

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к лабораторным работам по разделу
«КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ»

Ленинград
1990

Лабораторная работа 5.1
ЗАТУХАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Цель работы

Изучение затухающих крутильных колебаний

Подготовка к работе

При подготовке к лабораторной работе следует изучить теоретический материал по [1, с.204-209] или по [3, с.308-310].

В настоящей лабораторной работе механическая система (диск, подвешенный на проволоке) совершает крутильные колебания. Из раздела "Механика" известно положение: форма записи основных законов для поступательного и вращательного движений одна и та же, что видно из табл. I.

Таблица I

Свободные колебания с затуханием механической системы	
I	2
Колеблющееся тело движется поступательно	Колеблющееся тела совершает крутильные колебания
Смещение тела от положения равновесия x	Смещение тела от положения равновесия определяет угол φ поворота относительно оси, совпадающей с осью симметрии системы
\dot{x} - скорость тела	$\dot{\varphi}$ - угловая скорость тела
\ddot{x} - ускорение тела	$\ddot{\varphi}$ - угловое ускорение тела
m - масса тела	I - момент инерции тела ^x
$F_{упр} = -kx$ - упругая сила (при малых смещениях), где k - коэффициент упругости	$M_{упр} = -K\varphi$ - момент упругой силы (при малых углах поворота) ^x
$F_{сопр} = -\gamma \dot{x}$ - сила сопротивления (при малых скоростях), где γ - коэффициент сопротивления	$M_{сопр} = -R\dot{\varphi}$ - момент силы сопротивления (при малых угловых скоростях) ^x

^x Момент инерции тела, момент упругой силы и момент силы сопротивления вычисляются относительно оси, совпадающей с осью симметрии системы. K и R - коэффициенты соответственно моментов упругой силы и силы сопротивления.

Таблица I (продолжение)

1	2
<p>На основании основного уравнения динамики (II закона Ньютона):</p> $F_{упр} + F_{опр} = m\ddot{x}$ $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$ <p>или</p> $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \quad (I)$	<p>На основании основного уравнения динамики вращательного движения: $M_{опр} + M_{упр} = I\ddot{\varphi}$</p> $I\ddot{\varphi} = -R\dot{\varphi} - K\varphi$ <p>или</p> $I\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + K\varphi = 0 \quad (Ia)$
<p>Уравнение (I) можно привести к виду:</p> $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$ <p>где $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ - коэффициент затухания;</p> <p>$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота системы</p>	<p>Уравнение (Ia) можно привести к виду:</p> $\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (2a)$ <p>где $\beta = \frac{R}{2I}$ - коэффициент затухания;</p> <p>$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$ - собственная частота системы</p>
<p>Решение уравнений (I) и (2)</p> $x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$ <p>где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний;</p> <p>$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний;</p> <p>A_0 - начальная амплитуда;</p> <p>φ_0 - начальная фаза</p>	<p>Решение уравнений (Ia) и (2a)</p> $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$ <p>где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний;</p> <p>$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда колебаний;</p> <p>φ_0 - начальная амплитуда;</p> <p>φ_0 - начальная фаза</p>
<p>Начальная амплитуда колебаний (A_0, φ_0) и начальная фаза φ_0 зависят от начальных условий</p>	

Для характеристики затухающих колебаний системы введены:

а) коэффициент затухания β

Физический смысл его можно выяснить из следующих рассуждений.

Допустим, что через T секунд амплитуда уменьшилась в e раз (e - основание натуральных логарифмов). Тогда отношение амплитуд

$$\frac{A_0}{A_T} = e^{\beta T} = e, \quad (3)$$

т.е.

$$\beta = \frac{1}{T}. \quad (4)$$

Следовательно, коэффициент затухания есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда убывает в e раз.

б) декремент, равный отношению двух последовательных значений амплитуд, разделенных промежутком времени, равным одному периоду T .

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (5)$$

в) Логарифмический декремент

$$\theta = \ln \delta = \beta T, \quad (6)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \beta^2}$ - период затухающих колебаний.

Физический смысл логарифмического декремента θ можно выяснить из следующих рассуждений. На основании формул (6) и (4) можно написать

$$\theta = \beta T, \quad \beta = \frac{1}{T}.$$

Из этих выражений следует, что

$$\theta = \frac{1}{N_0} = \frac{1}{N_0}, \quad (7)$$

где N_0 - число полных колебаний, за которые амплитуда убывает в e ($e \approx 2,7$) раз. Следовательно, логарифмический декремент есть физическая величина, обратная числу полных колебаний, в течение которых амплитуда убывает в e раз.

Описание лабораторной установки

Экспериментальная установка показана на рис. I. Крутящиеся колебания совершает диск I, подвешенный на проволоке и помещенный в воду (или находящийся в воздухе).

Для измерения углового смещения φ при колебаниях диска используется оптическая система. Луч света, идущий от осветителя 2, отражается от зеркала 3, укрепленного на проволоке, и попадает на шкалу 4. При повороте диска световой "зайчик" на шкале смещается. Если шкала 4 представляет собой дугу круга с центром на оси вращения зеркала 3, то смещение α "зайчика" пропорционально амплитуде φ колебаний диска, что позволяет определить отношение амплитуд

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (8)$$

Если шкала 4 прямолинейна, необходимо получить связь между отсчетом α по этой шкале и линейным перемещением α "зайчика" по круговой шкале. Для определения связи между α и α представим, что против зеркала B (рис. 2) расположили две шкалы - дуговая

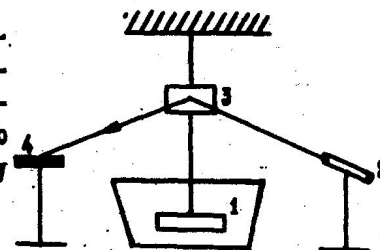


Рис. I

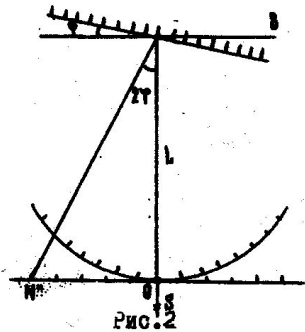


Рис. 2

6
и линейная. Расстояния между делениями на обеих шкалах одинаковы, расстояния от оси зеркала до середины обеих шкал тоже одинаковы и равны L . Тогда отсчет по дуговой шкале

$$a\alpha' = \alpha = L \cdot 2\varphi, \quad (9)$$

а по линейной

$$a\alpha'' = \alpha = L \operatorname{tg} 2\varphi. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что

$$\alpha = L \operatorname{arctg} \frac{\alpha''}{\alpha'}. \quad (11)$$

Разлагая функцию $\operatorname{arctg} \frac{\alpha''}{\alpha'}$ в степенной

ряд получим

$$\alpha = a \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha''}{\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{\alpha''}{\alpha'} \right)^4 - \dots \right]. \quad (12)$$

Если $\alpha \ll L$, при расчете β можно ограничиться двумя первыми членами ряда, тогда

$$\alpha = a \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha''}{\alpha'} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Для характеристики изменения амплитуды крутильных колебаний диска необходимо определить логарифмический декремент θ .

Для уменьшения погрешности измерения определяют отношения двух амплитуд: $\varphi(t)$ в момент времени t и $\varphi(t+nT)$ в момент времени $t+nT$, где $n \gg 15$.

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+nT)} = e^{\beta n T} = e^{\theta n}. \quad (14)$$

Из формулы (14)

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+nT)}. \quad (15)$$

Учитывая, что

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+nT)} = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t+nT)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n}$$

получим формулу для определения θ

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_n}. \quad (16)$$

Междисциплинарные указания к выполнению лабораторной работы

I. Свободные колебания диска в воздухе

I. Включить осветитель.

7

- Отметить по шкале положение равновесия α_0 светового "зайчика". Целесообразно установить $\alpha_0 = 0$.
- Привести диск в крутильные колебания.
- Измерить по шкале отброс α' светового "зайчика" и рассчитать смещение α_1 "зайчика" по шкале.

$$\alpha_1 = \alpha' - \alpha_0.$$
- Измерить отброс α светового "зайчика" после пятнадцати колебаний и промежуток времени Δt , за который диск совершает эти колебания. Рассчитать смещение "зайчика" $\alpha_n = \alpha'' - \alpha_0$.
- Выполнить п. п. 2-5 при количестве колебаний $n = 20$ и $n = 25$.

