



# **Синтез КИХ фильтров методом окон**

# Определение метода

Идеальная АЧХ:

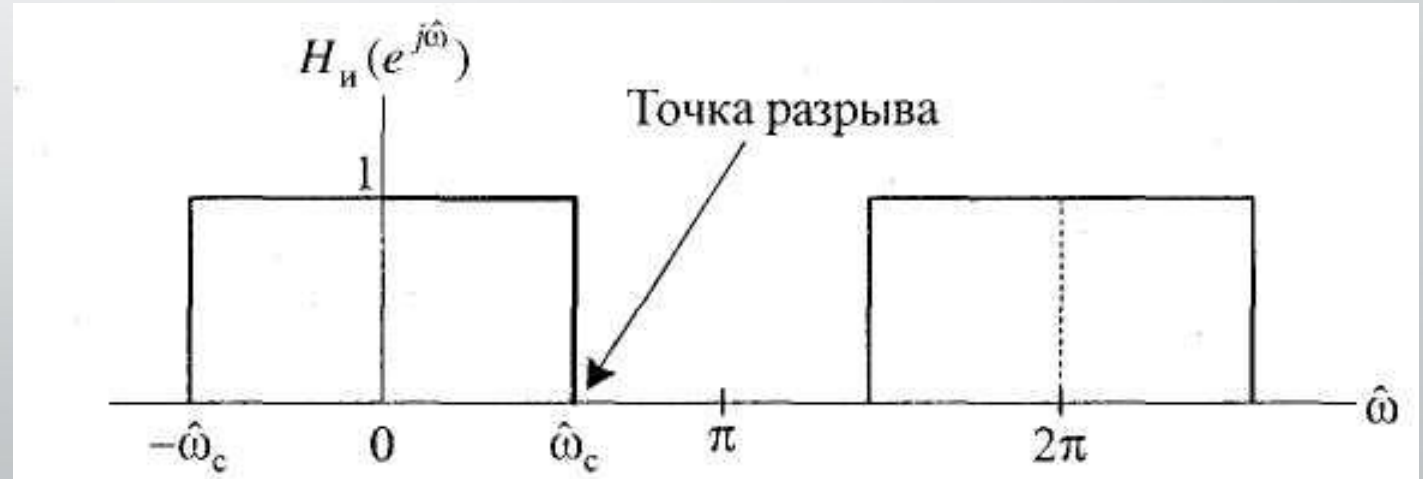
$$A_{\text{н}}(\hat{\omega}) = H_{\text{н}}(e^{j\hat{\omega}}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_c; \\ 0, & \text{при других } \hat{\omega}, \end{cases}$$

Периодическая функция:

$$H_{\text{н}}(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\text{н}}(n) e^{-j\omega T n}$$

$$h_{\text{н}}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H_{\text{н}}(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega.$$

Идеальная  
периодическая АЧХ  
фильтра НЧ



# Определение метода

Процедура усечения ряда  $H_n$  :

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Реальная импульсная характеристика  $h(n)$  КИХ-фильтра:

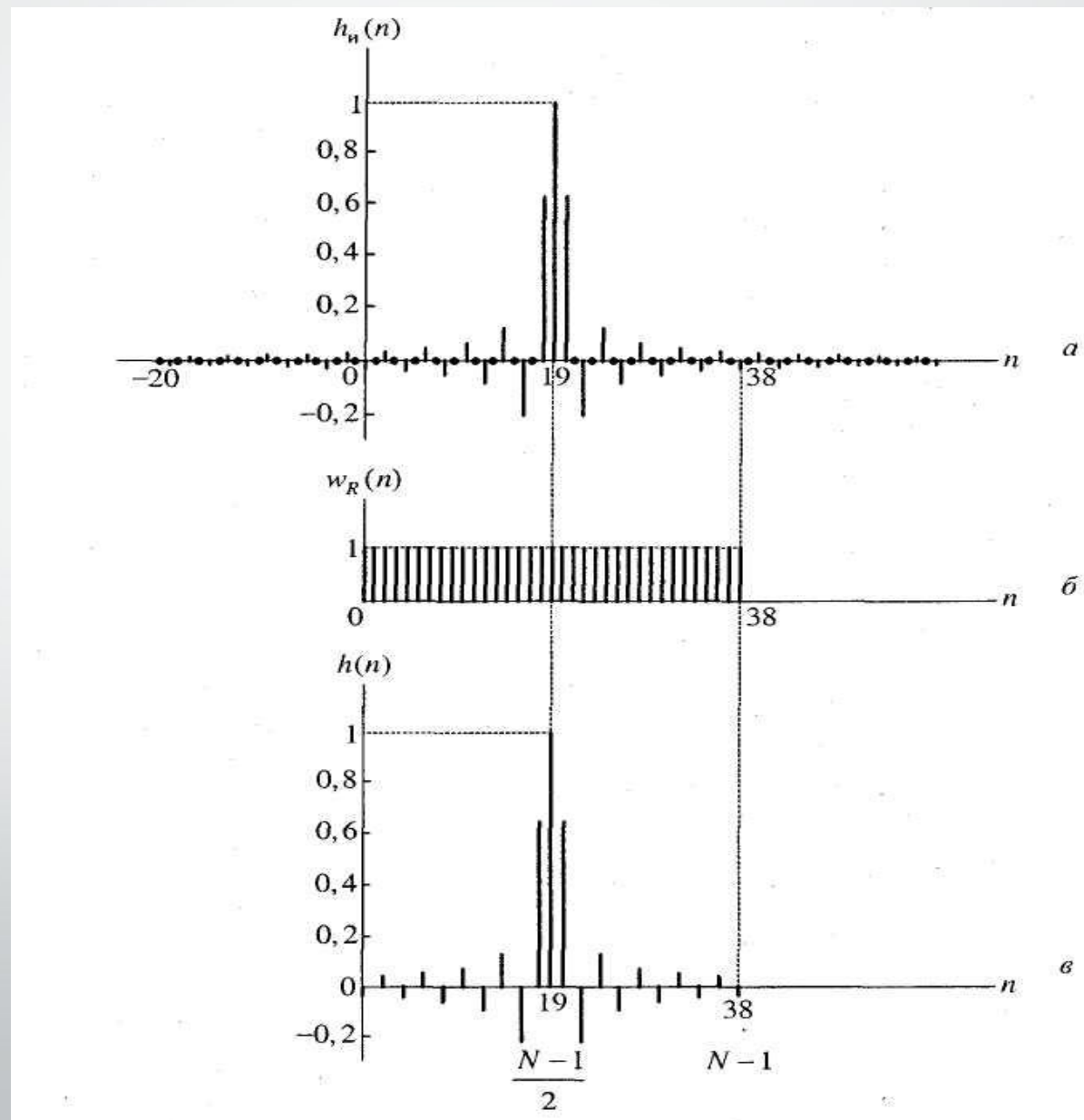
$$h(n) = w_R(n) h_n(n),$$

Реальная частотная характеристика

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega T n}$$

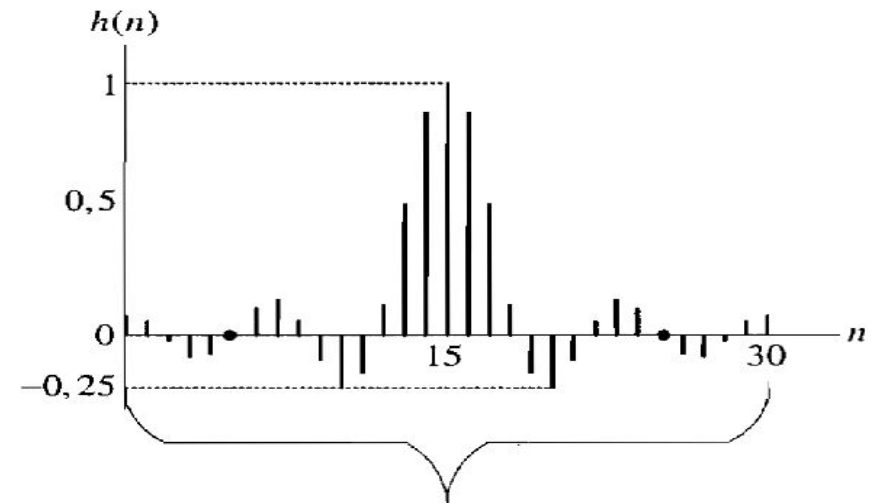
# Определение метода

Процедура усечения ИХ

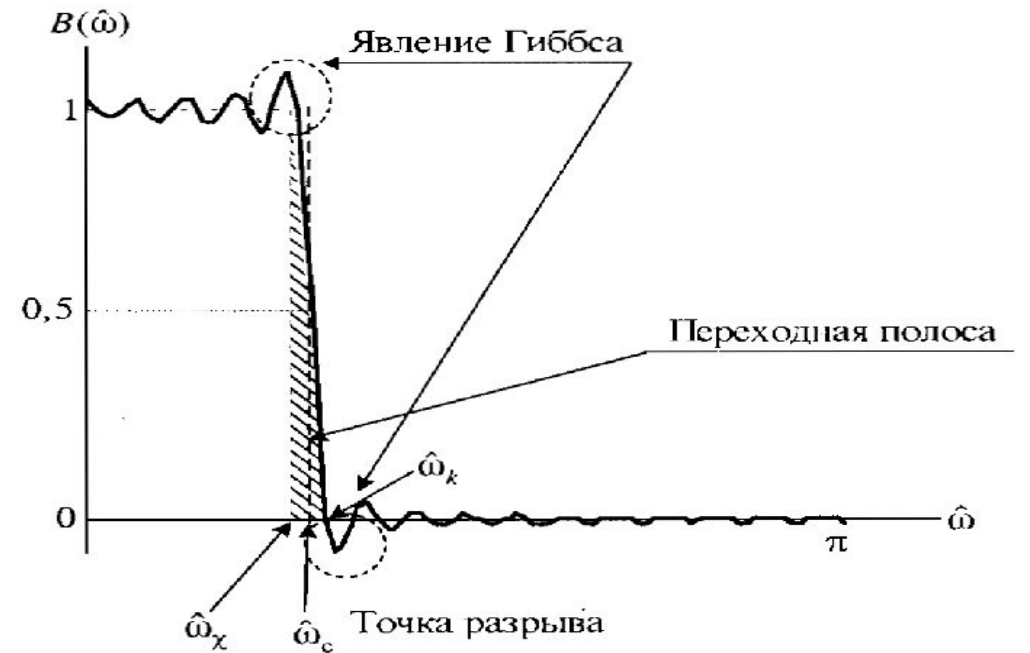


# Явление Гиббса

Использование ряда Фурье приводит к существенным искажениям, которые называют «явление Гиббса». Искажения обусловлены характером сходимости ряда Фурье в точке разрыва первого рода, каковой и является точка  $\hat{\omega}_c$



Длина импульсной характеристики  $N = 31$  а



# Ядро Дирихле

Частотная характеристика функции  $w_R$ :

$$w_R(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\hat{\omega}/2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)} - \text{называется ядром Дирехле}$$

Если не учитывать множитель, характеризующий реальный фазовый сдвиг и взять модуль данной функции, то:

$$|\hat{w}_R(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)} \right|, \text{ эта функция имеет вид быстро затухающих}$$

колебаний с максимальным значением  $N$  на частоте  $\hat{\omega} = 0$ .

Заштрихованная область с максимальной амплитудой называется главным лепестком, а остальные области – боковыми лепестками. Ширина главного лепестка равна ширине переходной полосы АЧХ фильтра.

