Кубанский государственный технологический университет
Институт информационных технологий и безопасности
Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина

Электротехника и электроника

Лекция № 7

Резонанс в электрических цепях

Учебные вопросы:

1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

3. Полоса пропускания колебательного контура.

Литература:

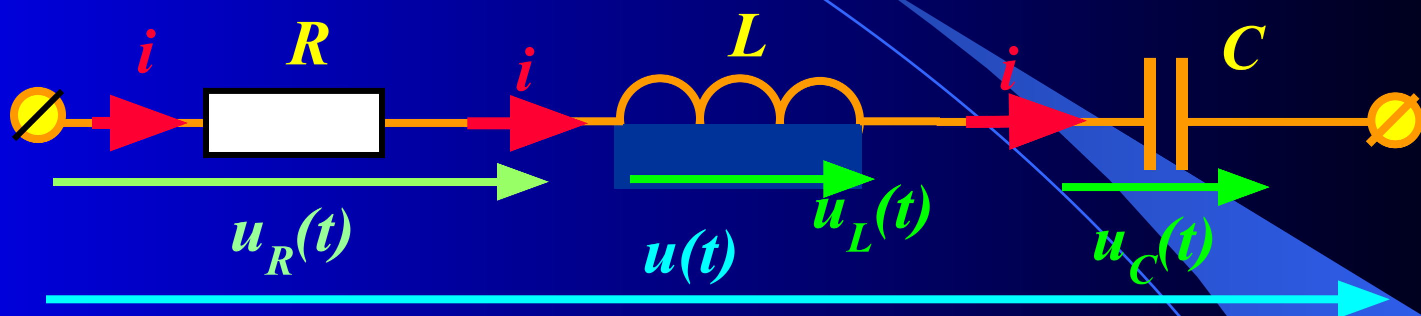
1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 105 – 113

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.

1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

Резонанс напряжений возможен на участке ЭЦ, содержащей <u>последовательно соединенные:</u> резистивный - R, индуктивный – L и емкостной – C элементы.



Действующее значение тока в цепи на основании закона Ома

$$\dot{I} = I(j\omega) = I \cdot e^{j\varphi_I} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U}}{Z \cdot e^{j\varphi_Z}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{j(\varphi_U - \varphi_Z)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{j\varphi_I}$$

$$Z = Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Модуль комплексного сопротивления цепи (последовательного контура)

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi(\omega) = \begin{cases} arctg \dfrac{X(\omega)}{R}, X(\omega) > 0 \\ -arctg \dfrac{X(\omega)}{R}, X(\omega) < 0 \end{cases}$$

Аргумент *Z* характеризует сдвиг фаз между *U* и *I*

Режим работы неразветвленного участка цепи, содержащей **последовательно соединенные резистивный - R, индуктивный – L и емкостной – C элементы, при котором ее ток и напряжение совпадают по фазе** называется **резонансом напряжений**

$$I = I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \to \max?$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

При резонансе $\phi = 0$, если $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C = 0$, что может быть выполнено лишь для некоторой частоты $\omega = \omega_0$. В этом случае

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Leftrightarrow \omega_0^2 LC = 1$$

$$I_0 = I(\omega_0) = I_{\max} = \frac{U}{R} \to \mathrm{var}[L, C \to или \to \omega]$$

В последовательном контуре из токов с различными частотами выделяется ток, только одной определенной частоты

Частота входного напряжения при которой наступает резонанс, обозначается ω_0 и называется резонансной или собственной частотой последовательного колебательного контура.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \to или \to f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Реактивные сопротивления контура на частоте ω_0 равны друг другу.

$$X_L(\omega_0) = X_C(\omega_0) = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \to [Ом]$$

Характеристическое (волновое) сопротивление контура

Резонансные свойства (избирательность) контура

$$Q = \frac{\rho}{R}$$ *или* $$d = \frac{1}{Q}$$

Пример: Пусть ***U*= 12 В**, ***X**$_L$**(ω**$_0$**) = X**$_C$**(ω**$_0$**) = 500 Ом***, ***R* = 6 *Ом*.**

Значение тока на резонансной частоте

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{12}{6} = 2A$$

$$U_{C0} = I_0 X_C(\omega_0) = U_{L0} = I_0 X_L(\omega_0) = = 2 \cdot 500 = 1000B$$

$$U_{R0} = I_0 R = 2 \cdot 6 = 12B, \to т.е. \to U_{C0} = U_{L0} \gg U_{R0}$$

Физический смысл добротности

$$\frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{U} = \frac{I_0}{U\omega_0 C} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C} \cdot R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

Добротность **показывает, во сколько раз резонансные напряжения на реактивных элементах превышают приложенное напряжение (напряжение источника входного сигнала) ⇒ термин**

«резонанс напряжений»

