ЛЕКЦИЯ 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1 Распределение Максвелла молекул по скоростям

Принцип детального равновесия

- При статистическом описании равновесных состояний широко используется **принцип детального равновесия:** любой микроскопический процесс в равновесной макроскопической системе протекает с той же скоростью, что и обратный ему процесс

Функции распределения молекул

- В статистической физике важное значение имеет установление вида **функции распределения молекул** по какому-либо параметру: энергии, скорости, импульсу и т.д.

- Например, функция распределения молекул по скоростям $f(v)$ определяет вероятность $dP(\text{v})$ того, что скорость молекулы находится в интервале от v до $v + dv$:

$$dP(v) = f(v)dv$$

Плотность вероятности

- Функция $f(v)$ называется также **плотностью вероятности**, поскольку

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv}$$

Среднее значение физической величины

- Зная функцию распределения молекул *f(x)* по параметру *x*, можно найти среднее значение физической величины ϕ, зависящей от *x*:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$$

где (*a*, *b*) – интервал возможных значений величины *x*

Нормировка функции распределения

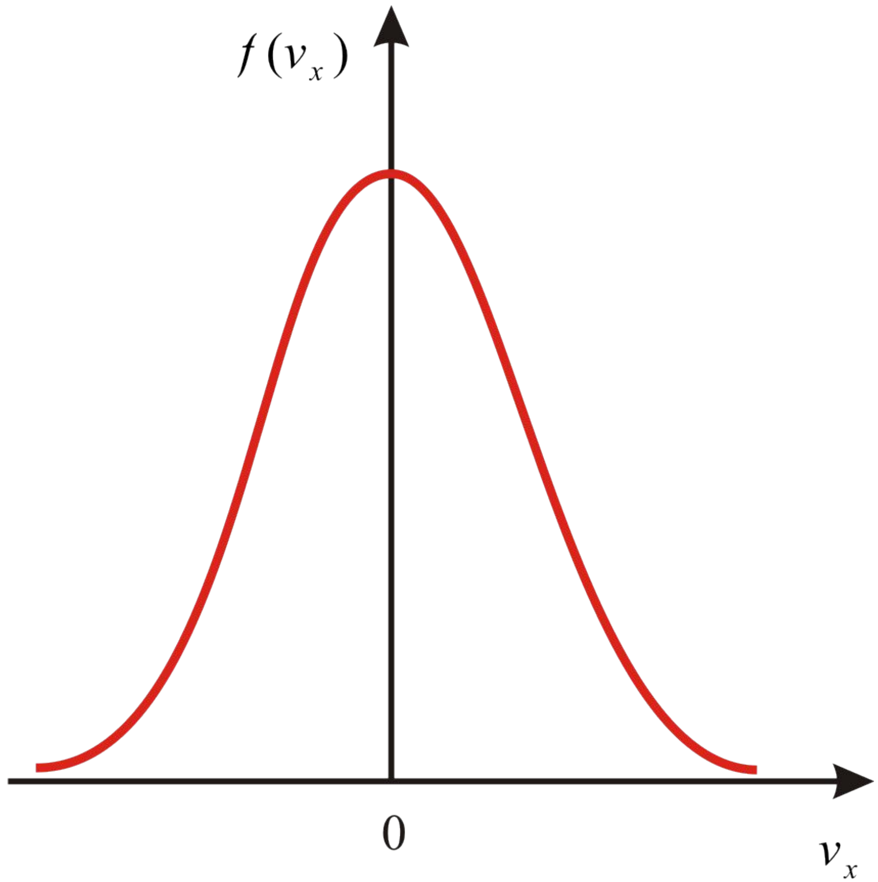
- Считается, что для функции распределения *f(x)* выполняется **условие нормировки:**

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Распределение молекул по проекциям скорости

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right)$$

Аналогичные функции распределения получаются и для двух других компонент скорости v_y и v_z