# Ядро Дирихле

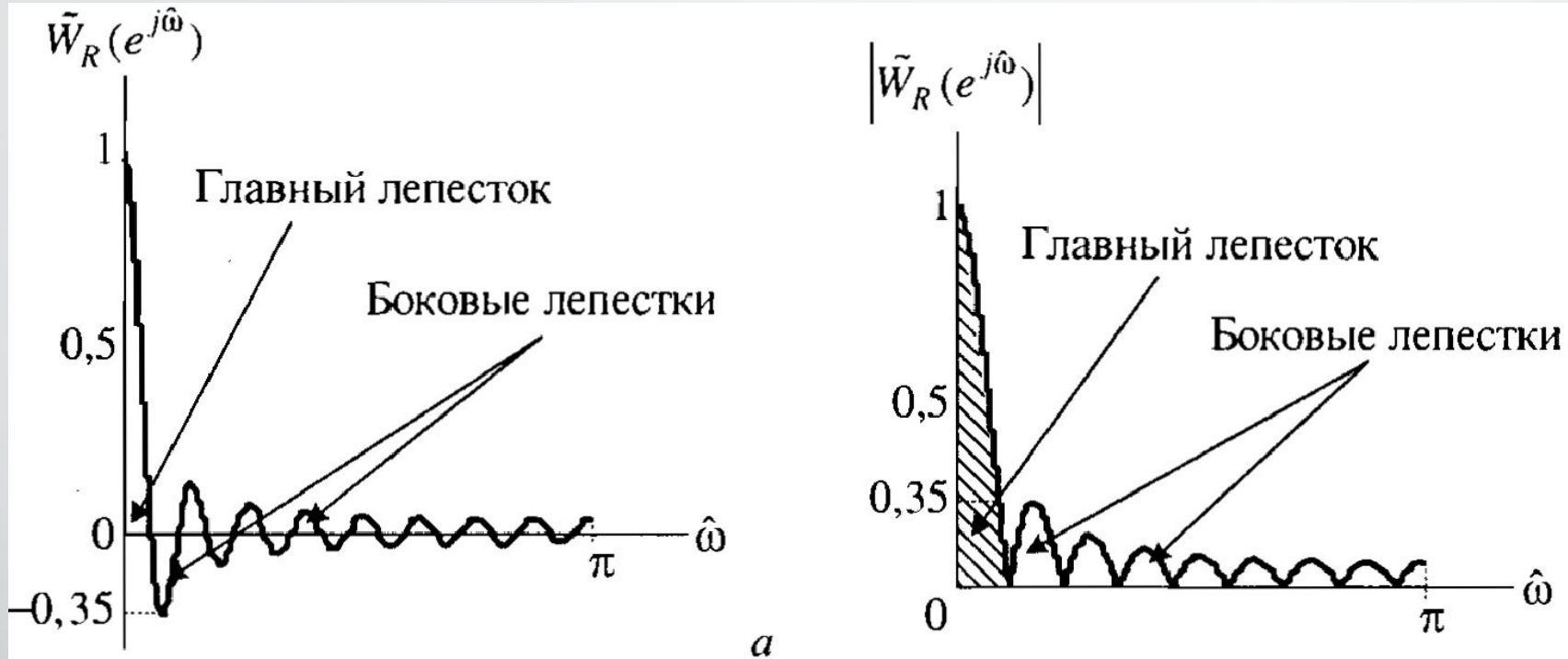


Рис. 19.4. График функции (19.9) при  $N = 31$  (а) и ее модуль (б)

Ширина всех лепестков, включая главный, одинакова и составляет:

$$\Delta\hat{\omega} = \frac{2\pi}{N}$$



# Метод окон

Управлять сходимостью ряда Фурье можно с помощью весовой последовательности конечной длины  $w(n)$ , называемой окном или весовой функцией. Метод состоит в том, что коэффициенты ряда Фурье умножаются на  $w(n)$ . В результате, получается импульсная характеристика

$$h(n) = h_{\text{д}}(n) w(n)$$

Существует много разновидностей окон: прямоугольное окно (окно Дирихле), треугольное окно (окно Бартлетта), обобщенное косинусное окно (семейство окон Хэннинга, Хэмминга, Блэкмана), окно Кайзера.



# Прямоугольное окно Дирихле

$$w_R(n) = \begin{cases} w(N - 1 - n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Окно является «хорошим», если оно отвечает двум требованиям:

- ширина главного лепестка частотной характеристики мала;
- амплитуда боковых лепестков ЧХ быстро уменьшается с увеличением частоты  $\hat{\omega}$ .