Частотные характеристики последовательного контура

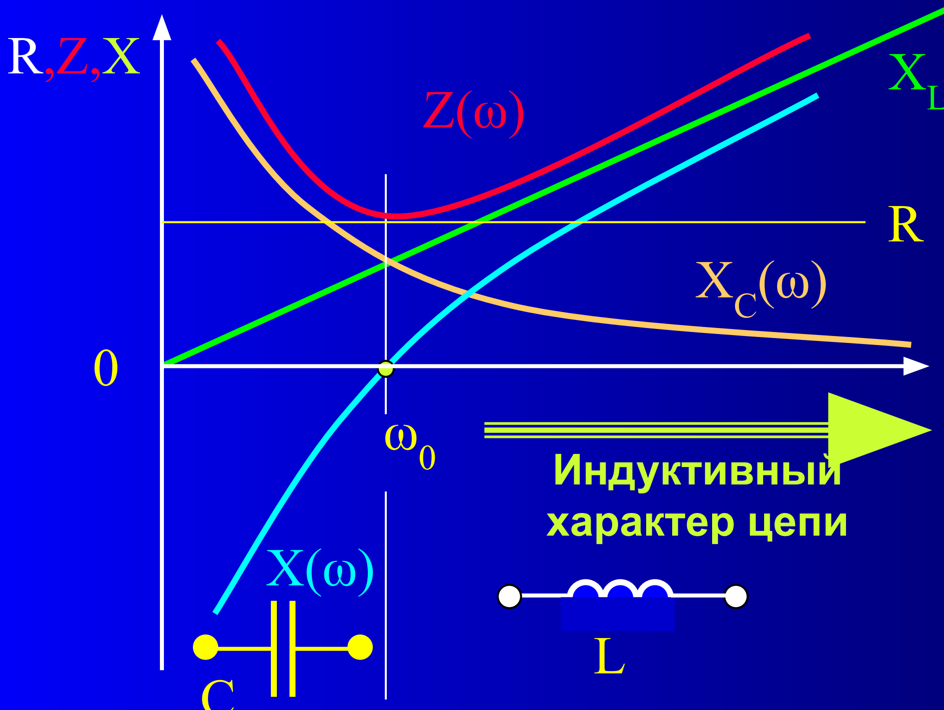
Анализ характера уравнений напряжений и токов в RLC цепи показывает, что они все являются частотно-зависимыми.

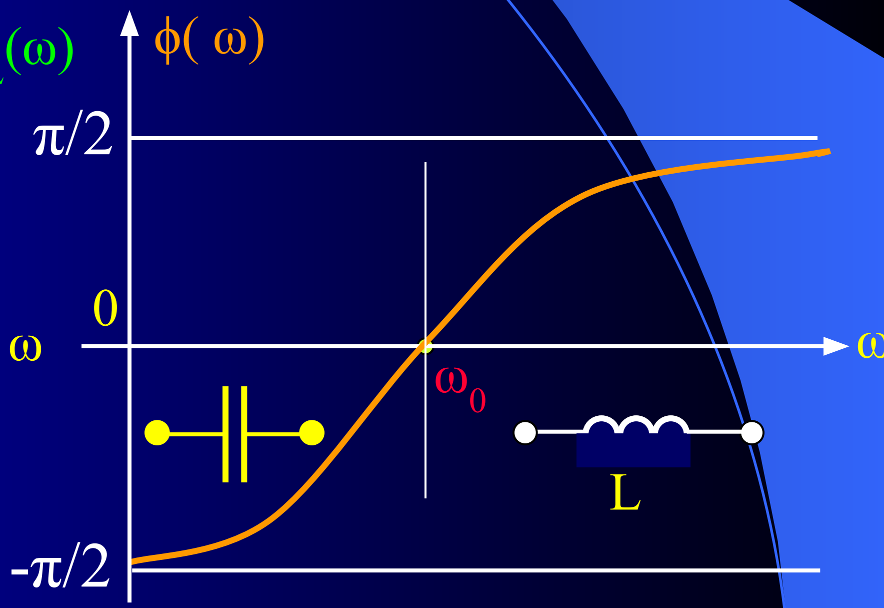
$$X_L(\omega)=\omega L, \to X_C(\omega)=\frac{1}{\omega C}, \to X(\omega)=(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

$$Z(\omega)=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}, \to \varphi(\omega)=arctg\frac{(\omega L-\frac{1}{\omega C})}{R}$$

$X_L(\omega)$, $X_C(\omega)$, $X(\omega)$, $Z(\omega)$ $\Rightarrow$ частотные характеристики цепи,

$\phi(\omega)$ $\Rightarrow$ фазочастотная характеристика цепи





Рассмотрим частотные зависимости действующих значений тока в цепи и напряжений на реактивных элементах контура.

$$I(\omega)=\frac{U}{Z}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

$$I_0=I_{\max}=\frac{U}{R},\rightarrow при \rightarrow \omega=\omega_0$$

$$U_L(\omega)=I(\omega)X_L(\omega)=\frac{U\cdot\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

Экстремумы на частоте

$$\omega_{L0}=\omega_0\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{2Q^2}}}>\omega_0$$

$$U_L(\omega)=I(\omega)X_C(\omega)=\frac{U}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

$$\omega_{C0}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}<\omega_0$$

Зависимости ***I(ω), U_L(ω), U_C(ω)*** – называются амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ) относительно тока и напряжений, или резонансными характеристиками.