Функция распределения $f(v_x, v_y, v_z)$

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(v_x) f(v_y) f(v_z) =$$

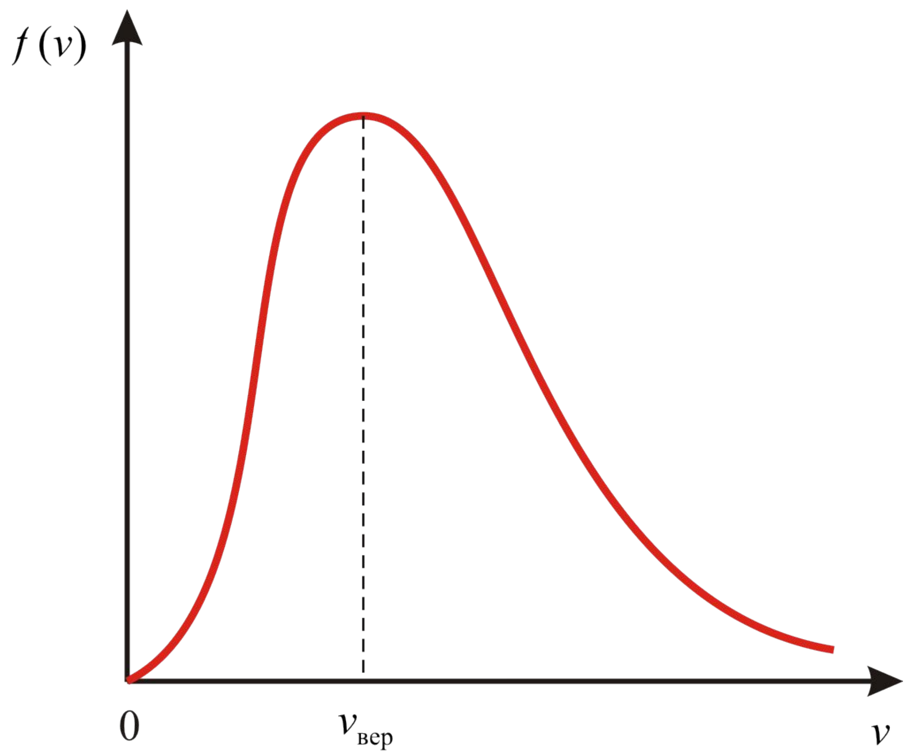
$$= \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) =$$

$$= \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)$$

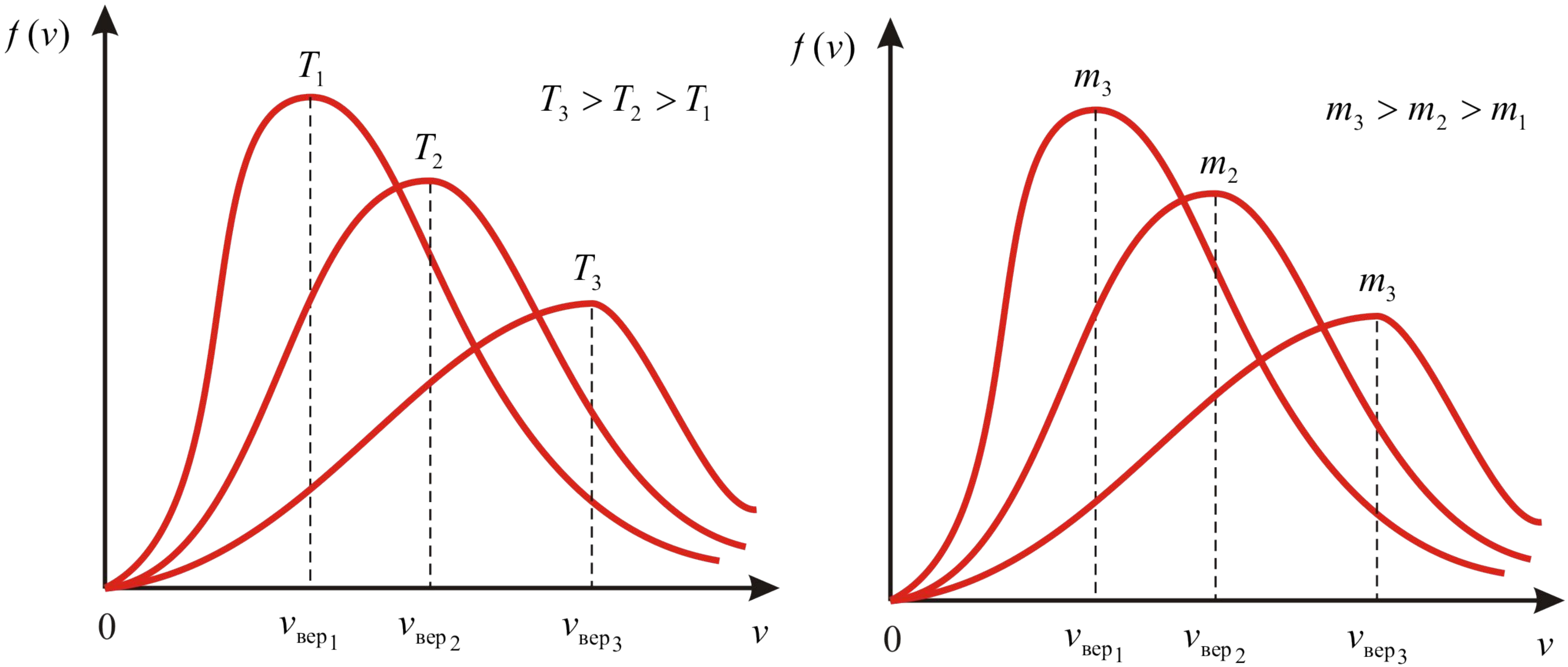
Распределение молекул по абсолютным значениям скорости