II. Свободные колебания диска в воде

Поместить диск в воду и выполнить п. п. I-6.

Обработка результатов измерений

- Рассчитать линейные перемещения α_1 и α_n "зайчика" по круговой шкале, соответствующие α_1 и α_n .
- Рассчитать период колебаний $T = \frac{\Delta t}{n}$ диска.
- Определить логарифмический декремент θ .
- Рассчитать абсолютную и относительную погрешности логарифмического декремента.
- Значения измеренных и рассчитанных величин для колебаний диска в воздухе внести в табл. 2.
- Значения измеренных и рассчитанных величин для колебаний диска в воде внести в табл. 3, аналогичную табл. 2.

Таблица 2

	α_0	α'	α_1	α_1	α''	α_n	α_n	Δt	T	$\frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n}$	$\ln \frac{\alpha_1}{\alpha_n}$	θ	$\Delta \theta_1$	$\Delta \theta_1^2$
ед. изм.														
15														
20														
25														
Средние значения θ_{cp} и T_{cp}														$\Sigma(\Delta \theta_1)^2$

Дополнительное задание к работе (по указанию преподавателя)

- Для крутильных колебаний диска в воде и в воздухе рассчитать:
 - коэффициент затухания β по средним значениям $T_{ср}$ и $\theta_{ср}$;
 - частоту затухающих колебаний диска;
 - собственную частоту колебаний диска.
- Написать закон изменения амплитуды φ крутильных колебаний диска в воде и в воздухе в зависимости от времени t . Построить в одной координатной системе графики функций $\varphi(t)$ для колебаний диска в воздухе и в воде. По графикам определить промежуток времени τ , в течение которого амплитуда убывает в e раз (время релаксации).
- Написать закон изменения во времени угла поворота φ диска при колебаниях его в воздухе и в воде и построить графики $\varphi(t)$ в одной координатной системе.
- Рассчитать коэффициент затухания β и коэффициент момента силы сопротивления R , при которых режим движения диска становится аperiodическим. Масса и размеры диска заданы на рабочем месте.
- Написать закон изменения во времени момента упругой силы $M_{упр}^{(t)}$.

Контрольные вопросы

- Какие силы действуют на систему, совершающую затухающие свободные колебания?
- Напишите дифференциальное уравнение этих колебаний. На основании какого закона динамики оно составлено?
- Напишите решение дифференциального уравнения затухающих колебаний при $\omega_0 > \beta$.
- Какой физический смысл имеют коэффициент затухания, декремент затухания, логарифмический декремент?

Лабораторная работа 5.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы

Исследование закономерностей свободных электрических затухающих колебаний в последовательном колебательном контуре, определение их физических характеристик.

Подготовка к работе

Изучите теоретический материал по [2, с.262-265] или [3, с. 302, 303, 308-310].

Свободные электрические колебания можно получить в цепи, если предварительно заряженный конденсатор C замкнуть на катушку индуктивности L (рис.1). Из-за наличия в цепи сопротивления R первоначально запасенная в контуре энергия расходуется на нагревание и колебания будут затухающими.

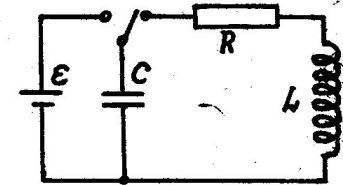


Рис.1

Уравнение колебаний можно получить с помощью закона Ома

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}, \quad (1)$$

где I - ток в цепи, q - заряд на обкладках конденсатора. Учитывая, что $I = \dot{q}$, и вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad (2)$$

получим дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3)$$

Его решение имеет вид ($\omega_0 > \beta$),

$$q(t) = q_m(t) \cos(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

$$q_m(t) = q_{m0} e^{-\beta t}, \quad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (6)$$

На рис.2 показана зависимость мгновенного значения заряда $q(t)$ и амплитуды заряда $q_m(t)$ на обкладках конденсатора от времени. Такую же зависимость от времени имеет на-

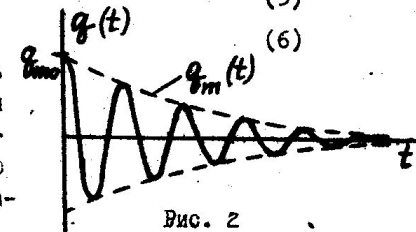


Рис. 2

напряжения на конденсаторе $U_C = q/C$, напряжение на катушке U_L и ток I в цепи, но ток сдвинут по фазе относительно заряда. Из выражений (5) и (6) ясен физический смысл величин ω_0 и β . Величина ω_0 является циклической частотой колебаний при отсутствии затухания и называется собственной частотой контура. Из (6) видно, что при затухании частота колебаний ω уменьшается. Величина $\beta = 1/\tau$, обратная времени τ , за которое амплитуда колебаний убывает в e раз, называется коэффициентом затухания. Величина δ , показывающая во сколько раз убывает амплитуда колебаний за один период колебаний, называется декрементом затухания:

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}, \quad (7)$$

где $A(t)$ - амплитуда колебаний соответствующей величины (q, I, U), $T = 2\pi/\omega$ - период колебаний.

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \frac{1}{N} \ln \frac{A(t)}{A(t+NT)}, \quad (8)$$

где N - число колебаний.

Из (8) следует, что $\theta = 1/N_e$, где N_e - число колебаний, за которое амплитуда колебаний убывает в e раз.

Из (7) видно, что

$$\theta = \ln \delta = \beta T. \quad (9)$$

Если $\beta \geq \omega_0$, то колебания не возникают, а происходит аperiodический разряд конденсатора, т.е. напряжение и ток в контуре асимптотически стремятся к нулю с течением времени. Сопротивление $R_{кр}$, при котором колебательный процесс переходит в аperiodический (при этом $\beta = \omega_0$), называется критическим

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10)$$

Описание лабораторной установки

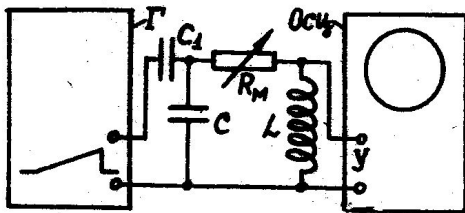


Рис.3

Схема установки показана на рис.3. От генератора пилообразного напряжения Γ через переходную емкость C_1 периодически подается импульсы пилообразного напряжения, заряжающие конденсатор C . За время между двумя импуль-

сами этого напряжения конденсатор разряжается через магазин сопротивлений R_M и катушку индуктивности L , и в цепи возникают свободные затухающие колебания. Параметры цепи подберем так, что эти колебания успевают затухнуть до того, как будет подан следующий импульс пилообразного напряжения. Изменяя сопротивление магазина R_M , можно менять степень затухания. Напряжение с катушки, имеющее зависимость от времени $U_L = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$, подается на вертикально отклоняющие пластины осциллографа. Таким образом, вертикальное смещение электронного луча на экране осциллографа будет пропорционально мгновенному значению этого напряжения. На горизонтально отклоняющие пластины в этот промежуток времени подается линейно изменяющееся напряжение (от генератора пилообразного напряжения, имеющегося в осциллографе). Поэтому в горизонтальном направлении луч равномерно перемещается по экрану. В результате на экране осциллографа получается развертка изучаемого процесса во времени (рис.2). В осциллографе имеется генератор меток, позволяющий установить временной масштаб по горизонтальной оси на экране.

