Кубанский государственный технологический университет
Институт компьютерных систем и информационной безопасности
Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина

Электротехника

Лекция № 9

Резонанс в электрических цепях

Учебные вопросы:

1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура.

3. Полоса пропускания колебательного контура.

Литература:

1. Нефедов В.И.. Основы радиоэлектроники и связи: ***Учебник для вузов*****, - М.: Высшая школа, 2005 г, с. 219 – 226**

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: ***Учебник для вузов*****, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.**

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: ***Учебник для вузов*****, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.**

Общие положения резонансных явлений в цепях переменного тока

Амплитуды колебаний токов и напряжений **в цепях переменного тока зависят от многих факторов: параметров цепи, амплитуды приложенного (входного) напряжения, и самое главное,** ***при наличии в цепи реактивных элементов они зависят от частоты приложенного напряжения*** **(воздействия)**

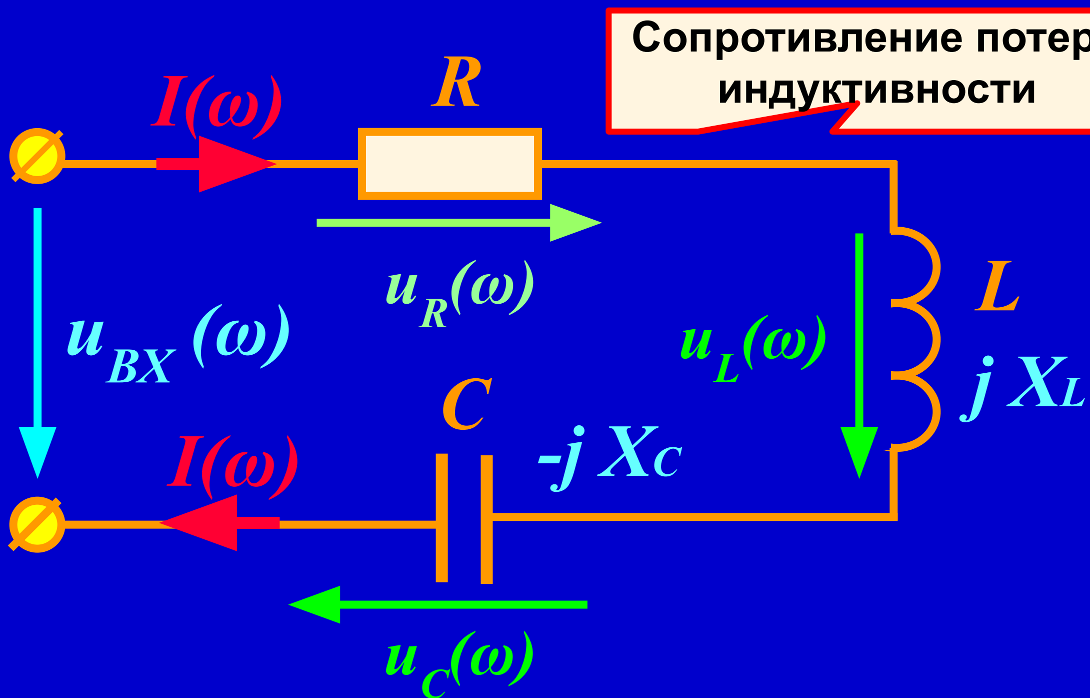
Резонанс является одним из самых распространенных в природе физических явлений.

Явление резонанса можно наблюдать в механических, электрических и даже тепловых системах.

