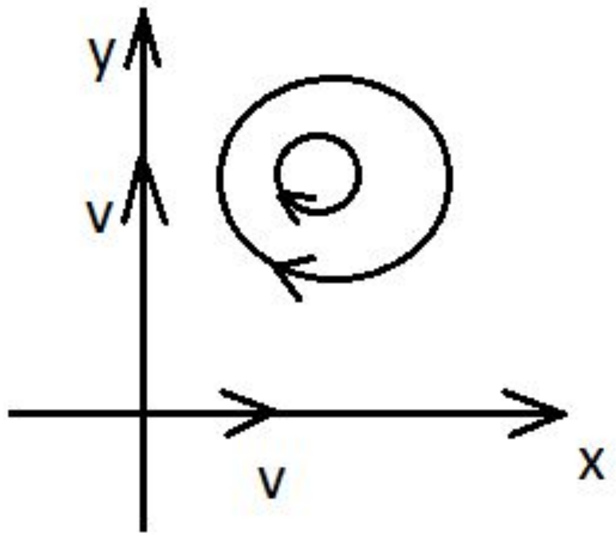
Маслов Кирилл, КМБО-1-12

Стационарное свободное двумерное течение жидкости внутри двугранного угла с движущимися стенками.

Научный руководитель: Кирюшин Валерий Викторович

Постановка задачи в угле

- $-\nabla p + \mu \Delta v = 0$
- $div\ v = 0$
- v – скорость жидкости
- p – давление
- μ – динамическая вязкость жидкости



- Рассматриваем стационарное свободное двумерное течение жидкости внутри двугранного угла с движущимися стенками, образованного координатными осями x и y: $(x > 0, y > 0)$.
- Скорости v_x и v_y являются функциями x и y:
- $v_x = v_x(x, y)$,
- $v_y = v_y(x, y)$.
- Уравнение непрерывности принимает вид
- $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$
- Для стационарного течения $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$. Так как течение свободное, то $\vec{f} = 0$. Будем пользоваться приближением малых чисел Рейнольдса, когда квадратичным членом в уравнении Навье-Стокса можно пренебречь. Тогда уравнение Навье-Стокса запишется в виде
- $\Delta(rot\ \vec{v}) = 0.$

- Имеем следующие граничные условия для компонент скоростей на границах угла $x = 0$ и $y = 0$:
- $v_y\big|_{y=0} = 0, \;\; v_x|_{y=0} \; = f(x),$
- $v_x|_{x=0} = 0, \; v_y\big|_{x=0} = g(y),$
- где $f(x)$ и $g(y)$ $-$некоторые заданные функции.

Функция тока

- Введем функцию тока $u(x, y)$ определяемую уравнениями
- $v_x = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial u}{\partial x}$.
- Основным удобством введения функции тока является то обстоятельство, что уравнение непрерывности $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ будет удовлетворено автоматически.
- Согласно определению линейного оператора rot имеем
- $rot\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\vec{e}_z = -\Delta u \cdot \vec{e}_z$
- где $\vec{e}_z - \text{орт}$ декартовой оси перпендикулярной осям x и y, а $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} -$ двумерный оператор Лапласа. Теперь уравнение $\Delta(rot\,\vec{v}) = 0$ запишется в виде
- $\Delta^2 u = \Delta\Delta u = 0$.