Методические указания к выполнению работы

1. Собрать схему (рис.3).
2. Записать указанные на рабочем месте значения емкости C и сопротивления катушки R_L .
3. Включить осциллограф *Осц.*
4. Установить одно из указанных на рабочем месте значений сопротивления магазина R_M . Получить на экране осциллографа картину затухающих колебаний. Установить эту картину симметрично относительно горизонтальной оси.
5. Перенести на кальку полученную зависимость $U_L(t)$ вместе с горизонтальной осью, обращая особое внимание на точность фиксирования максимумов и минимумов кривой и точек пересечения кривой с горизонтальной осью. Провести огибающую полученной кривой. Указать сопротивление магазина R_M .
6. Отключить вход "У" осциллографа. Включить генератор меток. Измерить число N меток, приходящееся на выбранное расстояние l на экране осциллографа. Записать значения N, l и цену метки t_0 . Вычислить временной масштаб по горизонтальной оси

$$k_t = \frac{N t_0}{l}. \quad (11)$$

7. Выполнить п.п. 4-6 для других значений сопротивления магазина, указанных на рабочем месте.
8. Увеличивая сопротивление магазина, найти то его значение $R_{мп}$, при котором колебательный режим переходит в аperiodический. Повторить это измерение 5 раз. Записать значения $R_{мп}$ в табл. I.
9. Выключить осциллограф.

Таблица I

№ изм.	1	2	3	4	5	Среднее значение	Абсолютная погрешность
$R_{мп}$ Ом							

Обработка результатов измерений

1. Отметить на снятых зависимостях начало отсчета времени (это начало удобно совместить с первой, наибольшей амплитудой A_0).
2. Измерить на полученных зависимостях и записать в табл. 2 амплитуды колебаний A_k ($k = 0$ соответствует наибольшей амплитуде A_0) и соответствующие им расстояния по горизонтальной оси от начала отсчета Δx_k . Такие измерения сделать для всех значений R_M .

Таблица 2

R_M Ом	№	A_k мм	$\frac{A_0}{A_k}$	$z_k = \ln \frac{A_0}{A_k}$	Δx_k мм	τ_k с	$\beta_{с-1}$	L Гн	T с	$\omega_{с-1}$	θ
R_{M1}	0										
	1										
	2										
	...										
	к										
R_{M2}	0										
	1										
	2										
	...										
	к										
R_{M3}	•										

3. Вычислить отношения A_0/A_k величины $z_k = \ln \frac{A_0}{A_k}$ и соответствующие им промежутки времени $\tau_k = R_k \Delta x_k$.
4. Построить графики зависимости $z = f(\tau)$. Как следует из выражения

$$z = \ln \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \beta \tau, \quad (12)$$

эти графики должны представлять собой прямые линии. Провести указанные прямые и объяснить наличие отклонений экспериментальных точек от них.

5. Согласно (12), угловой коэффициент $\frac{\Delta z}{\Delta \tau}$ построенных прямых равен коэффициенту затухания β . Найти для каждой прямой величину β графическим способом. Другой способ определения β изложен в п.14. Использовать его по указанию преподавателя.
6. Вычислить значения индуктивности катушки для каждого значения R_M :

$$L = \frac{R_M + R_k}{2\beta}. \quad (13)$$

7. Определить среднее значение L . Задав доверительную вероятность α и пренебрегая систематической погрешностью, найти случайные погрешности ΔL и δL и записать доверительный интервал $L \pm \Delta L$.
8. Вычислить с помощью формулы (2) собственную частоту колебаний ω_0 .
9. Вычислить для различных значений R_M период T и частоту ω затухающих колебаний

$$T = \frac{\tau}{N} = \frac{R_M \Delta x}{N}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (14)$$

где N - число колебаний, укладывающихся на промежутке Δx . В качестве Δx взять отрезок по горизонтальной оси от одного из первых пересечений кривой этой оси до одного из последних пересечений. Убедиться, что T растет с ростом сопротивления R .

10. Вычислить по формуле (9) логарифмический декремент затухания для каждого из опытов.
11. По результатам измерений при критическом режиме найти среднее значение критического сопротивления $R_{кр} = R_{мп} + R_k$. Вычислить случайные погрешности $\Delta R_{кр}$, $\delta R_{кр}$ и записать доверительный интервал для взятого в п.7 значения α .
12. Вычислить $R_{кр}$ по формуле (10) и сравнить с найденным в предыдущем пункте.
13. Написать для одного из значений сопротивления контура уравне-

ние затухающих колебаний напряжения на конденсаторе, полагая

$$U_{\text{н}} = I B, \varphi = 0.$$

14. Для более строгого определения коэффициента затухания можно применить метод наименьших квадратов (МНК)^X. Для этого коэффициент затухания вычислите по формуле

$$\beta = \left(\sum_{k=1}^n \tau_k^2 \right) / \left(\sum_{k=1}^n \tau_k \right).$$

Дисперсию коэффициента затухания определите по формуле

$$S_{\beta}^2 = \frac{1}{n-2} \left(\sum_{k=1}^n \tau_k^2 / \sum_{k=1}^n \tau_k^2 - \beta^2 \right).$$

Найдите доверительный интервал $\beta \pm \Delta\beta$, где случайная погрешность $\Delta\beta = t_{\text{ин}} S_{\beta}$, $t_{\text{ин}}$ - коэффициент Стьюдента.

Поскольку β есть угловой коэффициент прямой $x = f(\tau)$, по найденному значению β можно провести эту прямую. Согласно МНК, она обладает тем свойством, что сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от этой прямой будет наименьшей по сравнению с любой другой прямой.

Найдите с помощью МНК значения β для других значений R_m .

Контрольные вопросы

1. Выведите дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.
2. Напишите зависимости от времени заряда на обкладках конденсатора, напряжения между обкладками, напряжения на катушке, тока в контуре.
3. Дайте определения коэффициента затухания, декремента затухания, логарифмического декремента затухания.
4. Что такое критический режим?
5. В какой вид энергии переходит энергия, запасенная в контуре перед началом колебаний?

^X Описание МНК дано в [4]. Там же приведена программа обработки результатов на микрокалькуляторе.

Лабораторная работа 5.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы

Исследовать зависимость резонансной частоты и вида резонансной кривой от параметров контура.

Подготовка к работе

При подготовке к лабораторной работе следует изучить теоретический материал по [2, с.265-269] или по [3, с.314-317].

Вынужденные электрические колебания происходят в контуре (рис.1), состоящем из катушки индуктивности L , конденсатора C , активного сопротивления R и источника ЭДС которого \mathcal{E} меняется по закону:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \Omega t, \quad (1)$$

где \mathcal{E}_m - амплитуда электродвижущей силы источника (внешняя или вынуждающая ЭДС), Ω - частота колебаний ЭДС источника.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания заряда на обкладках конденсатора, можно получить из закона Кирхгофа

$$u_L + u_R + u_C = \mathcal{E}, \quad (2)$$

где $u_L = L \ddot{q}$ - напряжение на индуктивности, $u_C = \frac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе, $u_R = R \dot{q}$ - напряжение на сопротивлении.

Учитывая эти формулы и формулу (1), уравнение (2) можно представить в виде:

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_m \sin(\Omega t). \quad (3)$$

В установившемся режиме решение уравнения (3) имеет вид:

$$q = q_m \sin(\Omega t - \varphi), \quad (4)$$

где q_m - амплитуда заряда на обкладках конденсатора, φ - отставание по фазе вынужденных колебаний заряда конденсатора от колебаний внешней ЭДС.

Так как $u_C = \frac{q}{C}$, напряжение на обкладках конденсатора изменяется по закону

$$u_C = u_m \sin(\Omega t - \varphi), \quad (5)$$

где $u_m = \frac{q_m}{C}$.

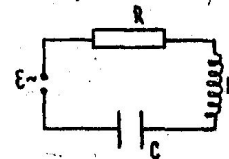


Рис.1

Величины q_m , U_m и ψ зависят от частоты Ω внешней ЭДС:

$$q_m(\Omega) = \frac{\varepsilon_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (6)$$

$$U_m(\Omega) = \frac{\varepsilon_m}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (8)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота колебаний, $\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания.

