) \right] \mathbf{e}_\varphi$$

С другой стороны :  $\text{div}(\rho r \sin \theta V_\varphi \mathbf{V}_m) =$   
 $= r \sin \theta V_\varphi \cancel{\text{div}(\rho \mathbf{V}_m)} + \rho \mathbf{V}_m \cdot \nabla(r \sin \theta V_\varphi) =$   
 $= \rho \mathbf{V}_m \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta V_\varphi) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta V_\varphi) \mathbf{e}_\theta \right] =$   
 $= \rho r \sin \theta \left[ \frac{V_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) + \frac{V_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) \right] = \rho r \sin \theta [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}]_\varphi$

# Азимутальная компонента усредненного уравнения Навье – Стокса

---

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \nabla \cdot \mathbf{R} \quad R_{ij} = -\rho Q_{ij} = -\rho \langle u_i u_j \rangle$$

$$\left( \text{в } i\text{-м уравнении: } \dots \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

$$\rho \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \rho [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}]_\varphi = -\text{div} \langle \rho u_\varphi \mathbf{u} \rangle$$

$$\rho r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\text{div} (\rho r \sin \theta \langle u_\varphi \mathbf{u} \rangle) + \rho r^2 \sin^2 \theta \Omega \mathbf{V}_m$$

( $\rho r^2 \sin^2 \theta \Omega$  – момент импульса, связанный с  $\Omega$ )

## Диссипативные и недиссипативные потоки момента импульса

---

$$Q_{ij} = Q_{ij}^{\Lambda} + Q_{ij}^{\nu} \quad (\text{при однородном вращении } Q_{ij}^{\nu} = 0)$$

Основная причина неоднородности вращения —  
 $\Lambda$ -эффект: присутствие ненулевого  
турбулентного потока момента импульса в  
**однородно** вращающейся среде (А.  
И. Лебединский, 1941)

Такой поток может возникать при ненулевых  
значениях  $Q_{\varphi r}$  и  $Q_{\varphi \theta}$



## Установившийся режим вращения

---

Дифференциальное вращение  $\square$  баланс между недиссипативным потоком момента импульса и потоком, обусловленным турбулентной вязкостью (eddy viscosity); при таком балансе дивергенция полного потока  $= 0$  (вектор потока соленоидален, хотя сам поток может быть и ненулевым)

# Меридиональная циркуляция

---

$$\rho r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho r \sin \theta \langle u_\phi \mathbf{u} \rangle) + \rho r^2 \sin^2 \theta \Omega \mathbf{V}_m$$

( $\rho r^2 \sin^2 \theta \Omega$  – момент импульса, связанный с  $\Omega$ )

Диссипативная составляющая корреляций :

$$Q_{ij}^v = -N_{ijkl} \frac{\partial V_k}{\partial r_l}$$

Тензор турбулентных вязкостей для изотропной турбулентности в невращающейся среде :

$$N_{ijkl} = \nu_T \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \mu_T \delta_{ij} \delta_{kl}$$

## Азимутальная компонента ротора уравнения Навье – Стокса для усредненного течения

---

$$\text{rot}_\varphi \quad \left| \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla P}{\rho} - \mathbf{g} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{R}}{\rho} \quad R_{ij} = -\rho Q_{ij} = \langle u_i u_j \rangle \right.$$

$$r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho^2} [\nabla \rho \times \nabla P]_\varphi = \mathbf{D}(\psi)$$

Градиент в направлении оси вращения :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (z = r \cos \theta)$$

[вклад  $O(V_m^2)$  опущен]

$$\text{Правая часть: } \mathbf{D}(\psi) \equiv -(\mathbf{e}_\varphi)_n \varepsilon_{nmi} \frac{\partial}{\partial r_m} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_j} \rho \mathbf{N}_{ijkl} \frac{\partial V_k^m}{\partial r_l} \right)$$