Общее решение бигармонического уравнения

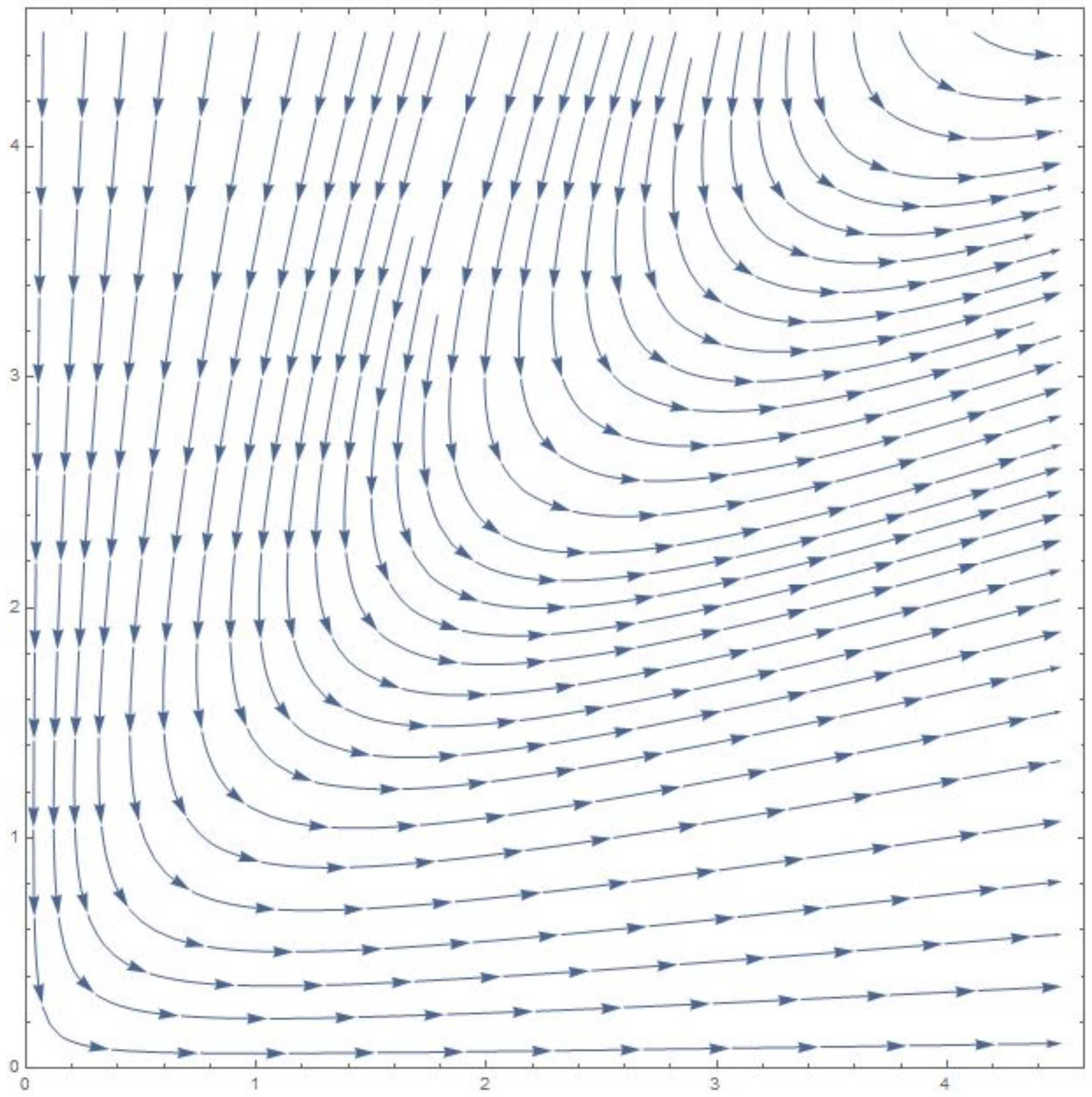
- Вводим комплексные переменные $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, где $i = \sqrt{-1}$ − мнимая единица
- Оператор Лапласа можно переписать через производные z и $\bar{z}$: $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$
- Теперь полагаем $u = Re(w)$, где $w = w(z, \bar{z})$, где Re означает действительную часть комплексного числа, и w является решением бигармонического уравнения
- $\Delta\Delta w = 16\frac{\partial^4 w}{\partial^2 z \partial^2 \bar{z}} = 0$, т.е. $\frac{\partial^4 w}{\partial^2 z \partial^2 \bar{z}} = 0$
- Частичное интегрирование этого уравнения по переменной $\bar{z}$ приводит к равенству
- $\frac{\partial^3 w}{\partial^2 z \partial \bar{z}} = C_1(z)$
- где $C_1(z)$ − произвольная голоморфная функция. Интегрируя второй раз по переменной $\bar{z}$ получаем
- $\frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} = C_1(z)\,\bar{z} + C_2(z)$

- где $C_2(z) -$ произвольная голоморфная функция. Отсюда следует, что общим решением уравнения (12) будет функция
- $w(z,\bar{z}) = \varphi(z)\bar{z} + \psi(z)$
- где $\varphi(z)$ и $\psi(z) -$ произвольные голоморфные функции.