Электрическая цепь в которой может возникнуть резонанс называется *колебательным контуром*

1. Резонанс напряжений. Параметры и частотные характеристики колебательного контура

Резонанс напряжений **возможен на участке ЭЦ, содержащей** ***последовательно соединенные*** **: резистивный - *R*, индуктивный – *L* и емкостной – *C элементы*.**



$$Z(j\omega) = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C)$$

Полное комплексное сопротивление цепи

Действующее значение тока в цепи

$$\dot{I} = I(j\omega) = I\cdot e^{j\varphi_I} = \frac{U\cdot e^{j\varphi_U}}{Z\cdot e^{j\varphi_Z}} = \frac{U}{\sqrt{R^2+X^2}}e^{j\varphi_I} = \frac{U}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}e^{j\varphi_I}$$

$$Z = Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Модуль полного сопротивления цепи

$$\varphi_Z(\omega) = \begin{cases} arctg \dfrac{\omega \cdot L - \dfrac{1}{\omega \cdot C}}{R}, (\omega \cdot L - \dfrac{1}{\omega \cdot C}) > 0 \\ -arctg \dfrac{\omega \cdot L - \dfrac{1}{\omega \cdot C}}{R}, (\omega \cdot L - \dfrac{1}{\omega \cdot C}) < 0 \end{cases}$$

Аргумент *Z* характеризует сдвиг фаз между *U* и *I*

Режим работы колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистивный - R, индуктивный – L и емкостной – C элементы, при котором ток в контуре и приложенное к контуру напряжение совпадают по фазе называется *резонансом напряжений*

$$I = I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \to \max$$

$$(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 = 0$$

Частота входного воздействия ω при которой реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю называется *резонансной частотой* - ω_0

При резонансе $\phi = 0$, если $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C = 0$, что может быть выполнено лишь для некоторой частоты $\omega = \omega_0$.

$$\boxed{\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Leftrightarrow \omega_0^2 LC = 1}$$

$$\boxed{I_0 = I(\omega_0) = I_{\max} = \frac{U}{R}}$$

Таким образом, в последовательном контуре из множества токов с различными частотами выделяется ток, <u>только одной определенной частоты</u> – ***<u>ток резонансной частоты</u>***

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \to или \to f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

Реактивные сопротивления контура на резонансной частоте ω_0 равны друг другу.

$$\boxed{X_L(\omega_0) = X_C(\omega_0) = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \to Ом}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \to Ом}$$

Характеристическое (*волновое*) сопротивление контура

Резонансные свойства (*избирательность*) контура характеризуются добротностью

$$\boxed{Q = \frac{\rho}{R}} \quad \text{или} \quad \boxed{d = \frac{1}{Q}}$$

Пример: Пусть ***U*= 12 *В*, *X*$_L$(*ω*$_0$) = *X*$_C$(*ω*$_0$) = 500 *Ом*, *R* = 6 *Ом*.**

Значение тока на резонансной частоте

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{12}{6} = 2A$$

$$U_{C0} = I_0 \cdot X_C(\omega_0) = U_{L0} = I_0 \cdot X_L(\omega_0) = = 2 \cdot 500 = 1000\ B$$

$$U_{R0} = I_0 R = 2 \cdot 6 = 12B, \rightarrow т.е. \rightarrow U_C(\omega_0) = U_L(\omega_0) \gg U_{R0}$$

Физический смысл *добротности*

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = \frac{I_0 \cdot \omega_0 L}{U} = \frac{I_0}{U \cdot \omega_0 C} = \frac{\sqrt{L \cdot C}}{R \cdot C} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C} \cdot R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

Добротность **показывает, во сколько раз резонансные напряжения на реактивных элементах превышают приложенное напряжение ⇒ отсюда и возник термин «резонанс напряжений»**