# Уравнение для меридиональной циркуляции

---

$$S = c_v \ln \frac{P}{\rho^\gamma} \Rightarrow \frac{\nabla \rho}{\rho} = -\frac{\nabla S}{c_p} + \frac{\nabla P}{\gamma P}$$

$$\frac{1}{\rho^2} [\nabla \rho \times \nabla P]_\varphi = -\frac{1}{\rho c_p} [\nabla S \times \nabla P]_\varphi = -\frac{1}{c_p} [\nabla S \times \mathbf{g}]_\varphi = -\frac{g}{c_p r} \frac{\partial S}{\partial \theta}$$

$$r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} - \frac{g}{c_p r} \frac{\partial S}{\partial \theta} = -(\mathbf{e}_\varphi)_n \varepsilon_{nmi} \frac{\partial}{\partial r_m} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_j} \rho \mathbf{N}_{ijkl} \frac{\partial V_k^m}{\partial r_l} \right)$$

# Источники меридиональной циркуляции

---

$$r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} - \frac{g}{c_p r} \frac{\partial S}{\partial \theta} = -(\mathbf{e}_\varphi)_n \varepsilon_{nmi} \frac{\partial}{\partial r_m} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_j} \rho \mathbf{N}_{ijkl} \frac{\partial V_k^m}{\partial r_l} \right)$$

- Непотенциальная составляющая центробежной силы
- Бароклинность:  $[\nabla \rho \times \nabla P] \neq 0$

При больших  $\Omega$  (или  $\Gamma$ ) турбулентная вязкость не может уравновесить центробежные силы  $\Rightarrow$   
 $\partial \Omega / \partial z \rightarrow 0$  ("загадка числа Тейлора")

## Разрешение загадки числа Тейлора

---

Распределение угловой скорости определяется балансом между центробежным и бароклинным источником меридионального течения (балансом Тейлора – Праудмана)

$$D(\psi) = r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho^2} [\nabla \rho \times \nabla P]_{\phi} = r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} - \frac{g}{c_p r} \frac{\partial S}{\partial \theta}$$

(меридиональное течение – малым отклонением от этого баланса □ плохая обусловленность обратной задачи нахождения меридионального течения по распределениям  $\Omega$  и  $T$ )

# Наблюдения меридиональной циркуляции

---

Допплеровские измерения на поверхности:  
течение от экватора к полюсу с максимальной  
скоростью  $\sim 10$  м/с

(гелиосейсмология: это течение прослежено до  
глубин  $\sim 12$  Мм)

+

Нестационарное течение с меньшими скоростями,  
сходящееся к широте с максимальной частотой  
пятнообразования (широта меняется с циклом  
активности)

# Происхождение бароклинного источника меридиональной циркуляции

---

$$F_i^{\text{conv}} = -\rho T \chi_{ij} \frac{\partial S}{\partial r_j} \quad \chi_{ij} = \chi_T \left( \phi(\Omega^*) \delta_{ij} + \phi_{\parallel}(\Omega^*) \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega^2} \right)$$

( $\Omega^*$  – безразмерная угловая скорость)

Анизотропия турбулентной теплопроводности ( $\chi_{\parallel} > \chi_{\perp}$ ) □ полюса чуть теплее экватора. Для разрешения «загадки числа Тейлора» требуется, чтобы два источника циркуляции (действующие противоположно друг другу) были одного порядка. Нужна разность температур  $\sim 1$  К.



# Вычисление напряжений Рейнольдса

---

Вычитаем из уравнения движения  
уравнение для средней скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial r_j} + \frac{\partial}{\partial r_j} (\rho u_i u_j - \rho \langle u_i u_j \rangle) = \\ = 2\rho \varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k - \frac{\partial P'}{\partial r_i} - \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho u_i V_j + \rho u_j V_i) \end{aligned}$$

# Вычисление напряжений Рейнольдса

---

- Приближение средней длины перемешивания :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial r_j} + \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \rho u_i u_j - \rho \langle u_i u_j \rangle \right) \rightarrow \rho \frac{u_i}{t_{nl}}$$

$$t_{nl} = l / \langle u^2 \rangle^{1/2}$$

- Квазилинейное приближение – отбрасывание  
нелинейных членов

Интенсивность исходной турбулентности (в невращающейся среде) рассчитывается по теории пути перемешивания:

$$\langle u^2 \rangle^{\boxtimes} = - \frac{l^2 g}{4c_p} \frac{\partial S}{\partial r}$$