Пример 1

- Зададим следующие функции, которые не имеют особенностей в области $x > 0$ и $y > 0$, т.е. являются аналитическими функциями от переменной $z = x + iy$, при $Re(z) > 0, Im(z) > 0$:
- $\varphi(z) = \frac{i}{a+z}$,
- $\psi(z) = \frac{-ia}{a+z}$. где $a > 0$. Тогда
- $\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} = \frac{i}{a+z} - \frac{i}{a+\bar{z}} + \frac{i(z+\bar{z})}{(a+\bar{z})^2}, f(x) = \frac{2x}{(a+x)^2}$, $g(y) = -\frac{2y}{a^2+y^2}$,
- $u(x,y) = \frac{2xy}{(x+a)^2+y^2}$.
- Видим, что при $x > 0$ и $y > 0$ функции $f(x)$ и $g(y)$ найденные выше вещественны, и поэтому соответствуют некоторой физической картине течения.
- Зная функцию тока $u(x, y)$ теперь можно найти искомое поле скоростей

- $v_x = \frac{\partial u}{\partial y} = 2x\frac{(x+a)^2-y^2}{((x+a)^2+y^2)^2}$ (*)
- $v_y = -\frac{\partial u}{\partial x} = 2y\frac{x^2-a^2-y^2}{((x+a)^2+y^2)^2}$.