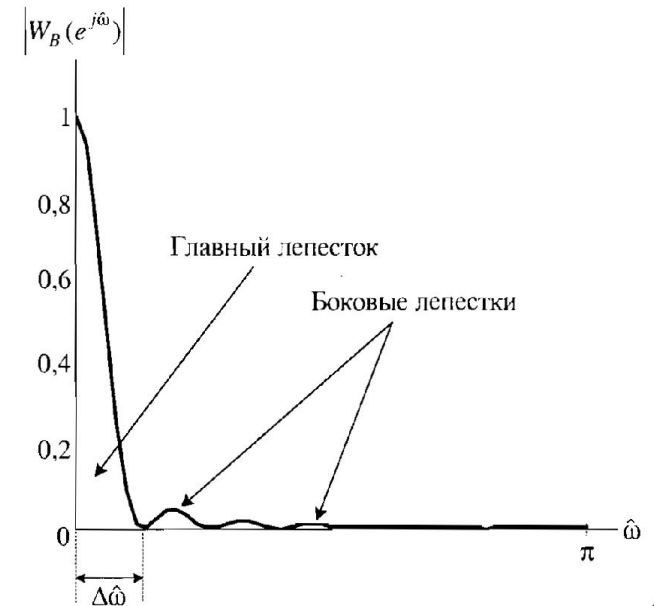
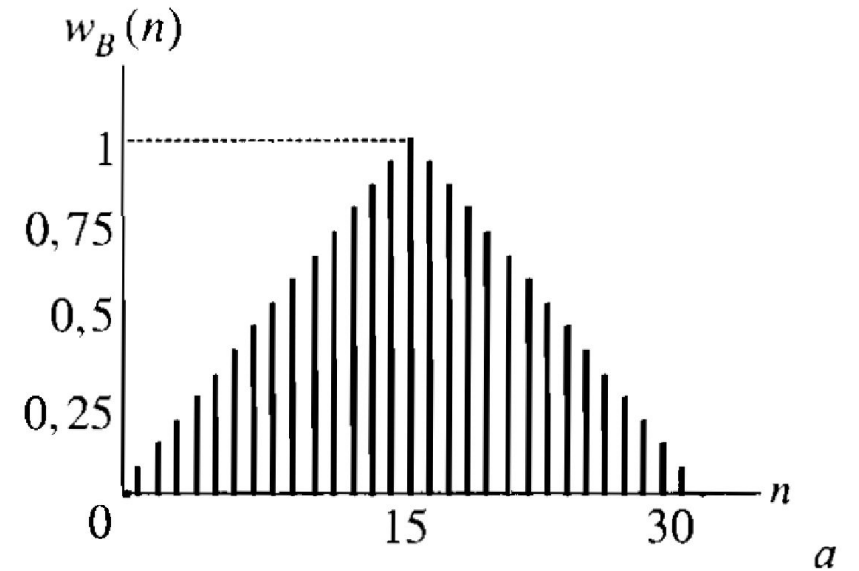
Эти требования несовместимы и необходим компромиссный вариант.

# Треугольное окно Бартлетта

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & n = 0, \dots, \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & n = \frac{N-1}{2}, \dots, N-1 \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Главный и боковые лепестки имеют ширину, в 2 раза превышающую ширину лепестков прямоугольного окна:

$$\Delta\hat{\omega} = \frac{4\pi}{N}$$



# Обобщенное косинусное окно

$$w_H(n) = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{N-1}n + a_2 \cos \frac{4\pi}{N-1}n; & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Окно имеет три широко используемых формы, образующих семейство косинусных окон, которые отличаются параметрами  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , отвечающими условию  $a_0 + |a_1| + a_2 = 1$ .

Таблица 19.1. Параметры окон

Окна	Параметры		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$
Хэннинга	0,5	-0,5	0
Хэмминга	0,54	-0,46	0
Блэкмана-Хэрриса	0,42	-0,5	0,08

# Обобщенное косинусное окно

Важной характеристикой окон является *степень подавления боковых лепестков*, которую характеризуют *коэффициентом пульсации  $k_n$* :

$$k_n = \frac{\text{Амплитуда первого бокового лепестка}}{\text{Амплитуда главного лепестка}} 100 \%$$

Для окон Блэкмана-Хэrrиса и Хэмминга коэффициент  $k_n$  оказывается значительно меньше, чем для прямоугольного окна, поскольку максимальный уровень боковых лепестков существенно снижается.