# Происхождение $\Lambda$ -эффекта

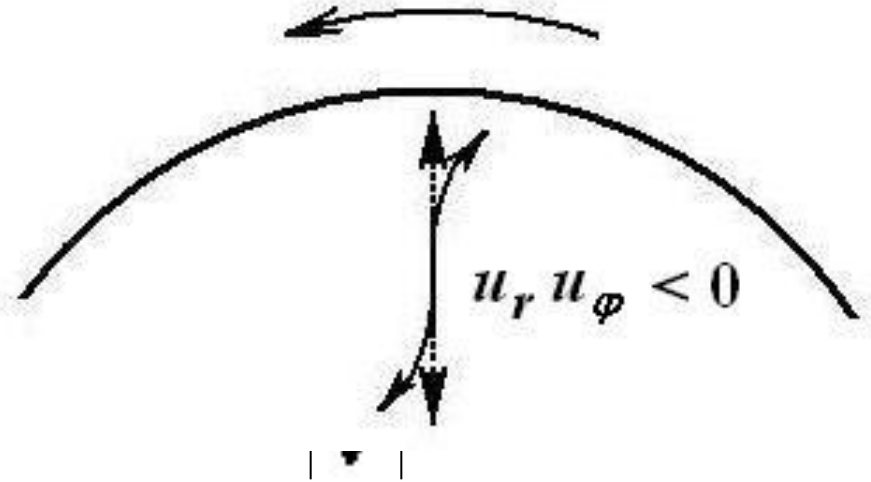
$$\tau = \frac{2\Omega l^2}{v}, \quad v \sim lu, \quad u = \frac{l}{t_{nl}}$$

$$\rightarrow \tau = 2\Omega t_{nl}$$

$$u_\varphi \approx -2\Omega u_r t_{nl} \sin \theta$$

$$u_r u_\varphi \approx -\tau u_r^2 \sin \theta < 0$$

$$\langle u_r u_\varphi \rangle \approx -\tau \langle u_r^2 \rangle \sin \theta < 0$$



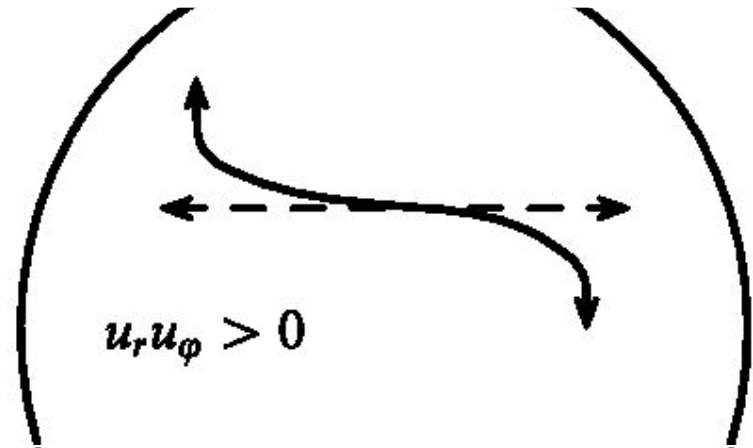
# Происхождение $\Lambda$ -эффекта

---

$$u_r \approx 2\Omega u_\varphi^{\boxtimes} t_{nl} \sin \theta$$

$$u_r u_\varphi \approx \tau u_\varphi^{\boxtimes 2} \sin \theta > 0$$

$$\langle u_r u_\varphi \rangle \approx \tau \langle u_\varphi^2 \rangle^{\boxtimes} \sin \theta > 0$$



$$Q_{r\varphi}^{\Lambda} \approx \tau \left( \langle u_\varphi^2 \rangle^{\boxtimes} - \langle u_r^2 \rangle^{\boxtimes} \right) \sin \theta$$

## Источники $\Lambda$ -эффекта

---

- Анизотропия турбулентности
- Неоднородность турбулентной среды [дает основной вклад уже для  $\tau \approx 6$  (среднее значение по конвективной зоне Солнца) и является определяющей при  $\tau \gg 1$ ]

Стратификация конвективных зон близка к изэнтропической!  модели не содержат свободных параметров