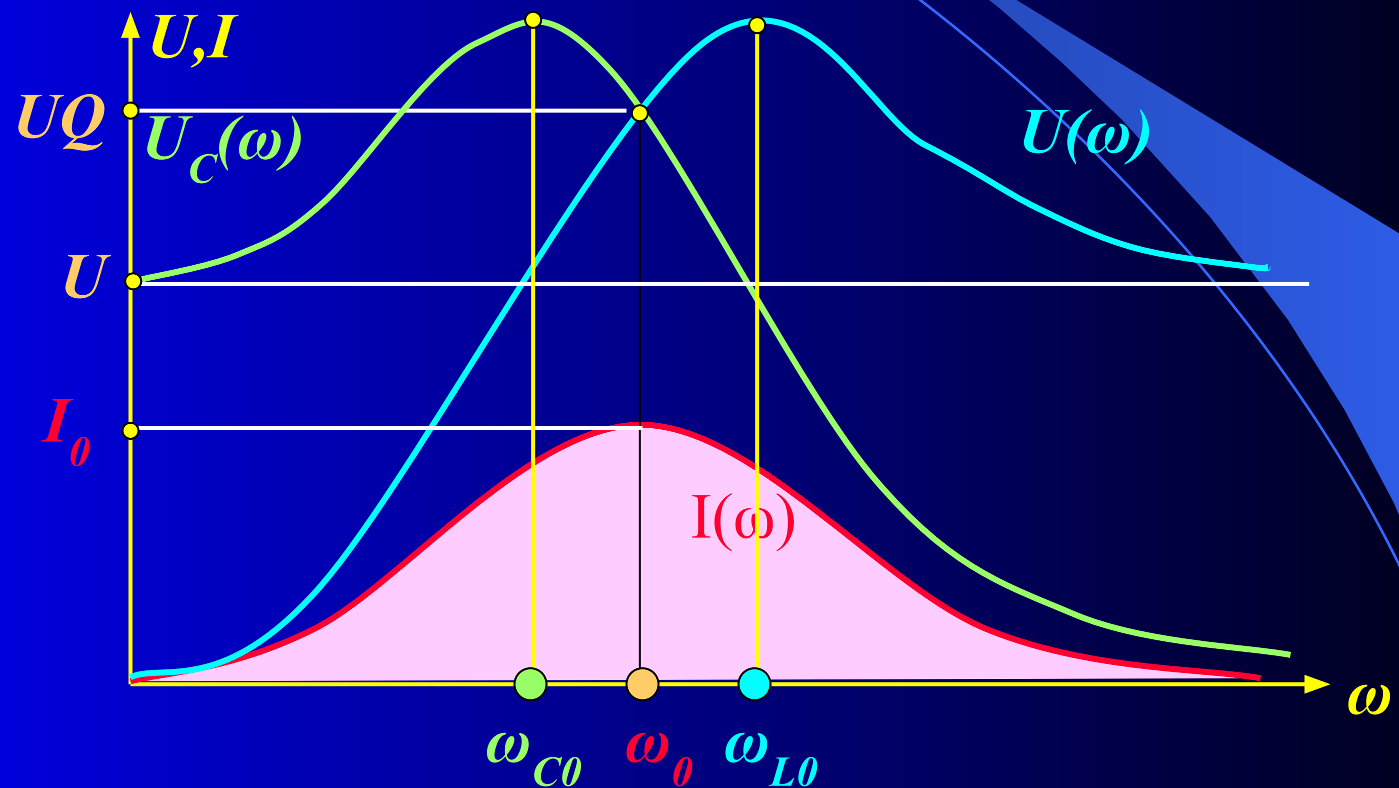
Для нахождения экстремумов ***U_L(ω), U_C(ω)*** необходимо:

$$\frac{\partial U_L(\omega)}{\partial\omega}=0$$

$$\frac{\partial U_C(\omega)}{\partial\omega}=0$$

На частотах ω_{L0} и ω_{C0} напряжения на реактивных элементах контура примут максимальное значение.