# Обобщенное косинусное окно

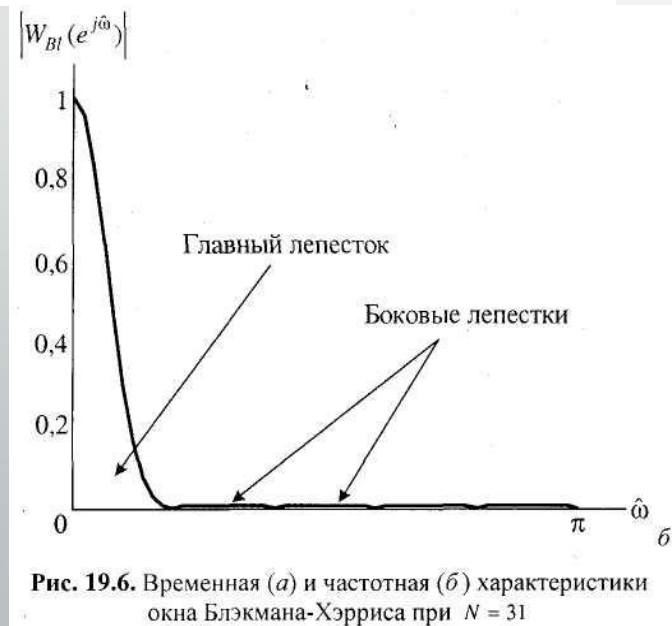
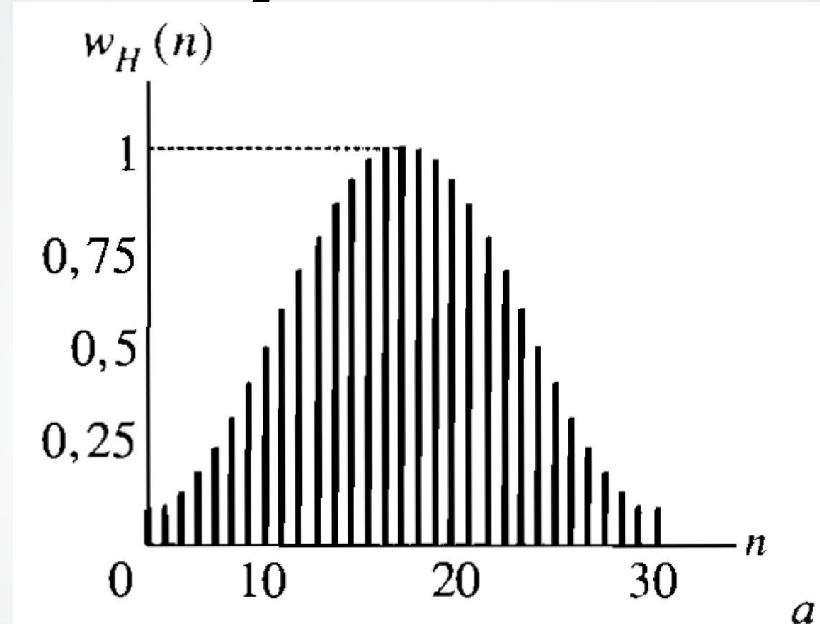
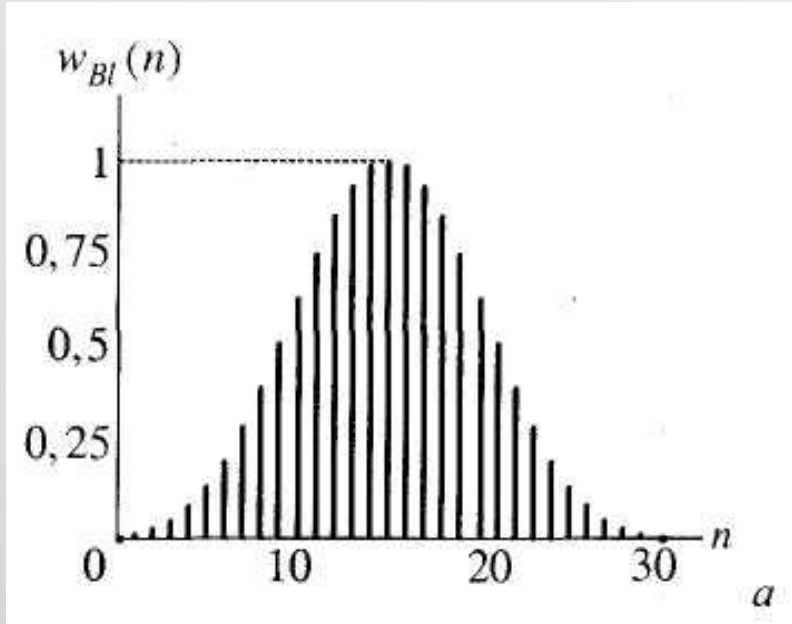