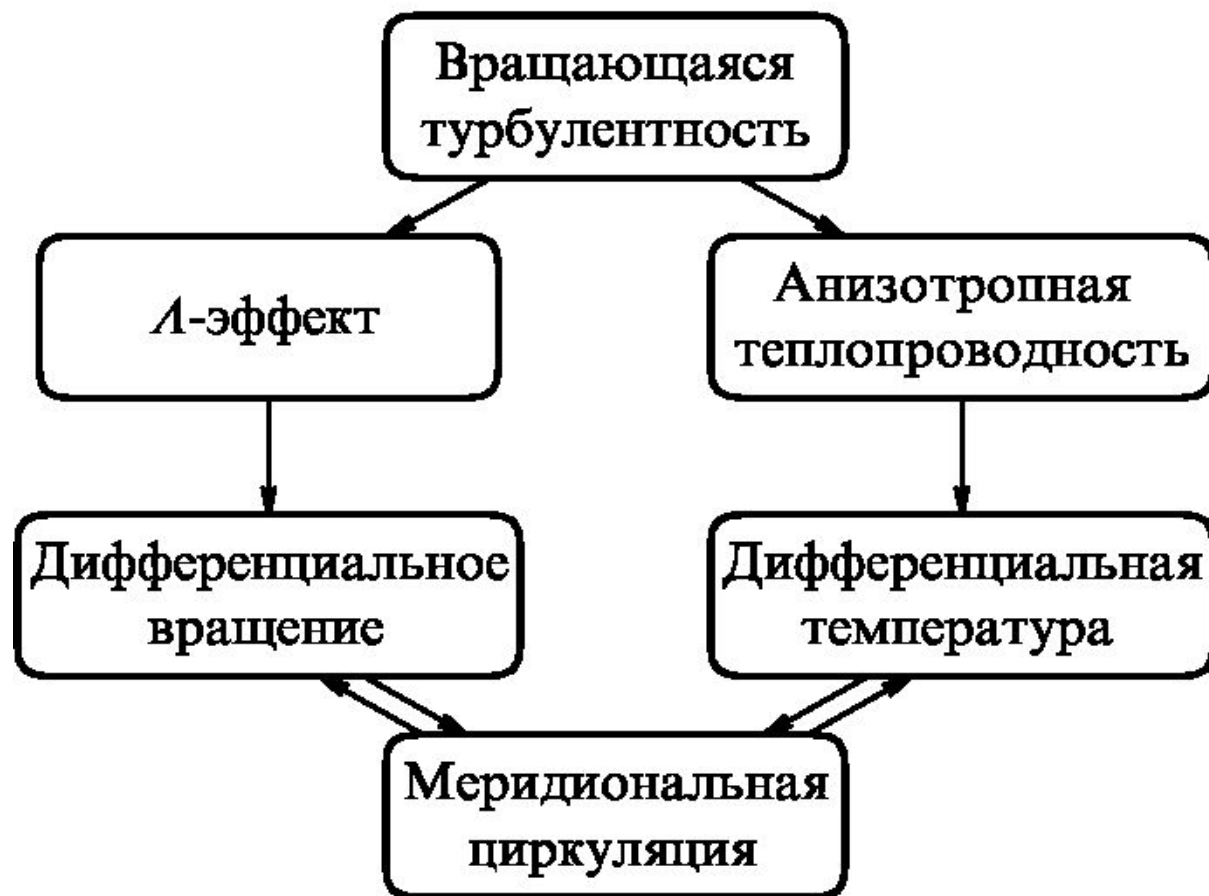
# Заключительный этап построения модели

---

Расчет эффективных вязкостей и  
температуропроводностей для  
вращающейся турбулентной среды

# Общая схема формирования дифференциального вращения

---



# Трудности ранних моделей

---

## – Чисто гидродинамические модели:

- дифференциальное вращение меньше наблюдаемого
- цилиндрическая симметрия  $\Omega$
- меридиональная циркуляция от полюсов к экватору

## – «Чисто» термодинамические модели:

- требуется слишком большая дифференциальная температура (противоречащая наблюдениям)
- меридиональная циркуляция от полюсов к экватору