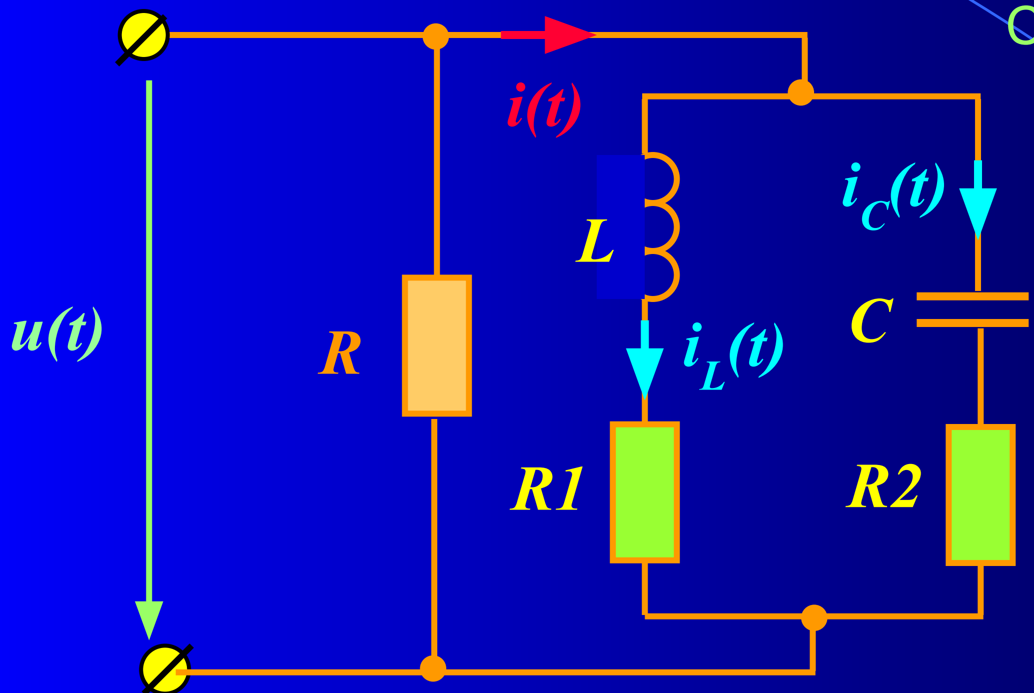
$$U_{C\max} = U_{L\max} = \frac{2UQ^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{2U}{d\sqrt{4 - d^2}}$$



С увеличением добротности контура (уменьшением затухания) частоты ω_{L0} и ω_{C0} сближаются с резонансной частотой ω_0, при этом I_0, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ возрастают и кривые становятся острее.

2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

Резонанс токов возможен на участке ЭЦ, в которой катушка индуктивности – L и конденсатор – C включены параллельно источнику сигнала.



Сопротивления R1 и R2 учитывают потери в ветвях контура

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} \qquad B_1 = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

$$G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} \qquad B_2 = \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2}$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 = \\ = G_1 + G_2 - j(B_1 - B_2) = G - jB$$

Рассмотрим случай $-jB_1 + jB_2 = 0$

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/\omega C}{R_1^2 + (1/\omega C)^2}$$

Равенство выполняется на частоте резонанса → ω_P

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}; \rightarrow \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}; \rightarrow \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Условие резонанса

$R_1 < \rho$, $R_2 < \rho$ или ***$R_1 > \rho$, $R_2 > \rho$***

Реактивные составляющие токов при резонансе равны друг другу

$$I_{P1} = U \cdot B_1 = I_{P2} = U \cdot B_2 = U \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = U \frac{1/\omega C}{R_1^2 + (1/\omega C)^2}$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I_0 = U \cdot G_{0Э} = \frac{U}{R_{0Э}}$$

$R_{0Э}$ – эквивалентное резонансное сопротивление контура

Режим работы участка цепи с параллельными ветвями, **при котором ток в неразветвленной части и напряжение на выводах контура совпадают по фазе** называется **резонансом токов**

При этом эквивалентное резонансное сопротивление параллельного контура

$$R_{0Э} = \frac{\rho^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow \infty$$

Наибольший теоретический и практический интерес представляют резонанс токов в контурах без потерь ($R_1 = R_2 = 0$) и с малыми потерями ($R_1 \ll \rho$, $R_2 \ll \rho$)

Контур без потерь $(R_1 = R_2 = 0)$

Уравнение резонансной частоты

$$\omega_P = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Эквивалентное сопротивление контура без потерь $R_{0Э} = \infty$ и входной ток равен нулю, а добротность обращается в бесконечность.

Комплексные действующие значения токов в ветвях контура:

$$\dot{I}_1 = \frac{U}{j\omega_0 L} = \frac{U}{\rho} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{I}_2 = Uj\omega_0 C = \frac{U}{\rho} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Контур с малыми потерями ($R_1 \ll \rho$, $R_2 \ll \rho$)

$$\omega_P \approx \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

при условии

$$\rho^2 \gg R_1 R_2$$

$$R_{0Э} \approx \frac{\rho^2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho^2}{R_\Sigma} = Q^2 R_\Sigma$$

Токи в контуре

$$I_0 = \frac{U}{R_{0Э}} = \frac{U}{Q^2 R_\Sigma}$$

$$\dot{I}_1 \approx \frac{U}{j\omega_0 L} \approx \frac{U}{\rho} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{I}_2 \approx Uj\omega_0 C \approx \frac{U}{\rho} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{\rho} = \frac{U}{QR_\Sigma}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{I_2}{I_0} = \frac{U/(Q^2 R_\Sigma)}{U/(Q\ R_\Sigma)} = Q$$