Рис. 19.6. Временная (а) и частотная (б) характеристики окна Блэкмана-Хэрриса при  $N = 31$

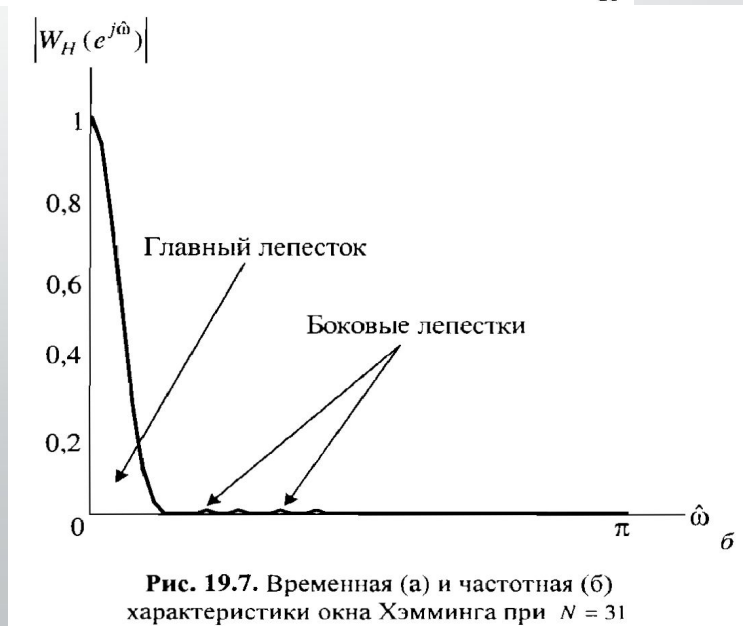


Рис. 19.7. Временная (а) и частотная (б) характеристики окна Хэмминга при  $N = 31$

# Обобщенное косинусное окно

Таблица 19.2. Значения основных параметров окон

Тип окна	Ширина главного лепестка	Максимальный уровень бок. лепестков, дБ	Коэффициент пульсаций $k_n(N)$ , %		
			$N = 11$	$N = 21$	$N = 31$
Прямоугольное	$2\pi/N$	-13	22,34	21,89	21,80
Хэннинга	$4\pi/N$	-35	2,62	2,67	2,67
Хэмминга	$4\pi/N$	-43	1,47	0,93	0,82
Блэкмана-Хэрриса	$6\pi/N$	-67	0,08	0,12	0,12

# Окно Кайзера

$$w_K(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)}, & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

где  $I_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x/2}{n!}\right]^2$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$N$ - длина КИХ фильтра (нечетная);

$\alpha$  - параметр, определяющий величину пульсаций.



# Окно Кайзера

Значения  $\alpha$  и  $N$  вычисляются по эмпирическим формулам Кайзера:

$$\alpha = \begin{cases} 0,1102(a_{min} - 8.7), & a_{min} > 50 \text{ дБ}; \\ 0.5842(a_{min} - 21)^{0.4} + 0.07886(a_{min} - 21), & 21 < a_{min} < 50; \\ 0, & a_{min} < 21 \text{ дБ} \end{cases}$$

где  $a_{min} = -20 \lg \delta$  – затухание в полосе задержания ( $\delta$  - ослабление бокового лепестка).