При вынужденных колебаниях в контуре может произойти явление резонанса. Резонансом называется такое явление, при котором амплитуда U_m напряжения на конденсаторе (и амплитуда q_m заряда) достигает максимального значения при определенной частоте $\Omega_{рез}$ вынуждающей ЭДС. Эта частота $\Omega_{рез}$ называется резонансной частотой.

Исследуя функцию $U_m(\Omega)$ на максимум, можно получить

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (9)$$

Описание лабораторной установки

Исследуемый в работе колебательный контур состоит из катушки индуктивности L , магазина сопротивлений R и конденсатора C (рис.2).

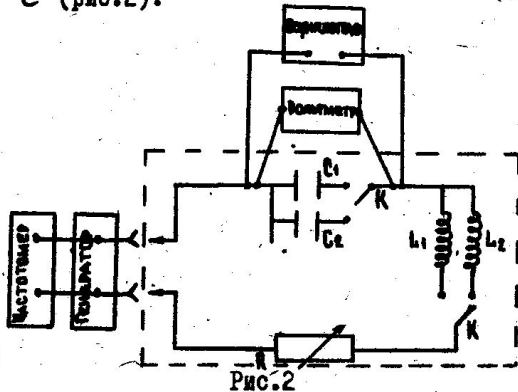


Рис.2

Для измерения частоты Ω внешней ЭДС используется частотомер, для измерений разности потенциалов на конденсаторе - вольтметр.

Осциллограф дает возможность наблюдать зависимость $U_c(t)$ - разности потенциалов на конденсаторе от времени.

методические указания к выполнению части I работы

- I. Исследование зависимости резонансной частоты контура от его параметров.
 1. Собрать схему, показанную на рис.2, включив в нее контур №1 с параметрами R_1 , C_1 , L_1 (указаны на рабочем месте).
 2. Установить на выходе генератора напряжение $E_{эфф} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}}$, величина которого указана на рабочем месте. В процессе работы $E_{эфф}$ должна быть постоянной.
 3. Изменяя частоту Ω внешней ЭДС в контуре, добиться максимального значения $(U_m)_{max}$ разности потенциалов на обкладках конденсатора (при этом в контуре наступает резонанс). Фиксировать получение резонанса $U_m = (U_m)_{max}$ можно по вольтметру и по кривой $u(t)$ на экране осциллографа.
 4. Измерить разность потенциалов $U_{эфф} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ на конденсаторе при резонансе и резонансную частоту $\Omega_{рез}$. Измерение сделать три раза и результаты внести в табл. I.
 5. Исследовать зависимость резонансной частоты $\Omega_{рез}$ от сопротивления R контура. Для этого изменить параметры контура, включив в схему R_2 , C_1 , L_1 . Для контура №2 сделать измерения, указанные в п.п. 1-4.
 6. Исследовать зависимость $\Omega_{рез}$ от емкости контура или от индуктивности (по указанию преподавателя), включив в схему соответственно R_2 , C_2 , L_1 или R_2 , C_1 , L_2 . Для контура №3 сделать измерения, указанные в п.п. 1-4.
 7. Результаты измерений внести в табл. I.

Таблица I

№ изм.	напряжение на выходе генератора					
	контур № 1		контур № 2		контур № 3	
	$C =$	$R =$	$L =$	$C =$	$R =$	$L =$
	$\Omega_{рез}$	$U_{эфф}$	$\Omega_{рез}$	$U_{эфф}$	$\Omega_{рез}$	$U_{эфф}$
1						
2						
3						
Среднее значение						

Задание к части I работы

- по данным измерений рассчитать абсолютную и относительную погрешности измерений $\Omega_{рез}$ для одного из контуров (по указанию преподавателя).
- Для контуров 1, 2, 3 рассчитать:
 - собственные частоты $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$,
 - коэффициенты затухания $\beta = \frac{R}{2L}$,
 - резонансные частоты по формуле (9), сравнить результаты измерений с результатами расчета.

Дополнительное задание
(по указанию преподавателя)

По данным измерений для одного из контуров рассчитать при резонансе:

- энергию магнитного поля в контуре,
- энергию электрического поля в контуре,
- количество тепла, выделяемое на сопротивлении R за 1 с.

Методические указания к выполнению части II работы

II. Снятие резонансных кривых

- Собрать схему (рис.2), включить в нее контур № 1.
- Установить на выходе генератора напряжение $E_{эгр}$ (задано на рабочем месте) и поддерживать его постоянным в процессе измерений.
- Установить частоту внешней ЭДС $\Omega_0 = \Omega_{рез}$ и измерить $U_{эгр}$ на конденсаторе.
- Устанавливая $\Omega < \Omega_{рез}$, измерять $U_{эгр}$ при каждом значении частоты (не менее десяти измерений). Результаты занести в табл. 2.
- Сделать измерения п.4 при $\Omega > \Omega_{рез}$.
- Сделать измерения п.п. 2-5 для контуров № 2 и № 3.

Таблица 2

Напряжение на выходе генератора $E_{эгр} =$

№ изм.	Контур № 1			Контур № 2			Контур № 3		
	R=	C=	L=	R=	C=	L=	R=	C=	L=
	$\Omega, \text{Гц}$	$U_{эгр}, \text{В}$	$U_c, \text{В}$	$\Omega, \text{Гц}$	$U_{эгр}, \text{В}$	$U_c, \text{В}$	$\Omega, \text{Гц}$	$U_{эгр}, \text{В}$	$U_c, \text{В}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Таблица 2(продолжение)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
.										
.										
.										
20										

Задание к части II работы

- По данным измерений п.п. 4-6 построить графики $U_m = U_m(\Omega)$ в одной координатной системе.
- Сделать сравнительные характеристики построенных графиков

Дополнительное задание
(по указанию преподавателя)

По данным измерений

- Написать закон изменения тока в цепи.
- Написать частоту, при которой ток в контуре максимален.

Контрольные вопросы

- Какие колебания называются вынужденными?
- В чем заключается явление резонанса в электрическом контуре?
- От каких параметров контура зависит резонансная частота?
- Что называется резонансной кривой контура?

Лабораторная работа 5.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖЕНИЯ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОСЦИЛЛОГРАФА

Цель работы

1. Ознакомление с помощью осциллографа с видом траектории точки, участвующей в двух колебательных движениях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях.
2. Градуировка генератора с помощью фигур Лиссажу.
3. Определение амплитуд и разности фаз двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

Подготовка к работе

Изучите теоретический материал по разделу "Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний" по [1, с. 201-204].

Если материальная точка совершает два независимых друг от друга колебания во взаимно перпендикулярных направлениях

$$x = x_0 \cos \omega_x t, \quad (1)$$

$$y = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi), \quad (2)$$

то результирующее движение точки - движение по некоторой сложной траектории в плоскости x, y , форма которой зависит от амплитуд x_0, y_0 , соотношения частот обоих колебаний ω_x, ω_y , а также разности фаз φ . Траектория заключена в прямоугольнике $-x_0 \leq x \leq x_0, -y_0 \leq y \leq y_0$. При произвольном соотношении частот ω_x и ω_y траектория, вообще говоря, получается незамкнутой. Однако, если частоты ω_x и ω_y соизмеримы, т.е. если они могут быть представлены как отношение двух целых чисел $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m}$, то траектория оказывается замкнутой. (Подумайте: почему и через какое время траектория замкнется сама на себя?).

Самый простой вид траектории получается, когда частоты обоих колебаний одинаковы $\omega_x = \omega_y = \omega$. Для установления вида траектории необходимо из системы уравнений (1) и (2) исключить время t . Это просто сделать, если вспомнить следующие формулы тригонометрии

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi,$$

$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1.$$

После несложных преобразований (сделайте их самостоятельно), получим уравнение траектории:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \frac{x \cdot y}{x_0 y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (3)$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение эллипса, оси которого ориентированы некоторым образом относительно координатных осей x и y . Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят от амплитуд x_0 и y_0 и от разности фаз φ .

Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Разность фаз $\varphi = 0$. Тогда (3) принимает вид

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} \quad (4)$$

- уравнение прямой, проходящей через первый и третий квадранты (рис.1). Точка перемещается по прямой, причем расстояние ее от начала координат, очевидно, равно $\Gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставляя сюда выражения для x и y из (1) и (2), получаем закон, по которому Γ меняется со временем при $\varphi = 0$:

$$\Gamma = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos \omega t. \quad (5)$$

Видно, что результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с циклической частотой ω и амплитудой $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

2. Разность фаз $\varphi = \pm \pi$. В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$\left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0,$$

откуда следует, что результирующее движение представляет собой колебание вдоль прямой

$$\frac{x}{x_0} = -\frac{y}{y_0}, \quad (6)$$

проходящей во втором и четвертом квадрантах (рис.2).

3. Разность фаз $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда уравнение траектории

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

- уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны x_0 и y_0 . При равенстве амплитуд x_0 и y_0 эллипс вырождается в окружность. Случаи $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ отличаются направлением движения по эллипсу (или по окружности). При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ уравнения (1) и (2) имеют вид

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = -y_0 \sin \omega t.$$

Установим направление движения. В момент времени $t = 0$ точка

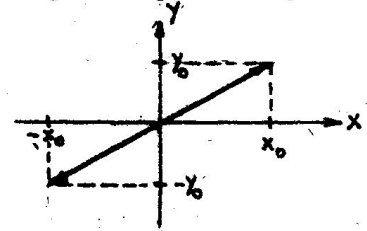


Рис.1

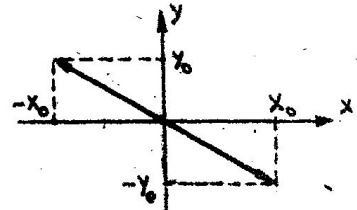


Рис.2

находится в положении I (рис.3). Далее координата x уменьшается, а y становится отрицательной и увеличивается по абсолютному значению. Следовательно, движение происходит по часовой стрелке. При $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ движение происходит против часовой стрелки (покажите это). Из сказанного следует, что равномерное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t, \quad (8)$$

причем знак "+" в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак "-" - движению по часовой стрелке.

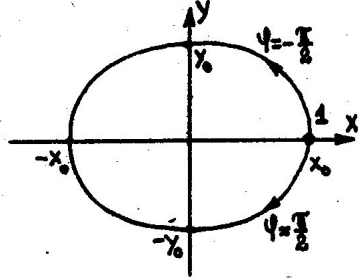


Рис.3

В общем случае, если разность фаз отлична от рассмотренных выше значений, то эллипс может быть ориентирован произвольно относительно осей координат (рис.4). По тем отрезкам, которые он отсекает на осях координат, можно определить разность фаз колебаний. Действительно, y' - координата точки A ($x = 0$) - согласно (3) равняется $y' = y_0 \sin \varphi$, а координата точки B ($y = 0$) рав-

няется $x' = x_0 \sin \varphi$. Таким образом, определив отношение

$$\frac{OA}{y_0} = \frac{AA'}{2y_0} \quad \text{или} \quad \frac{OB}{x_0} = \frac{BB'}{2x_0},$$

можно найти синус разности фаз, а затем и саму разность фаз:

$$\frac{2y'}{2y_0} = \sin \varphi. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь случай близких, но не равных частот. Легко видеть, что если частоты двух взаимно перпендикулярных колебаний слегка различаются, то результирующая траектория может быть описана как траектория при сложении двух колебаний с равными частотами, но с медленно меняющейся во времени разностью фаз. Действительно, если $\omega_y = \omega + \Delta\omega$ (причем $\Delta\omega \ll \omega$), то система уравнений (1) и (2) может быть записана в форме

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = y_0 \cos[\omega t + (\varphi + \Delta\omega t)]$$

и $\varphi + \Delta\omega t$ - медленно меняющаяся во времени разность фаз. При этом картина на экране осциллографа будет медленно трансформироваться, постепенно проходя все описанные выше очертания эллипса, соответствующие различным значениям разности фаз. Только устойчи-

вое, не меняющееся во времени очертание траектории, соответствует совпадению частот колебаний по обеим осям.

Рассмотрим теперь случай кратных частот, т.е. $\omega_y = k \cdot \omega_x$, где $k = 1, 2, \dots$. Например, при $\omega_y = 2\omega_x$ уравнение колебаний имеет вид

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = y_0 \cos(2\omega t + \varphi).$$

Траектории результирующего движения при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ показаны на рис.5 и рис.6.

При других соотношениях частот $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m}$ могут получаться более сложные траектории. В качестве примера на рис.7 показана траектория при $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$.

Эти замкнутые устойчивые кривые называются фигурами Лиссажу. С их помощью, зная частоту одного колебания, можно найти частоту другого. Делается это так. Через фигуру Лиссажу проводят две произвольные взаимно перпендикулярные прямые, параллельные осям координат. Подсчитывая число точек n_x пересечения фигуры с прямой, параллельной оси x и n_y - число пересечения фигуры с прямой, параллельной оси y , определяем соотношение частот

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}. \quad (10)$$

Отсюда при известной частоте ω_y можно найти ω_x (или наоборот). Для случая, изображенного на рис.7, $n_x = 4$, $n_y = 6$ и, следовательно, $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$. В общем случае вид фигуры Лиссажу зависит от соотношения между частотами, фазами и амплитудами колебаний.

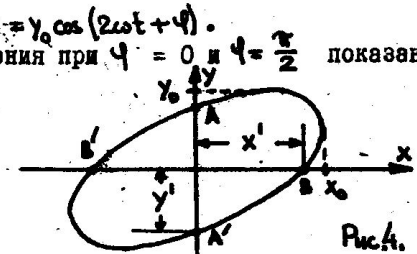


Рис.4

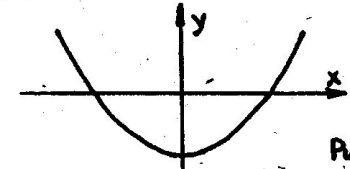


Рис.5

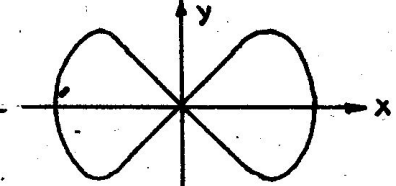


Рис.6

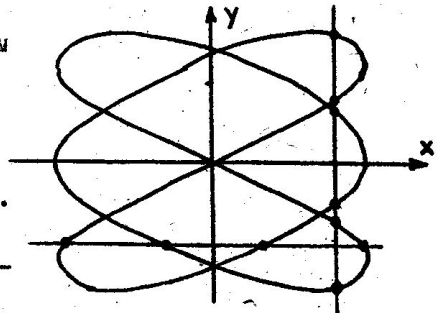


Рис.7

Описание лабораторной установки

В настоящей работе для исследования сложения взаимно перпендикулярных электрических колебаний применяется осциллограф. На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подается напряжение U_y с частотой ν_y , на горизонтально отклоняющие пластины подается напряжение U_x с частотой ν_x . Смещение луча на экране осциллографа по горизонтали и вертикали определяется выражениями

$$x = x_0 \cos \omega_x t, \quad y = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi),$$

где ω_x и ω_y — циклические частоты: $\omega_x = 2\pi\nu_x$ и $\omega_y = 2\pi\nu_y$. Величина x_0 — связывающая смещение луча и напряжение, поданное на пластины, называется чувствительностью: $S_x = \frac{x}{U_x}$ и $S_y = \frac{y}{U_y}$.

Осциллограф предназначен для наблюдения и исследования быстротекущих электрических процессов путем визуального наблюдения и измерения их характеристик. У осциллографа имеются органы управления для регулировки яркости, фокусировки луча, перемещения луча влево-вправо и вверх-вниз.

Примечание. Исследуемый сигнал следует подавать на пластины обязательно через внешние переходные конденсаторы, так как входные клеммы "пластины X" и "пластины Y" находятся под большим постоянным напряжением. В установке эти конденсаторы смонтированы в коробочки кабелей, соединяющих генераторы с осциллографом.