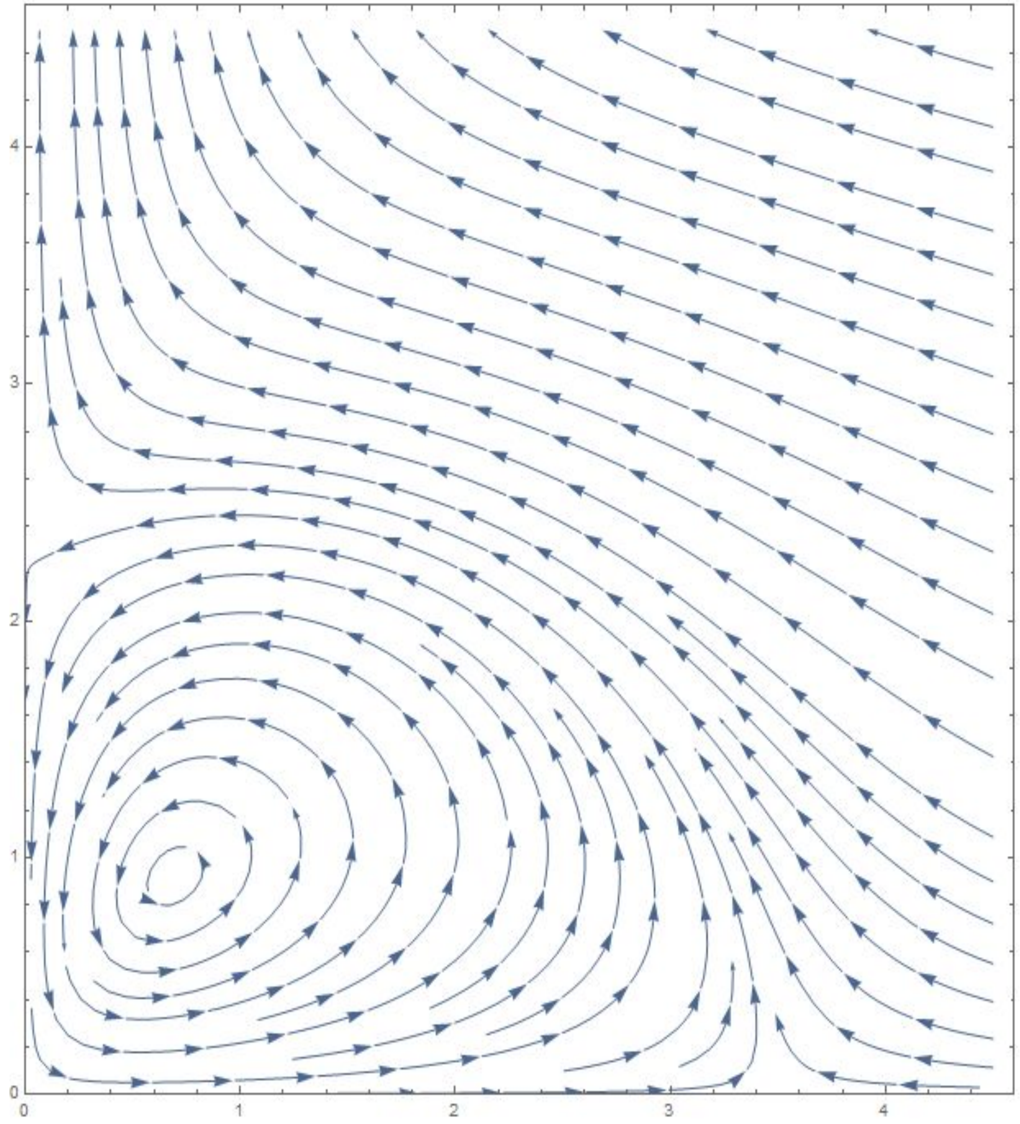


Поле скоростей для примера 1

- На рисунке 1. приведена картина течения (иными словами линии тока), соответствующая найденному выше полю скоростей, построенная для частного значения $a = 1$.
- Поле давлений $p(x, y)$ можно найти из бигармонического уравнения
- $\nabla p(x, y) = \nu\rho\Delta\vec{v} = \left(\frac{8(a+x)\left(-(a+x)^2 + 3y^2\right)}{\left((a+x)^2 + y^2\right)^3}, \frac{8y\left(-3(a+x)^2 + y^2\right)}{\left((a+x)^2 + y^2\right)^3} \right)$
- откуда следует
- (**) $p(x, y) = 4\nu\rho \frac{(x+a)^2 - y^2}{\left((x+a)^2 + y^2\right)^2}$.
- Формулы (* и **) решают поставленную задачу.

Пример 2

- . Рассмотрим функцию тока $u(x,y) = \frac{2xy}{(x+1)^2+y^2} - \frac{3xy}{(x+2)^2+y^2}$
- Соответствующее поле скоростей дается формулами
- $v_x = 2x\frac{(x+1)^2-y^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} - 3x\frac{(x+2)^2-y^2}{\left((x+2)^2+y^2\right)^2},$
- $v_y = 2y\frac{x^2-1-y^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} - 3y\frac{x^2-4-y^2}{\left((x+2)^2+y^2\right)^2}.$



Поле скоростей для примера 2

Тут мы видим, что поле скоростей имеет уже 3 особые точки:

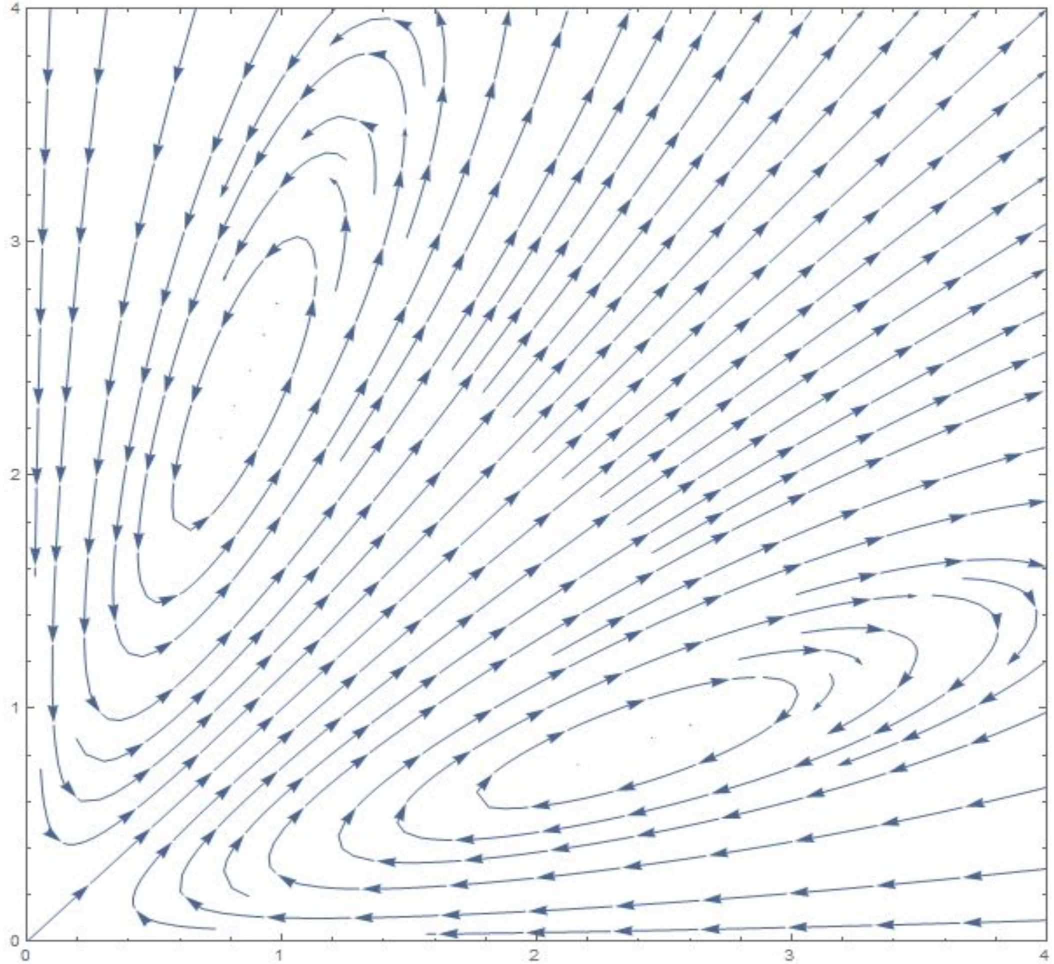
1) Первая особая точка находится на оси абсцисс, с приблизительными координатами (3.5, 0). Тип этой особой точки – седло.
2) Вторая особая точка находится на оси ординат с приблизительными координатами (0,2.5). Тип этой особой точки – седло.
3) Третья особая точка имеет приблизительные координаты (0.6,0.9), ее тип – центр.

Поле давлений легко найти используя формулу (**) и принцип суперпозиции:

$$p(x,y) = 4\nu\rho\frac{(x+1)^2 - y^2}{((x+1)^2 + y^2)^2} - 6\nu\rho\frac{(x+2)^2 - y^2}{((x+2)^2 + y^2)^2}$$