## – Большое количество свободных параметров



## Современные модели

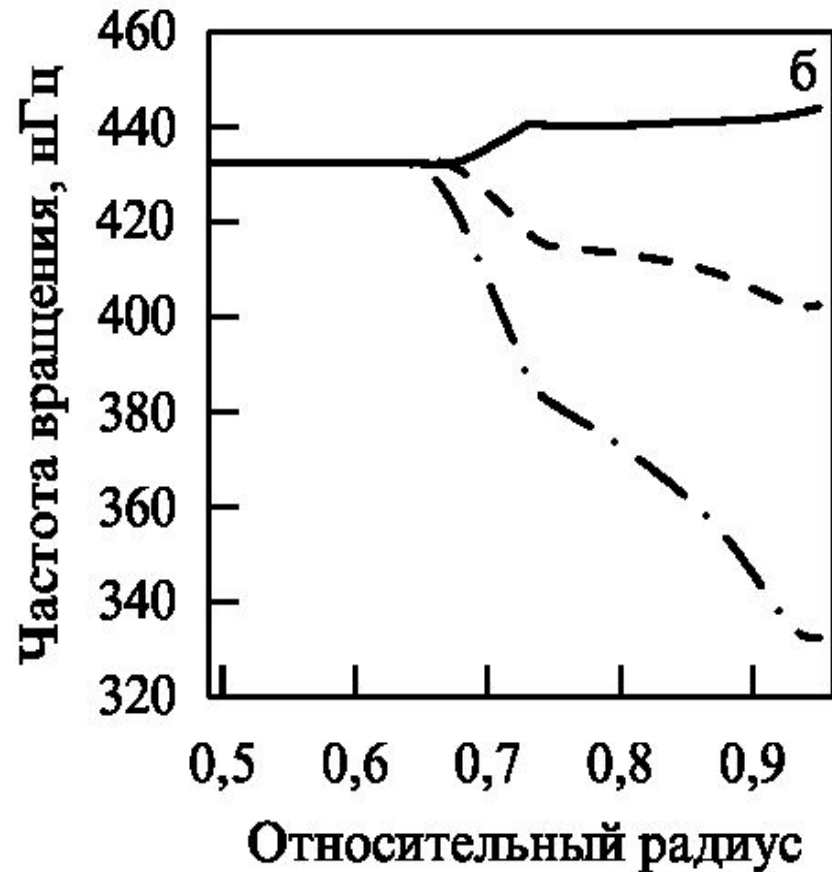
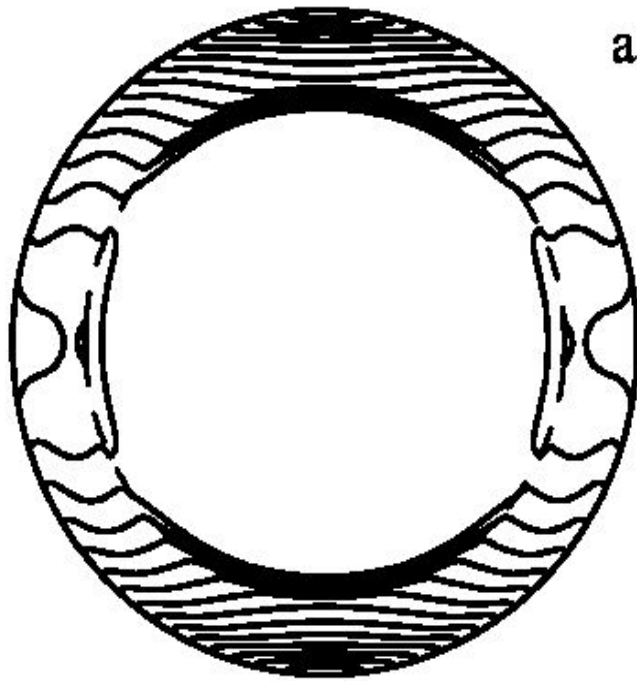
---

Единственный свободный параметр –  
коэффициент  $\alpha$ :