Отсюда и название резонанс токов

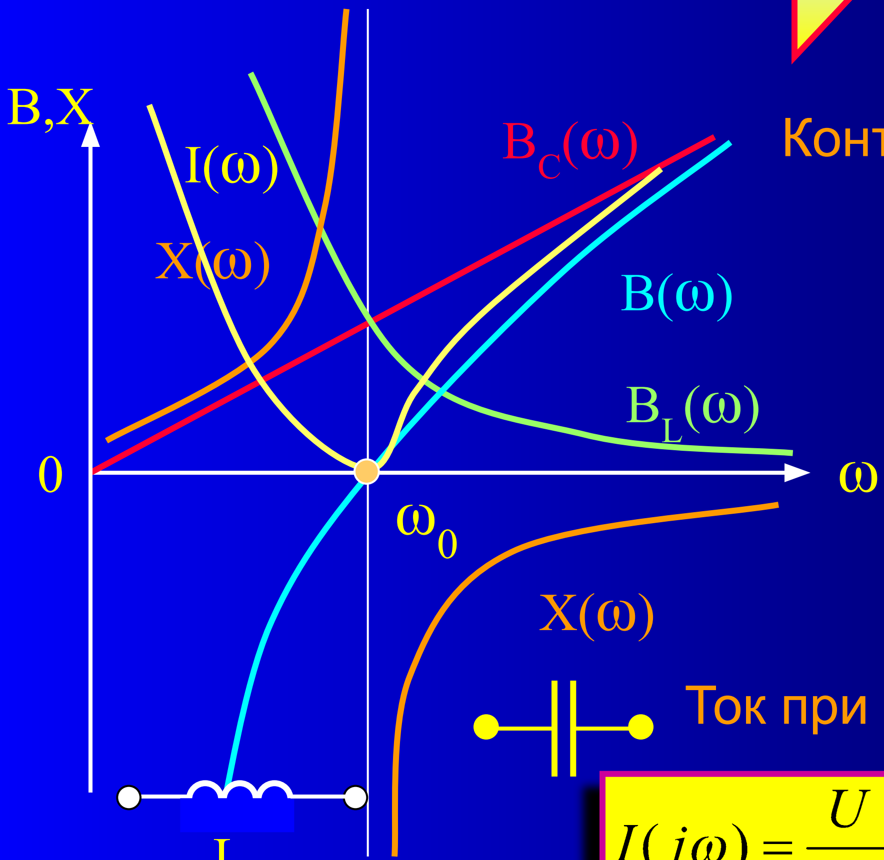
Частотные характеристики параллельного контура

Контур без потерь $(R_1 = R_2 = 0)$

Частотные зависимости параметров контура имеют вид

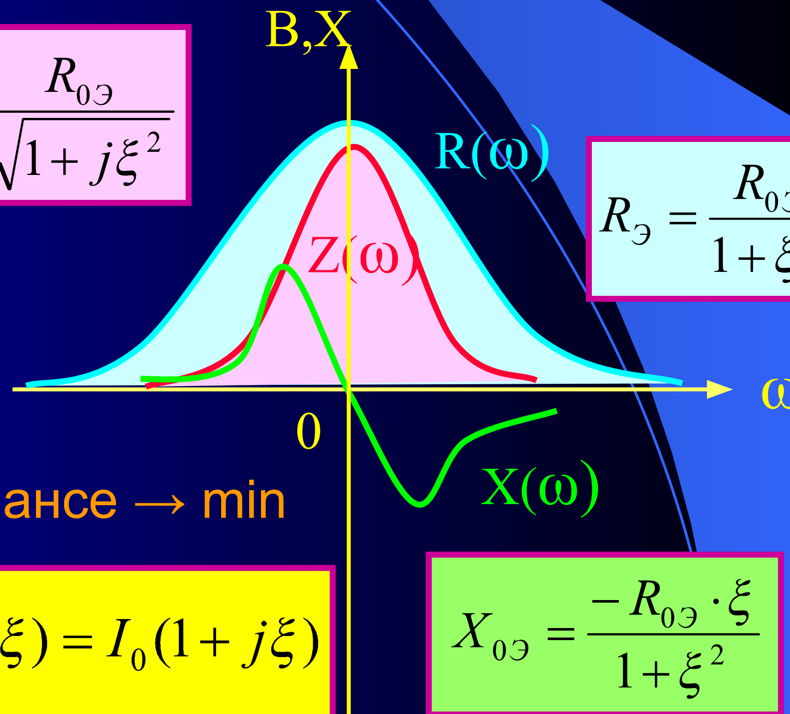
$$B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}, \rightarrow B_C(\omega) = \omega C$$

$$B(\omega) = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right), \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{B(\omega)}$$