Генераторы низкочастотных сигналов, используемые в работе, предназначены для получения синусоидальных электрических колебаний звуковой и ультразвуковой частоты. Оба генератора позволяют плавно и ступенчато изменять как частоту, так и амплитуду выходного сигнала. В генераторе I шкала частоты не проградуирована (ее градуировка является одной из целей настоящей работы).

В комплект приборов, необходимых для выполнения данной работы, входит также вольтметр, предназначенный для измерения эффективного значения напряжения синусоидальной формы.

Методические указания к выполнению работы

включить приборы и дать им прогреться 15 минут.

I. Определение чувствительности пластин осциллографа по переменному напряжению.

1. Собрать схему для определения чувствительности отклоняющих пластин осциллографа (рис.8). Соединить кабелями выход гене-

ратора 2 с клеммами пластин осциллографа.

2. Вывести на генераторе 2 частоту 100 Гц.

3. Подавать последовательно напряжения по шкале вольтметра 2, 4, 6 и 8 В и для каждого напряжения измерить по координатной сетке L_y . Длина отрезка L_y пропорциональна двойной амплитуде переменного синусоидального напряжения. Поэтому для чувствительности имеем выражение

$$S_y = \frac{L_y}{2U_{y,eff}\sqrt{2}} = \frac{L_y}{2U_{0,y}}, \quad (II)$$

где U_0 — амплитуда синусоидального напряжения, U_{eff} — действующее значение переменного напряжения (его показывает вольтметр, $U_{eff} = U_0/\sqrt{2}$). Для каждого напряжения измерения выполнить три раза, результаты измерений записать в табл. I.

Таблица I

№ измер.	$U_{y,eff}$ В	L_y			L_y мм	S_y мм/В
		1 мм	2 мм	3 мм		
I	2					
2	4					
3	6					
4	8					

4. Собрать схему для определения чувствительности горизонтально отклоняющих пластин.

5. На той же частоте генератора 2 выполнить п.3 для горизонтально отклоняющих пластин. Чувствительность горизонтально отклоняющих пластин

$$S_x = \frac{L_x}{2\sqrt{2} U_{x,eff}} \quad (I2)$$

Результаты измерений занести в табл. 2.

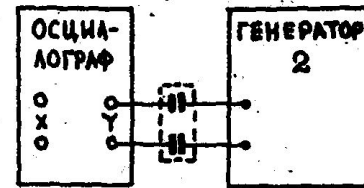


Рис. 8

№ измер.	$U_{X \text{ мВ}}$	L_x			\bar{L}_x	S_x
		1	2	3		
	В	мм	мм	мм	мм	мм/В
1	2					
2	4					
3	6					
4	8					

$$\bar{S}_x =$$

II. Градуировка генератора с помощью фигур Лиссажу.

I. Собрать схему (рис. 9). На пластины Y подать сигнал с генератора 2, на пластины X - с генератора 1.

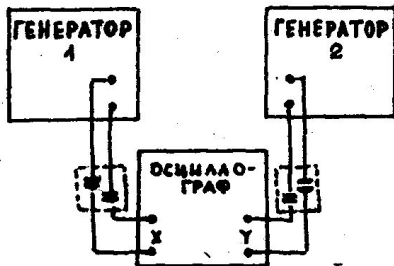


Рис.9

2. Установить на обоих генераторах напряжение 8 В, на генераторе 2 частоту 100 Гц и, вращая лимб генератора 1, получить на экране осциллографа эллипс. Научиться, плавно регулируя частоту генератора 2, останавливать трансформации эллипса при любом его состоянии, т.е. получать любую разность фаз.

3. Вращая лимб генератора 1, получить фигуры Лиссажу, соответствующие соотношениям частот $\nu_x : \nu_y = 1 : 2, 2 : 3, 1 : 1, 3 : 2, 2 : 1, 4 : 1$ (см. формулу (10)). Результаты измерений занести в табл. 3.

Таблица 3

№ измер.	ν_x	ν_y	ν_x Гц	Показания по лимбу генератора 1
I	2	3	4	5
1				
2				

Таблица 3 (продолжение)

I	2	3	4	5
3				
4				
5				
6				

III. Определение разности фаз и амплитуд складываемых колебаний.

I. Выставить на генераторе 2 частоту 100 Гц и амплитуду В В. Вращая лимб генератора 1, добиться появления эллипса. Плавно регулируя частоту генератора 2, добиться устойчивого положения эллипса.

2. Перенести картинку с экрана на кальку.

3. Измерить величины $2y_1, 2y_0$ (см. рис.4).

4. Установить амплитуду сигнала по вертикали равной нулю. На экране осциллографа получится прямая, длина которой $2x_0$ равна длине проекции эллипса на горизонтальную ось. Измерить эту величину.

5. Восстановив прежнюю картинку, установить амплитуду сигнала по горизонтали равной нулю. Измерить длину проекции эллипса на вертикальную ось $2y_0$.

Обработка результатов измерений

1. Рассчитать чувствительность вертикально отклоняющих пластин по формуле (II) и горизонтально отклоняющих пластин по формуле (12) и их погрешности.
2. Построить градуированный график генератора I - зависимость частоты генератора от числа делений по лимбу.
3. Определить φ разность фаз двух складываемых синусоидальных колебаний равной частоты (см. формулу (9)).
4. Вычислить амплитуды напряжений U_{0x} и U_{0y} , приложенных к горизонтальным и вертикальным пластинам осциллографа:

$$U_{0x} = \frac{x_0}{S_x}, \quad U_{0y} = \frac{y_0}{S_y}$$

5. Найти уравнения колебаний, в результате сложения которых был получен данный эллипс. Для этого в формулы

$$u_x = U_{0x} \cos \omega t, \quad u_y = U_{0y} \cos (\omega t + \varphi)$$

подставить полученные значения амплитуд напряжений и разности фаз.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСА В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУНЕ

Контрольные вопросы

- От каких величин зависит форма траектории частицы, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях?
- Каково условие замкнутости траектории?
- Выведите уравнение (3).
- Определите из (3) вид траектории при $\varphi = 0, \pm\pi/2, \pm\pi$.
- В каком случае траектория при совпадении частот ($\omega_x = \omega_y$) вырождается в окружность?
- Что называется фигурой Лиссажу?
- Каким образом по фигуре Лиссажу определить соотношение частот?
- Что называется чувствительностью осциллографа по напряжению и в каких единицах она выражается?
- Нарисуйте траекторию, получающуюся при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одной частоты в следующих случаях:
 - $u_{0x} = u_{0y}$, $\varphi = \pi/2$;
 - $u_{0x} = 2u_{0y}$, $\varphi = -\pi/2$;
 - $u_{0x} = u_{0y}/2$, $\varphi = \pi$;
 - $u_{0x} = 0$, $u_{0y} \neq 0$.
- Что происходит с фигурой Лиссажу при уменьшении амплитуды одного из складываемых взаимно перпендикулярных колебаний?
- В настоящей работе с помощью осциллографа исследуется сложение электрических колебаний. Не могли бы Вы предложить схему опыта, в котором исследуется сложение механических колебаний?

Цель работы

- Определение собственных частот колебаний струны.
- Снятие резонансной кривой, т. е. зависимости амплитуд вынужденных колебаний точек струны от частоты вынуждающей силы.

Подготовка к работе

Изучите теоретический материал по [2, с.274-279, 289-292] или [3, с.319-321, 326-331].

Волной называется процесс распространения колебаний в пространстве. В случае механических волн колебательное движение совершают частицы среды, в которой распространяется волна. Особое значение придется изучению гармонических волн, т.е. таких, в которых колеблющаяся величина зависит от времени t и координаты x по закону синуса или косинуса.