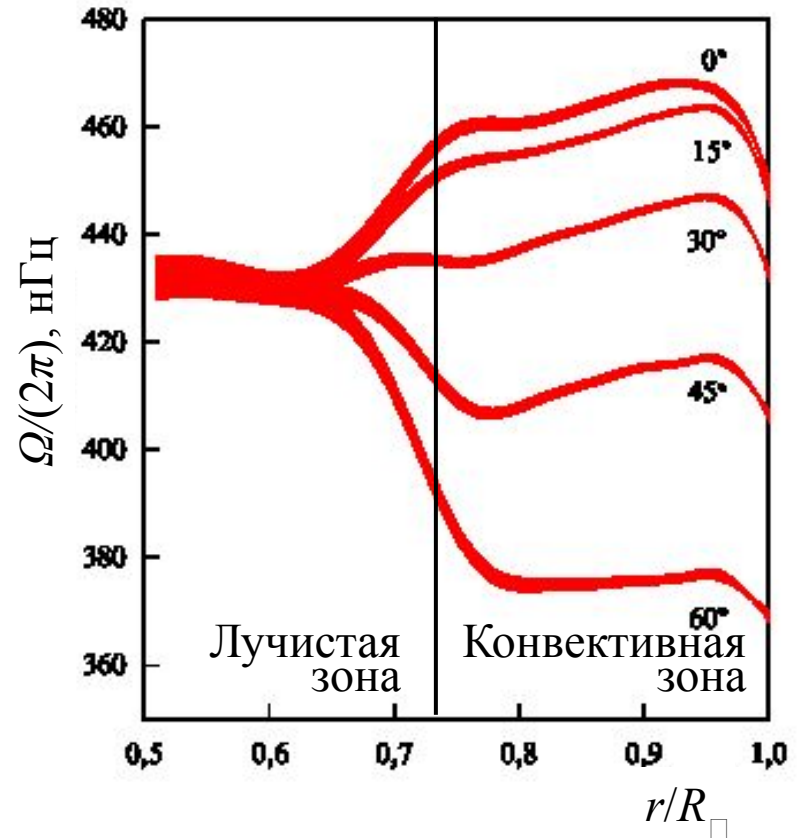
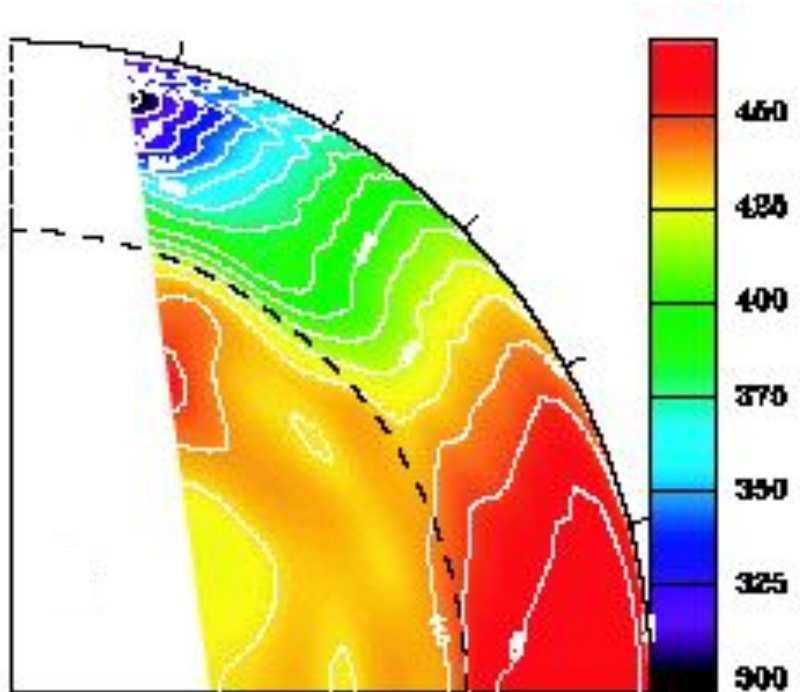
$$l = \alpha H_p$$

Наилучшие результаты – при  $1.5 < \alpha < 2$

# Дифференциальное вращение Солнца по расчетным данным



# Дифференциальное вращение Солнца по данным гелиосейсмологии



## Литература

---

Л.Л. Кичатинов. Дифференциальное вращение звезд. *УФН*, **175** (5), 457–476, 2005.