Пример 3

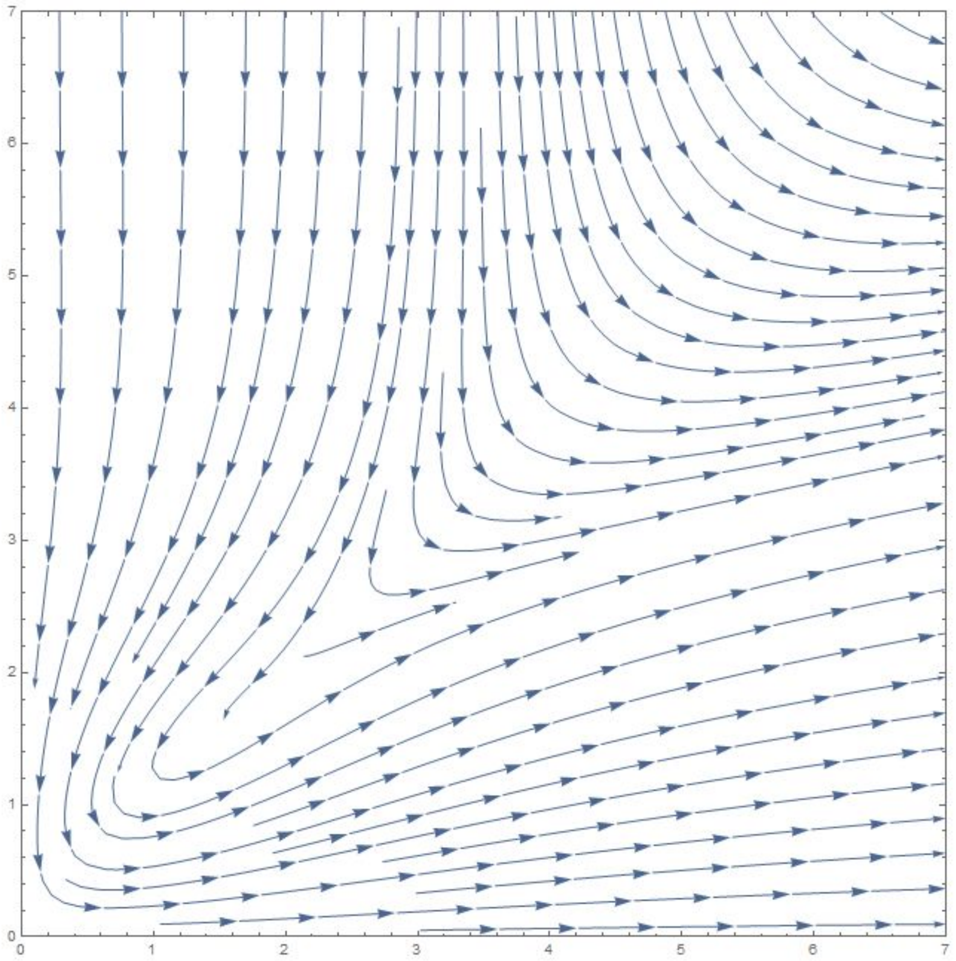
- Рассмотрим случай $a = b = 1, C_1 = -C_2 = 1$. Функция тока
- $u(x,y) = \frac{2xy}{(x+1)^2+y^2} - \frac{2xy}{(y+1)^2+x^2}$.
- Соответствующее поле скоростей дается формулами
- $v_x = 2x\frac{(x+1)^2-y^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} + 2x\frac{y^2-1-x^2}{\left((y+1)^2+x^2\right)^2},$
- $v_y = 2y\frac{x^2-1-y^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} + 2y\frac{(y+1)^2-x^2}{\left((y+1)^2+y^2\right)^2}.$



Поле скоростей для примера 3

Пример 4

- Рассмотрим случай
- $u(x,y) = \frac{2xy}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2xy}{(x+5)^2+y^2} - \frac{3xy}{(x+2)^2+y^2}$
- Соответствующее поле скоростей дается формулами
- $v_x = 2x\frac{(x+1)^2-y^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} + 2x\frac{(x+5)^2-y^2}{\left((x+5)^2+y^2\right)^2} - 3x\frac{(x+2)^2-y^2}{\left((x+2)^2+y^2\right)^2},$
- $v_y = 2y\frac{x^2-1-y^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} + 2y\frac{x^2-25-y^2}{\left((x+5)^2+y^2\right)^2} - 3y\frac{x^2-4-y^2}{\left((x+2)^2+y^2\right)^2}.$