Пусть точки среды, которые являются источником волн, колеблются с частотой $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ (T - период колебаний):

$$\xi(t) = A \sin \omega t, \quad (1)$$

где A - амплитуда колебаний (наибольшее смещение частиц среды от положения равновесия). Тогда частицы среды, расположенные на расстоянии x от источника в направлении распространения волны, колеблются по такому же закону, но с запаздыванием $t = x/v$ во времени (v - фазовая скорость волны), т.е.

$$\xi(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin (\omega t - kx), \quad (2)$$

где $k = \omega/v$ - волновое число. Уравнение (2), описывающее зависимость смещения частиц среды ξ из положения равновесия от времени и координат, называется уравнением бегущей волны. Здесь

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \omega t - kx \quad (3)$$

- фаза волны. Разность фаз в двух точках среды с координатами x_1 и x_2 равна

$$\Delta\varphi = \varphi(x_2, t) - \varphi(x_1, t) = \frac{\omega}{v}(x_2 - x_1) = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}, \quad (4)$$

где $\lambda = vT$ - длина волны. Длина волны равна расстоянию, проходимому волной за один период. В точках, расстояние между которыми $\Delta x = \lambda$, разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi$. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется поверхностью постоянной

фазы или волновой поверхностью. У волны, описываемой уравнением (2), волновая поверхность — плоскость, т.е. (2) — уравнение плоской бегущей волны. Волновые поверхности перемещаются со скоростью v .

Если смещение частиц среды происходит вдоль направления распространения волны, то волна называется продольной, если перпендикулярно, то — поперечной. Упругая волна, возникающая в натянутой металлической струне, является поперечной и плоской.

Основное свойство бегущих волн, независимо от их природы, заключается в переносе энергии и импульса волной без переноса вещества. При распространении упругих волн среда обладает кинетической энергией колебательного движения ее частиц и потенциальной энергией, обусловленной деформацией. Для гармонических волн скорость передачи энергии равна фазовой скорости v волн. Скорость распространения волны в струне

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{F}{\rho l}}, \quad (5)$$

где F — сила натяжения струны, ρ — плотность материала струны, S — площадь поперечного сечения, ρl — линейная плотность струны, т.е. масса единицы длины.

При распространении упругой волны частицы среды движутся с колебательными скоростями $\dot{\xi} = \partial \xi / \partial t$, в среде возникают относительные деформации $\epsilon = \partial \xi / \partial z$. Уравнения для этих величин нетрудно получить из уравнения (2).

Если в некоторый момент времени вывести струну из положения равновесия, то в ней возникнут свободные колебания, распространяющиеся в виде волн, бегущих к концам струны, и волн, отраженных от этих концов. Интерферируя в каждой точке, эти волны образуют стоячую волну (рис.1). В самом простом случае уравнение этой волны имеет вид

$$\xi(z, t) = A \sin \omega(t - \frac{z}{v}) + A \sin[\omega(t + \frac{z}{v}) + \pi] = 2A \sin \frac{\omega z}{v} \cos \omega t. \quad (6)$$

Как следует из этого выражения, амплитуда стоячей волны

$$A_{ст}(z) = 2A \left| \sin \frac{\omega z}{v} \right| = 2A \left| \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \right| \quad (7)$$

является периодической функцией координаты в отличие от амплитуды бегущей волны. Точки с максимальной амплитудой называются пучностями, с равной нулю — узлами. Точки струны, находящиеся между двумя узлами, колеблются в одинаковой фазе. При переходе через узел фаза скачком меняется на π . Частоты стоячих волн, возникающих при свободных колебаниях в ограниченных в пространстве системах (волноводы, резонаторы, закрепленная на концах струна и т.д.),

принимают дискретные значения. Эти значения называются собственными частотами. Если струна закреплена на двух концах, то на ней должно укладываться целое число полуволн (рис.1):

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Отсюда находим набор собственных частот, называемый спектром

$$\omega = n \frac{\pi v}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

В отличие от бегущей волн стоячая волна не переносит энергии. В ней дважды за период происходит превращение энергии то полностью в потенциальную, сосредоточенную в основном вблизи узлов, где находятся пучности деформации, то полностью в кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей смещений (там же находятся и пучности колебательной скорости). В результате происходит переход энергии от узлов к соседним с ними пучностям и обратно. Средний за период поток энергии в любом сечении струны равен нулю. При свободных колебаниях происходит рассеяние энергии и стоячая волна затухает.

При вынужденных колебаниях, когда на струну действует внешняя гармоническая сила, колебания струны происходят с частотой этой силы. При этом имеет место явление резонанса. Резонансом называется резкое увеличение амплитуды колебаний при приближении частоты внешнего воздействия к некоторой резонансной частоте, зависящей от параметров колебательной системы (рис.2). Резонансной называется частота внешнего воздействия, при которой амплитуда колебаний максимальна. У струны резонансные частоты практически совпадают с собственными частотами.

$\Omega_{res} = \omega. \quad (10)$
Частота $\Omega_{res,1} = \pi v / l$ называется основным тоном, а частоты, соответствующие $n = 2, 3, 4, \dots$, называются обертонами.

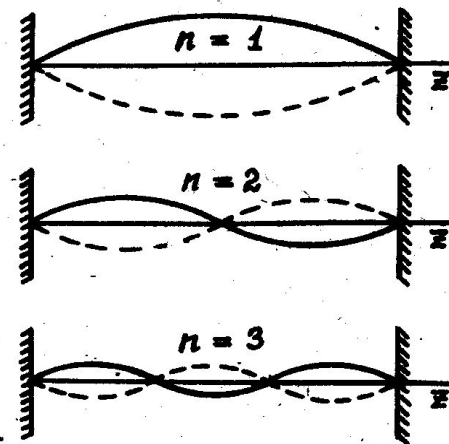


Рис. 1

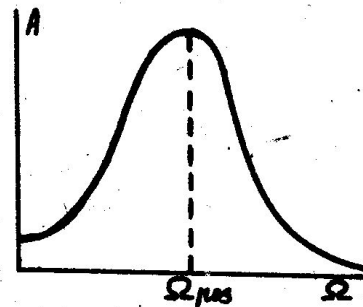


Рис. 2

Б. Снятие резонансной кривой

Исследовать зависимость напряжения $U_{эфф}$ на измерительной катушке от частоты ν колебаний струны. Измерения провести в интервале от $0,5\nu_{рез}$ до $1,5\nu_{рез}$. При этом удобно измерения начать с частоты $\nu_{рез}$, уменьшая постепенно частоту до $0,5\nu_{рез}$; затем, установив снова $\nu_{рез}$, увеличивать частоту до $1,5\nu_{рез}$. Следует учесть, что резонансный пик является узким. Поэтому в окрестности $\nu_{рез}$ следует изменять частоту так, чтобы напряжение $U_{эфф}$ уменьшалось на 5-10% при очередном изменении частоты.

Частоту изменять с помощью генератора, а измерять частотометром. Напряжение $U_{эфф}$ измерять милливольтметром. Напряжение генератора поддерживать постоянным.

Результаты измерений записать в табл. 2.

Таблица 2

№ измер.	1	2	3	...
ν , Гц				
$U_{эфф}$, В				
$U_{эфф}/U_{рез}$				

Обработка результатов измерений

1. Вычислить средние значения собственных частот струны $\nu_{рез}$. Проверить выполнение соотношения $\nu_{рез2} = n\nu_{рез1}$, вычислив $\nu_{рез2}/\nu_{рез1}$.
2. Задав доверительную вероятность α , вычислить абсолютную и относительную погрешности измерений собственных частот.
3. Считая, что напряжение $U_{эфф}$ пропорционально амплитуде колебаний струны A , т. е. $A/A_{рез} = U_{эфф}/U_{рез}$, построить графики зависимости амплитуды колебаний струны $A/A_{рез} = f(\nu)$.
4. Найти скорость распространения упругой волны в струне с помощью формулы (9).
5. Найти силу натяжения струны с помощью формулы (5).

Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение бегущей волны и объясните смысл входящих в него величин.
2. Как образуется стоячая волна? Напишите уравнение стоячей волны, укажите в нем амплитуду.