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)$$

Функция распределения *f(v)* имеет максимум, соответствующий наиболее вероятной скорости молекул $v_{\text{вер}}$ и существенным образом зависит от массы молекул и температуры газа



Зависимость функции распределения Максвелла от температуры газа и массы его молекул



При этом площадь под кривой функции распределения Максвелла остается неизменной и численно равной 1 (согласно условию нормировки функции распределения)

Характерные скорости молекул: наиболее вероятная скорость

$$f(v_{\text{вер}}) = f_{\max} \Leftrightarrow \left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v=v_{\text{вер}}} = 0$$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Характерные скорости молекул: средняя скорость

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v)\,dv$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

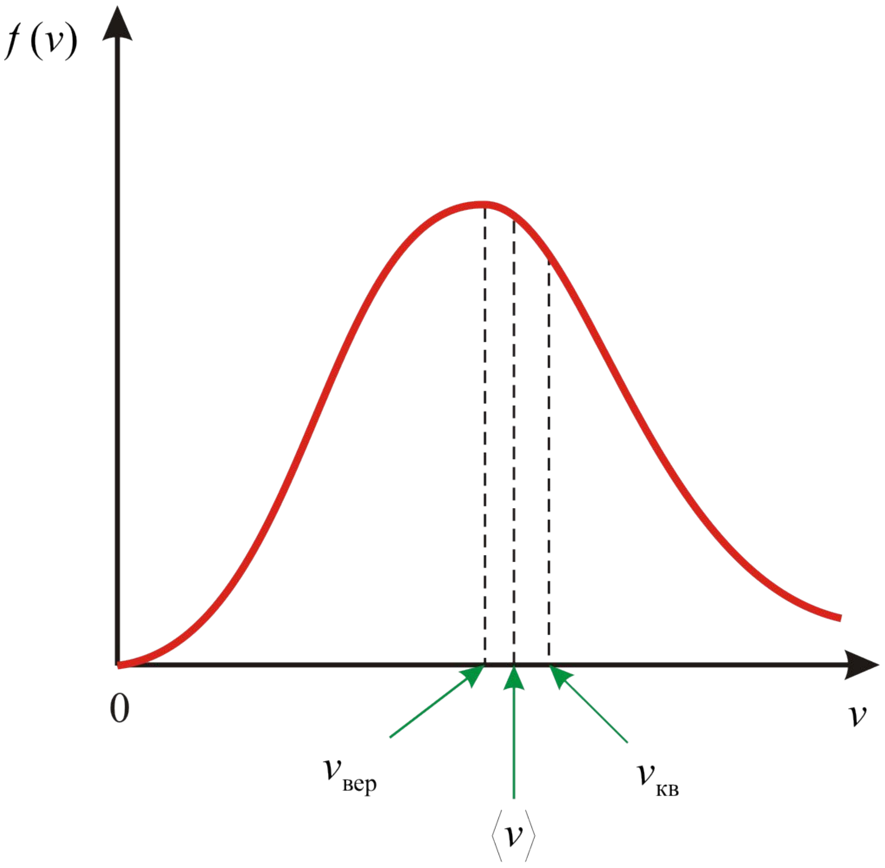
Характерные скорости молекул: средняя квадратичная скорость