Контур с малыми потерями $(R_1 \ll \rho,\ R_2 \ll \rho)$

$$Z_Э = \frac{R_{0Э}}{\sqrt{1 + j\xi^2}}$$



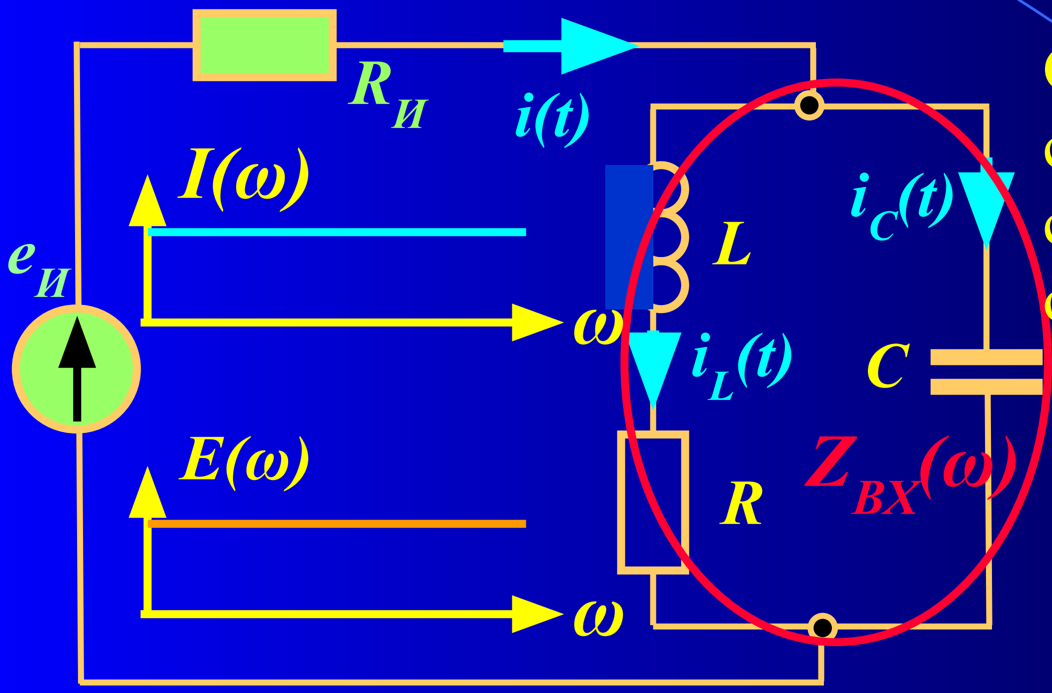
$$R_Э = \frac{R_{0Э}}{1 + \xi^2}$$

Ток при резонансе → min

$$I(j\omega) = \frac{U}{R_{0Э}}(1 + j\xi) = I_0(1 + j\xi)$$

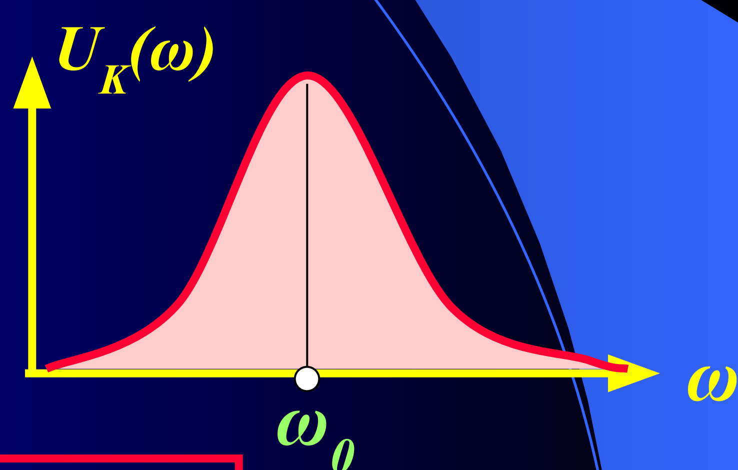
$$X_{0Э} = \frac{-R_{0Э} \cdot \xi}{1 + \xi^2}$$

В реальном параллельном колебательном контуре резонансные избирательные характеристики зависят от соотношения сопротивления контура $Z_{ВХ}(\omega)$ и внутреннего сопротивления $R_И$ источника входного сигнала



Сопротивление контура $Z_{ВХ}(\omega)$ совместно с внутренним сопротивлением источника $R_И$ образуют делитель напряжения