3. Что можно сказать о переносе энергии бегущей и стоячей волнами?
4. Что такое пучности и узлы? Какая энергия периодически накапливается в окрестностях узла и какая в окрестностях пучности?
5. Что такое собственные частоты струны? Как связана длина струны с длинами волн ее собственных колебаний?
6. Что такое резонанс?
7. Как связаны собственные и резонансные частоты струны?

Лабораторная работа 5.6

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В НАТЯНУТОМ ШНУРЕ

Цель работы

1. Исследование стоячих волн в горизонтальном натянутом шнуре.
2. Измерение частоты источника методом стоячих волн.

Подготовка к работе

Теоретический материал изложен в разделе "Подготовка к работе" лаб. работы 5.5. Все основные закономерности, справедливые для закрепленной на концах струны, сохраняются и для натянутого шнура.

Особенность здесь состоит в том, что источник колебаний расположен в начале шнура. Начало шнура (точка $x = 0$) приводится в гармоническое колебание. От источника распространяется бегущая волна, доходящая за время $t = x/v$ до точки с координатой x . Уравнение этой волны имеет вид

$$\xi_1(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (1)$$

Отразившаяся от противоположного конца шнура (точка $x = l$) волна приходит в точку с координатой x через время $(2l - x)/v$ после начала колебаний. Учитывая также, что при отражении от более плотной среды волна приобретает скачок фазы, равный π , получаем уравнение отраженной волны

$$\xi_2(x, t) = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{2l - x}{v} \right) + \pi \right] = -A \sin \omega \left(t - \frac{2l - x}{v} \right). \quad (2)$$

В результате суперпозиции падающей и отраженной волн образуется стоячая волна

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = 2A \sin \omega \frac{l - x}{v} \cos \omega \left(t - \frac{l}{v} \right). \quad (3)$$

Амплитуда стоячей волны

$$A_{ст}(x) = 2A \left| \sin \omega \frac{l - x}{v} \right|. \quad (4)$$

Описание лабораторной установки

Схема лабораторной установки показана на рис. I. Горизонтальный шнур \mathcal{M} длиной l одним концом прикреплен к камертону K . Другим - в пружине Π . Сила натяжения шнура F зависит от растяжения пружины x

$$F = Kx, \quad (5)$$

где K - коэффициент упругости пружины. В установке имеется возможность изменять растяжение x , а, следовательно, и скорость распространения v волн в шнуре и частоты ν собственных колебаний шнура

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho_e}} = \sqrt{\frac{Kx}{m}}, \quad (6)$$

$$\nu = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{Kx}{m}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где $\rho_e = m/l$ - линейная плотность шнура, m - его масса.

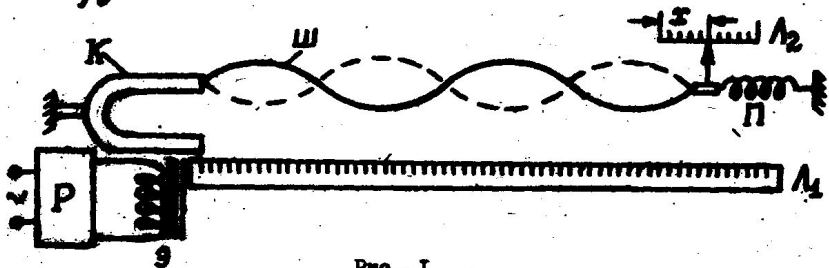


Рис. I

Камертон K , являющийся источником волн, приводится в движение с помощью электромагнита 9 . Переменное магнитное поле электромагнита приводит к периодическому намагничиванию камертона. При этом на обращенной к электромагниту стороне камертона возникает полюс, противоположный ближайшему полюсу электромагнита. Дважды за период изменения поля камертон притягивается к электромагниту. Таким образом, частота колебаний камертона и, соответственно, шнура, равна удвоенной частоте тока электромагнита. Поле электромагнита регулируется с помощью регулятора напряжения P .

Частота тока, а, следовательно, и частота внешнего воздействия на колебательную систему (шнур) в ходе опыта остается постоянной. В то же время, изменяя силу натяжения шнура, мы получаем каждый раз новую колебательную систему со своим спектром собственных частот (?). Если при каком-то определенном натяжении x одна из собственных частот (основной тон или обертоны) совпадает с час-

тотой внешнего воздействия, то возникает резонанс и устанавливаются стоячие волны с относительно большой амплитудой. При этом на длине l шнура укладывается целое число n полуволн с отчетливо чередующимися пучностями и узлами.

Методические указания к выполнению работы

1. Получить у лаборанта линейку для измерения амплитуды стоячей волны.
2. Записать численные значения массы шнура m , коэффициента упругости пружины K и погрешностей этих величин.
3. Определить по линейке L_1 длину шнура l .
4. Установить указанное на рабочем месте значение напряжения на регуляторе напряжения P .
5. Изменяя натяжение шнура с помощью пружины Π , установить максимальную амплитуду колебаний точек шнура для случая, когда на шнуре укладывается заданное число n полуволн, $n = 1, 2, 3, 4$.
6. При каждом значении n измерить по 5 раз растяжение пружины x и удвоенную амплитуду $2A_n$ стоячей волны в пучностях, заново устанавливая максимальную амплитуду при каждом измерении. Результаты занести в таблицу.

Таблица 1

№ п.п.	№ измер. величина	F номер					Средн. знач.	Абс. погр.	v м/с	ν Гц
		1	2	3	4	5				
1	x, мм									
	2A _n , мм									
2	x, мм									
	2A _n , мм									
3	x, мм									
	2A _n , мм									
4	x, мм									
	2A _n , мм									

Обработка результатов измерений

1. Рассчитать средние значения растяжения пружины x и амплитуды стоячей волны $A_n = 2A$ в пучностях. Задать доверительную вероятность α , определить их погрешности.

2. Найти скорость распространения v волн в шнуре по формуле (6) для различных натяжений шнура, соответствующих указанным в таблице значениям n .
3. Вывести формулу погрешности косвенного измерения для скорости v и рассчитать эту погрешность для одного из значений n (по указанию преподавателя).
4. Рассчитать частоту колебаний ν источника волн по формуле (7) при различных натяжениях шнура (т.е. при каждом значении n). С помощью второй методики расчета погрешности (см. [5]) найти погрешность измерения частоты.
5. Написать уравнение стоячей волны (3) для одного из значений n (по указанию преподавателя).
6. Для этого же значения n написать уравнение волны, бегущей от источника по шнуру, а также уравнения колебательной скорости $\frac{d\xi}{dt}$ и относительной деформации ϵ для бегущей и стоячей волн.

Контрольные вопросы

См. описание лабораторной работы 5.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. - М.: Наука, 1986.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. - М.: Наука, 1988.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. - М.: Высш. шк., 1989.
4. Методические указания к проведению и обработке результатов физического эксперимента/ Р.М.Пилосян; ЛЭИС. - Л., 1988.
5. Электро- и радиоизмерительные приборы в учебной физической лаборатории: Методические указания к лабораторным работам по физике/ Ю.Б.Вьморков, Н.В.Егоров, В.М.Жуков, Р.М.Пилосян; ЛЭИС. - Л., 1979. - Разд. Математическая обработка результатов физических измерений.
6. Методические указания к лабораторным работам по разделу "Колебания и волны"/ Л.А.Постникова, С.Ф.Скирко, Д.Б.Вьморков, Р.М.Пилосян; ЛЭИС. - Л., 1979.

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа 5.1. Затухающие механические колебания	3
Лабораторная работа 5.2. Исследование свободных электрических затухающих колебаний	9
Лабораторная работа 5.3. Исследование вынужденных электрических колебаний в последовательном контуре	15
Лабораторная работа 5.4. Исследование сложения взаимно перпендикулярных колебаний с помощью осциллографа	20
Лабораторная работа 5.5. Исследование резонанса в металлической струне	29
Лабораторная работа 5.6. Стоячие волны в натянутом шнуре .	35
ЛИТЕРАТУРА	38