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv}$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Сопоставление значений скоростей

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : v_{\text{кв}} = 1 : 1{,}13 : 1{,}22$$



Распределение молекул по величинам безразмерной скорости

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}$$

$$dP = f(v)dv = f(v)\frac{dv}{du}du = f(u)du$$

$$f(u) = f(v)\frac{dv}{du} = f(uv_{\text{вер}})v_{\text{вер}}$$

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2 e^{-u^2}$$

Распределение молекул по значениям импульса

$$p = m_0 v$$

$$dP = f(v)dv = f(v)\frac{dv}{dp}dp = f(p)dp$$

$$f(p) = f(v)\frac{dv}{dp} = \frac{f\left(\dfrac{p}{m_0}\right)}{m_0}$$

$$f(p) = \frac{4\pi}{\left(2\pi m_0 kT\right)^{3/2}} p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2m_0 kT}\right)$$

Распределение молекул по значениям кинетической энергии поступательного движения

$$\varepsilon_{\text{пост}} = \frac{m_0 v^2}{2}$$

$$dP = f(v)dv = f(v)\frac{dv}{d\varepsilon_{\text{пост}}}d\varepsilon_{\text{пост}} = f(\varepsilon_{\text{пост}})d\varepsilon_{\text{пост}}$$

$$f(\varepsilon_{\text{пост}}) = f(v)\frac{dv}{d\varepsilon_{\text{пост}}} = f\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_{\text{пост}}}{m_0}}\right)m_0 v = f\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_{\text{пост}}}{m_0}}\right)\sqrt{2\varepsilon_{\text{пост}}m_0}$$

$$f(\varepsilon_{\text{пост}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\sqrt{\varepsilon_{\text{пост}}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{пост}}}{kT}\right)$$

ЛЕКЦИЯ 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.2 Распределение Больцмана

Распределение Больцмана

- Если термодинамическая система, находящаяся в равновесном состоянии, помещена в силовой поле, то распределение молекул в пространстве описывается **распределением Больцмана:**

$$n(x,y,z) = n_0 \exp\left[-\frac{\Pi(x,y,z)}{kT}\right]$$

- Здесь $n(x, y, z)$ – концентрация (плотность молекул в точке с координатами x, y, z; Π – потенциальная энергия молекулы в этой точке; n_0 – концентрация молекул в том месте, где потенциальная энергия молекулы минимальна (равна нулю)

Распределение Больцмана

- Число молекул, находящихся в пределах бесконечно малого объема $dV = dxdydz$, расположенного в окрестности точки с координатами x, y, z, определяется выражением

$$dN(x,y,z) = n_0 \exp\left[-\frac{\Pi(x,y,z)}{kT}\right] dxdydz$$

ЛЕКЦИЯ 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.3 Барометрическая формула

Барометрическая формула

- Из распределения Больцмана следует **барометрическая формула**, описывающая изменение давления атмосферного воздуха с высотой h:

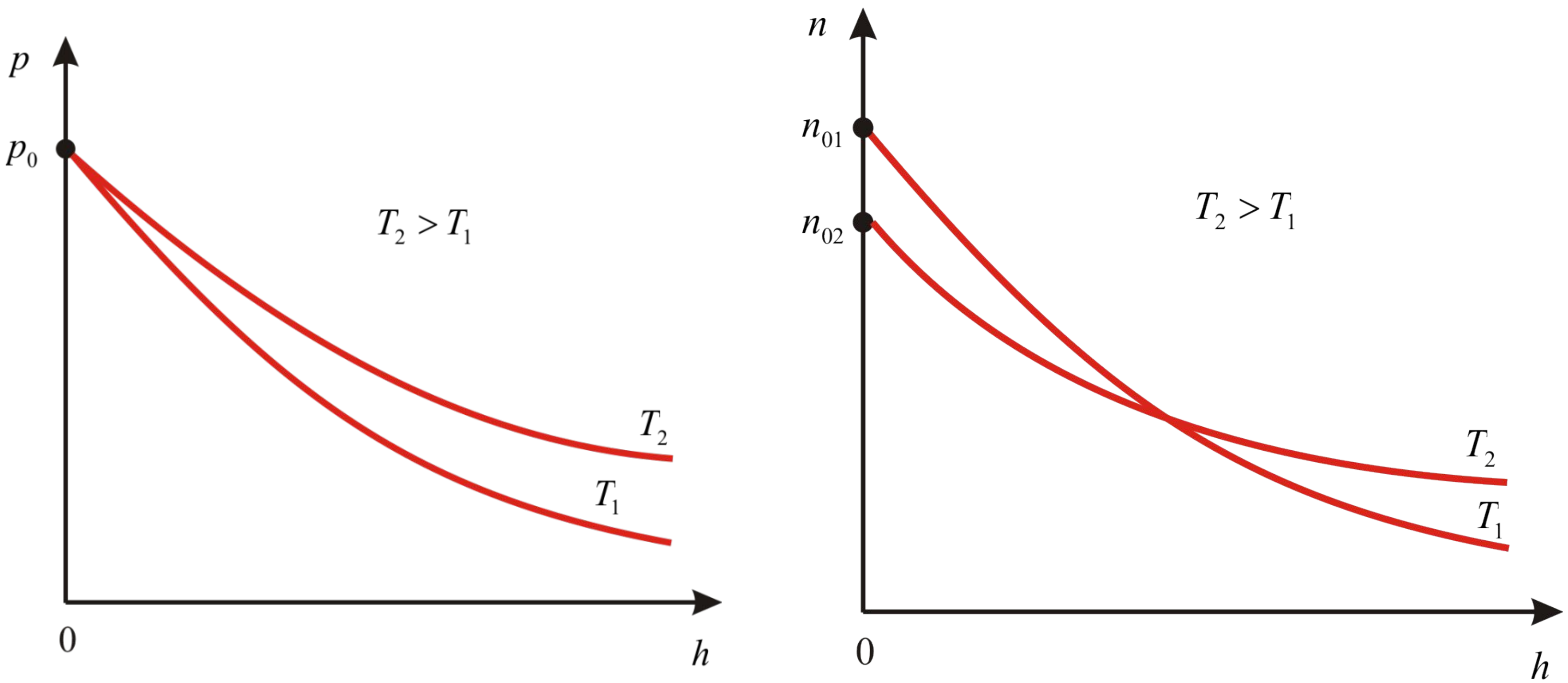
$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$$

- Здесь p_0 – давление у поверхности Земли, M – молярная масса воздуха, g – ускорение свободного падения.

Предположения, при которых получена барометрическая формула:

- Воздух является идеальным газом, т.е. для него выполняется уравнение Менделеева – Клапейрона.
- Температура воздуха всюду одинакова (атмосфера изотермическая).
- $g = \text{const}$, что справедливо для высот, много меньших радиуса Земли.

Зависимость давления и концентрации молекул атмосферного воздуха от высоты



ЛЕКЦИЯ 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.4 Распределение Максвелла – Больцмана

Распределение Максвелла – Больцмана

- Распределение Максвелла и распределение Больцмана можно объединить в одно обобщенное **распределение Макселла – Больцмана.**

- Это распределение позволяет найти число молекул dN, проекции скоростей которых принадлежат интервалам (v_x, v_x+dv_x), (v_y, v_y+dv_y), (v_z, v_z+dv_z) и координаты которых принадлежат области $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$, $(z, z+dz)$

Распределение Максвелла – Больцмана

$$dN = A\exp\left(-\frac{\frac{m_0 v^2}{2}+\Pi}{kT}\right)dv_x dv_y dv_z dxdydz$$

$$A = n_0\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad v = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$