# Окно Кайзера

Для фиксированного отклонения  $\delta$  произведение  $(N-1)$  на нормированную ширину переходной полосы  $\Delta F$  является практически постоянной величиной, которая называется D-фактором:

$$D = (N - 1) \Delta F \Big|_{\delta = \text{fix}} \approx \text{const}$$

откуда  $N = \left\lfloor \frac{D}{\Delta F} + 1 \right\rfloor$  (до ближайшего целого не превосходящего  $\frac{D}{\Delta F} + 1$ )

D-фактор можно вычислить по формуле:

$$w_K(n) = \begin{cases} \frac{a_{\min} - 7,95}{14.36}, & a_{\min} > 21 \text{ дБ} \\ 0.9222, & a_{\min} < 21 \text{ дБ} \end{cases}$$

# Методика синтеза КИХ-фильтров

## МЕТОДОМ ОКОН

1. Задание требований к фильтру.
2. Вычисление импульсной характеристики  $h_{\text{и}}(n)$  "идеального" фильтра.

Тип фильтра	Импульсная характеристика		Примечание
	$h(n)$	$h(0)$	
ФНЧ	$\frac{\sin 2\pi\hat{f}_c n}{n\pi}$	$2\hat{f}_c$	$\hat{f}_c = \frac{f_k + f_{\text{ш}}}{2f_{\text{д}}}$
ФВЧ	$\frac{\sin 2\pi\hat{f}_c n}{n\pi}$	$1 - 2\hat{f}_c$	
ПФ	$\frac{\sin 2\pi n\hat{f}_{c_2} - \sin 2\pi n\hat{f}_{c_1}}{n\pi}$	$2(\hat{f}_{c_2} - \hat{f}_{c_1})$	$\hat{f}_{c_1} = \frac{f_{-k} + f_{-\text{ш}}}{2f_{\text{д}}}$ ;
РФ	$\frac{\sin 2\pi n\hat{f}_{c_1} - \sin 2\pi n\hat{f}_{c_2}}{n\pi}$	$1 - 2(\hat{f}_{c_1} - \hat{f}_{c_2})$	$\hat{f}_{c_2} = \frac{f_k + f_{\text{ш}}}{2f_{\text{д}}}$

# Методика синтеза КИХ-фильтров методом окон

3. Выбор окна и длины фильтра (порядка  $R = N - 1$ ).
4. Расчет импульсной характеристики реального фильтра.

Расчет ИХ осуществляется по формуле  $h(n) = h_{\text{и}}(n)w(n)$ , где  $h_{\text{и}}(n)$  берется из таблицы.

5. Проверка выполнения заданных требований.

# Метод частотной выборки

КИХ-фильтр может быть однозначно задан как коэффициентами импульсной характеристики  $h(n)$ , так и коэффициентами ДПФ импульсной характеристики  $H(k)$ .

- прямое (ДПФ)

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (1)$$

- обратное (ОДПФ)

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2)$$

# Метод частотной выборки

Коэффициенты ДПФ КИХ-последовательности, равные  $H(k)$ , можно рассматривать как значения z-преобразования импульсной характеристики фильтра, найденные в  $N$  равноотстоящих точках на единичной окружности, т. е.

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad (3)$$

# Метод частотной выборки

Таким образом, z-преобразование импульсной характеристики КИХ-фильтра можно легко выразить через коэффициенты ДПФ его импульсной характеристики, если подставить (2) в выражение для z-преобразования:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] \cdot z^{-n} \quad (4),$$

Проведем преобразования и получим:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad (5)$$



# Метод частотной выборки

Интерполяционная формула для расчета частотной характеристики фильтра в функции непрерывной частоты имеет вид

$$H(e^{j\hat{\omega}})$$

$$= \frac{1 - e^{-j\hat{\omega}\left(\frac{N-1}{2}\right)}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}}$$