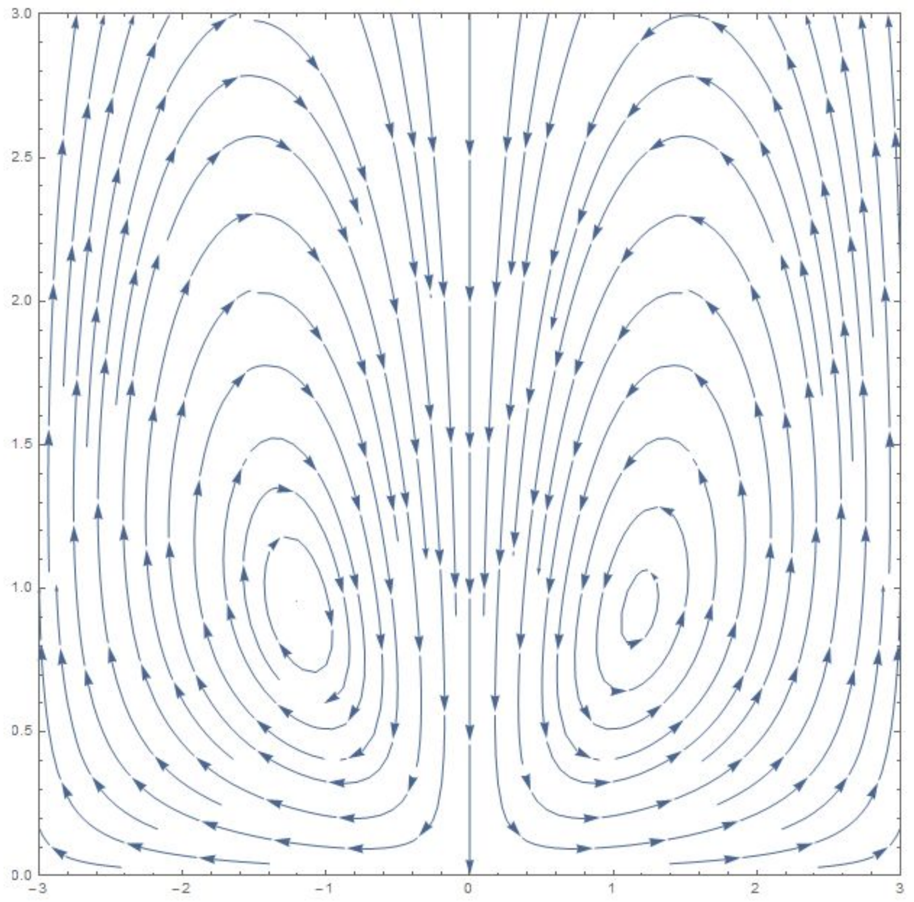
Поле скоростей для примера 4

Пример 5

- Прежде чем мы перейдем к рассмотрению новых примеров следует заметить, что не все аналитические в верхней полуплоскости функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяющие условию
- $\varphi(x) + x\overline{\varphi'(x)} + \overline{\psi'(x)} = if(x), \qquad -\infty < x < +\infty.$
- Для специального выбора функции
- $\psi(z) = -z\,\varphi(z)$
- можно упростить задачу отыскания подходящих функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$:
- $\begin{cases} u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}\right)(\bar{z} - z) \\ \varphi(x) - \overline{\varphi(x)} = if(x), \qquad -\infty < x < +\infty \end{cases}$ (***)
- где $f(x)$ – вещественная функция. В уравнениях (***) входит всего лишь одна функция $\varphi(z)$.

- Положим
- $\varphi(z) = \frac{1}{2-e^{iz}}$,
- $\psi(z) = -z\varphi(z)$.
- Эти функции аналитичны в верхней полуплоскости так как при $Im\, z > 0$ имеем $\left|e^{iz}\right| < 1$ (это означает, что согласно теореме Руше известной из теории функций комплексного переменного (ТФКП) $2 - e^{iz}$ не имеет нулей в верхней полуплоскости). Из уравнений (***) получаем

- $f(x) = \frac{1}{2-e^{ix}} - \frac{1}{2-e^{-ix}} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{\left|2-e^{ix}\right|^2} =$
- $= \frac{2\sin x}{4-2(e^{ix}+e^{-ix})+1} = \frac{2\sin x}{5-4\cos x}$
- $u(x,y) = -iy\left(\frac{1}{2-e^{ix-y}} - \frac{1}{2-e^{-ix-y}}\right) = -iy\frac{e^{ix-y}-e^{-ix-y}}{\left|2-e^{ix-y}\right|^2} ==$
- $= \frac{2ye^{-y}\sin x}{4+e^{-2y}-4e^{-y}\cos x}$
- $v_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{2ye^{-y}\sin x}{4+e^{-2y}-4e^{-y}\cos x} = -\frac{e^y\left(-1+4e^{2y}(-1+y)-y+4e^y\cos x\right)\sin x}{\left(1+4e^{2y}-4e^y\cos x\right)^2}$
- $v_y(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{2ye^{-y}\sin x}{4+e^{-2y}-4e^{-y}\cos x} = -\frac{e^y y(-4e^y+\cos x+4e^{2y}\cos x)}{\left(1+4e^{2y}-4e^y\cos x\right)^2}$



Поле скоростей для примера 5

Список литературы.

- 1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986.
- 2. Л.И.*Седов*. Механика сплошной среды, том 1 и 2. М.: Наука, 1970.
- 3. В.И.Смирнов Курс высшей математики, Т.3. Ч.2. М.: Наука, 1974.
- 4. Н.И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.