1) При $R_И > Z_{ВХ}(\omega)$



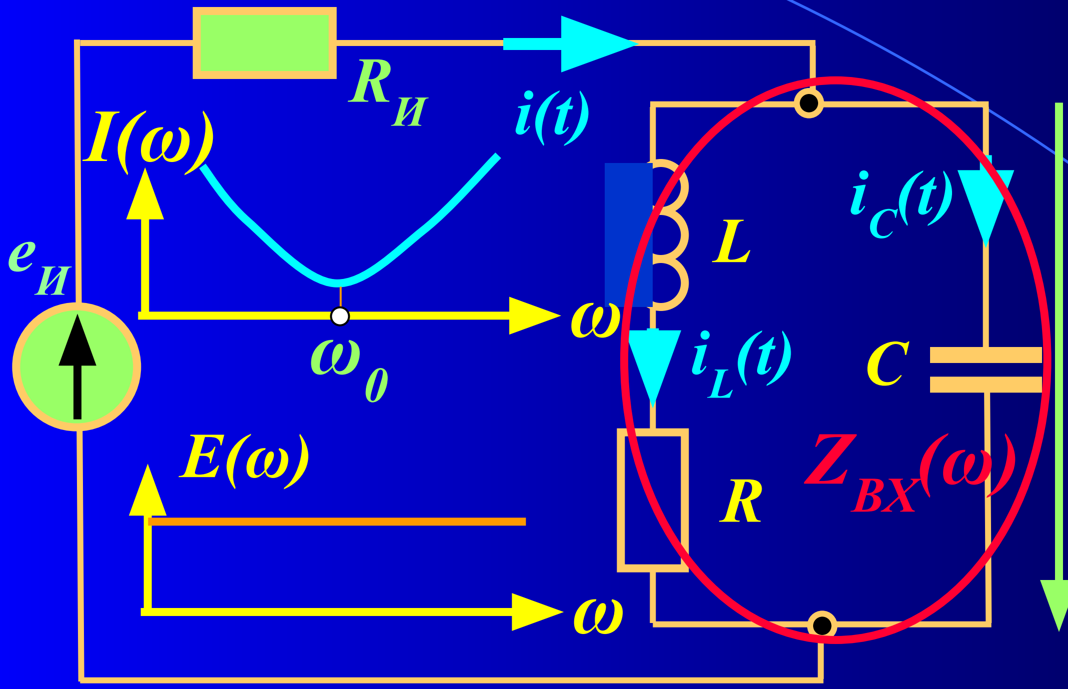
$$I(\omega)=\frac{e_И}{R_И+Z_{ВХ}(\omega)}\approx\frac{e_И}{R_И}\to const$$

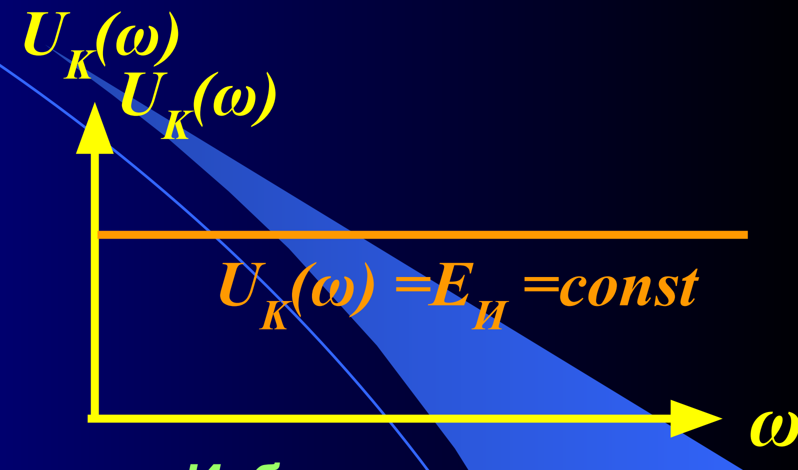
$$U_K(\omega)=\frac{e_И}{R_И}\cdot Z_{ВХ}(\omega)\to \mathrm{var}$$

$$K_{ДН}(\omega)=\frac{Z_{ВХ}(\omega)}{R_И}\to мал$$

Необходимо усиление $U_K(\omega)$

2) При $R_{И} < Z_{BX}(\omega)$





Избирательности входного сигнала нет

$$I(\omega) = \frac{e_{И}}{R_{И} + Z_{BX}(\omega)} \approx \frac{e_{И}}{Z_{BX}(\omega)} \to \mathrm{var}$$

$$U_{K}(\omega) = \frac{e_{И}}{Z_{BX}(\omega)} \cdot Z_{BX}(\omega) = e_{И} = const$$

Параллельный колебательный контур включают в цепи, обладающие

$R_{И}$ [illegible] $Z_{BX}(\omega)$

3. Полоса пропускания колебательного контура.

Избирательностью называется способность колебательного контура выделять сигналы заданной частоты и уменьшать (подавлять) сигналы всех других частот.

Контур с лучшей избирательностью обладает большей добротностью

Избирательность характеризуется формой амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) контура

Полосой пропускания называется область частот, вблизи резонансной частоты, в пределах которой напряжение (ток, модуль коэффициента передачи) уменьшается в заданное число раз (чаше всего в √2 раз).

- Последовательный колебательный контур

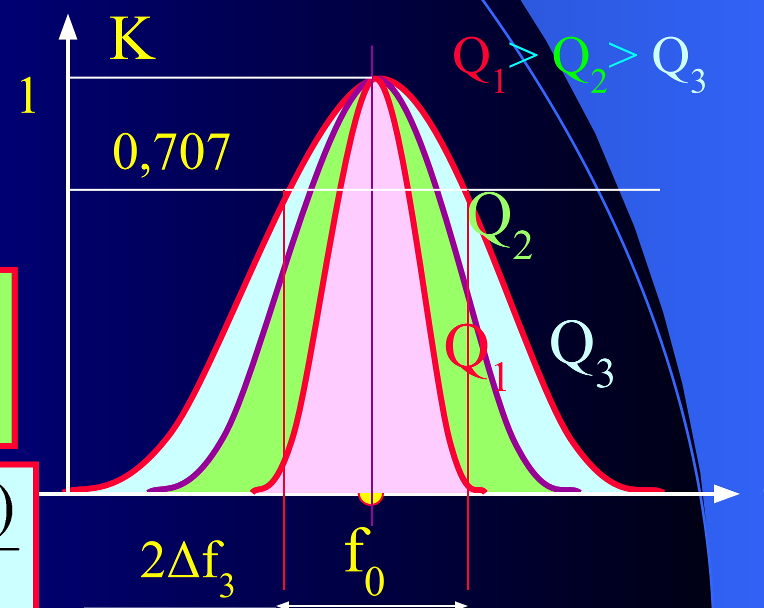
Нормированная АЧХ ($U_{ВЫХ} = U_C$)

$$K_U = \frac{K(f)}{K(f_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+(2Q\Delta f/f_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

Полоса пропускания

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \rightarrow [Гц]$$

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot (R+R_H)}{\rho} \rightarrow \frac{f_0 \cdot (R+R_i)}{\rho}$$



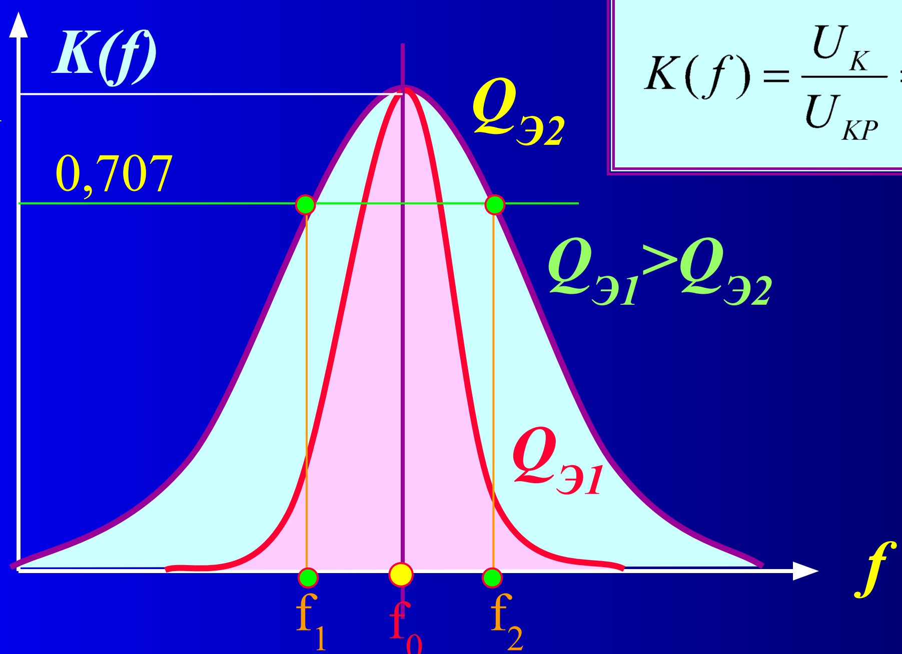
Параллельный колебательный контур

Обобщенная расстройка

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Полоса пропускания параллельного контура определяется выражением:

$$2\Delta f = \frac{f_P}{Q_Э} = \frac{f_P}{Q_Э} = \frac{f_0 \cdot (1 + R_{0Э}/R_i)}{Q} =, \rightarrow Q = \frac{\rho}{R}; Q_Э = \frac{Q}{1 + R_{0Э}/R_i}$$



$$K(f) = \frac{U_K}{U_{KP}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_Э^2(\omega/\omega - \omega_0/\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

Граничные частоты

$$f_{1,2} = \frac{f_0}{2Q_Э}\left(\sqrt{1 + 4Q_Э^2} \pm 1\right)$$

$$2\Delta f = |f_2 - f_1|$$

Расширение полосы пропускания

На практике в ряде случаев требуется существенно расширить полосу пропускания контура, не изменяя его резонансной частоты. (Q↓ → R) или (ρ↓ - применяется редко → необходимо изменять одновременно L и C)

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \to [\Gamma ц] \quad \Leftrightarrow \quad 2\Delta f = \frac{f_P}{Q_Э} = \frac{f_P}{Q_Э}$$

Практически часто уменьшают добротность за счет увеличения активного контура двумя путями:

- введением в контур добавочного сопротивления $R_Д$;
- шунтированием контура резистором $R_Ш$.

Сопротивление добавочного резистора рассчитывают по формуле

$$R_Д = \frac{2\Delta f_{ТРЕБ} \cdot \rho}{f_0}$$

Подключение к контуру шунтирующего резистора ***$R_Ш$*** эквивалентно включению последовательно с элементами контура добавочного резистора ***$R_Д$***

$$R_Ш = \frac{\rho^2}{R_Д} \quad \Leftrightarrow \quad R_Д = \frac{\rho^2}{R_Ш}$$

Задание на самостоятельную работу

***Литература*:**

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 105 – 113

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.