Частотные характеристики последовательного контура

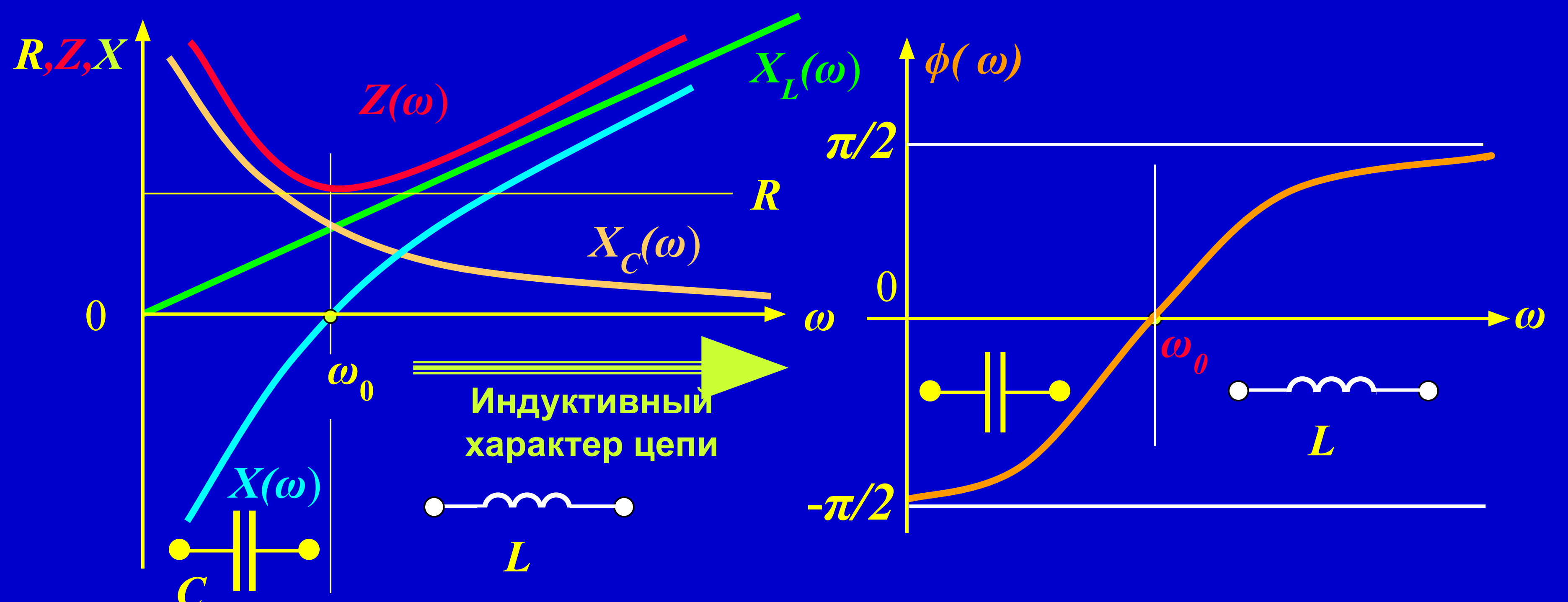
Анализ характера уравнений напряжений и токов в RLC цепи показывает, что они все являются частотно-зависимыми.

$$X_L(\omega)=\omega L,\rightarrow X_C(\omega)=\frac{1}{\omega C},\rightarrow X(\omega)=(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

$$Z(\omega)=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2},\rightarrow \varphi(\omega)=arctg\frac{(\omega L-\frac{1}{\omega C})}{R}$$

$X_L(\omega)$, $X_C(\omega)$, $X(\omega)$, $Z(\omega)$ ⇒ частотные характеристики цепи,

$\phi(\omega)$ ⇒ фазочастотная характеристика цепи



Рассмотрим частотные зависимости действующих значений тока в цепи и напряжений на реактивных элементах контура.

$$I(\omega)=\frac{U}{Z}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

$$I_0=I_{\max}=\frac{U}{R},\rightarrow при \rightarrow \omega=\omega_0$$

Экстремумы на частоте

$$U_L(\omega)=I(\omega)X_L(\omega)=\frac{U\cdot\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

$$\omega_{L0}=\omega_0\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{2Q^2}}} > \omega_0$$

$$U_L(\omega)=I(\omega)X_C(\omega)=\frac{U}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}};$$

max

$$\omega_{C0}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

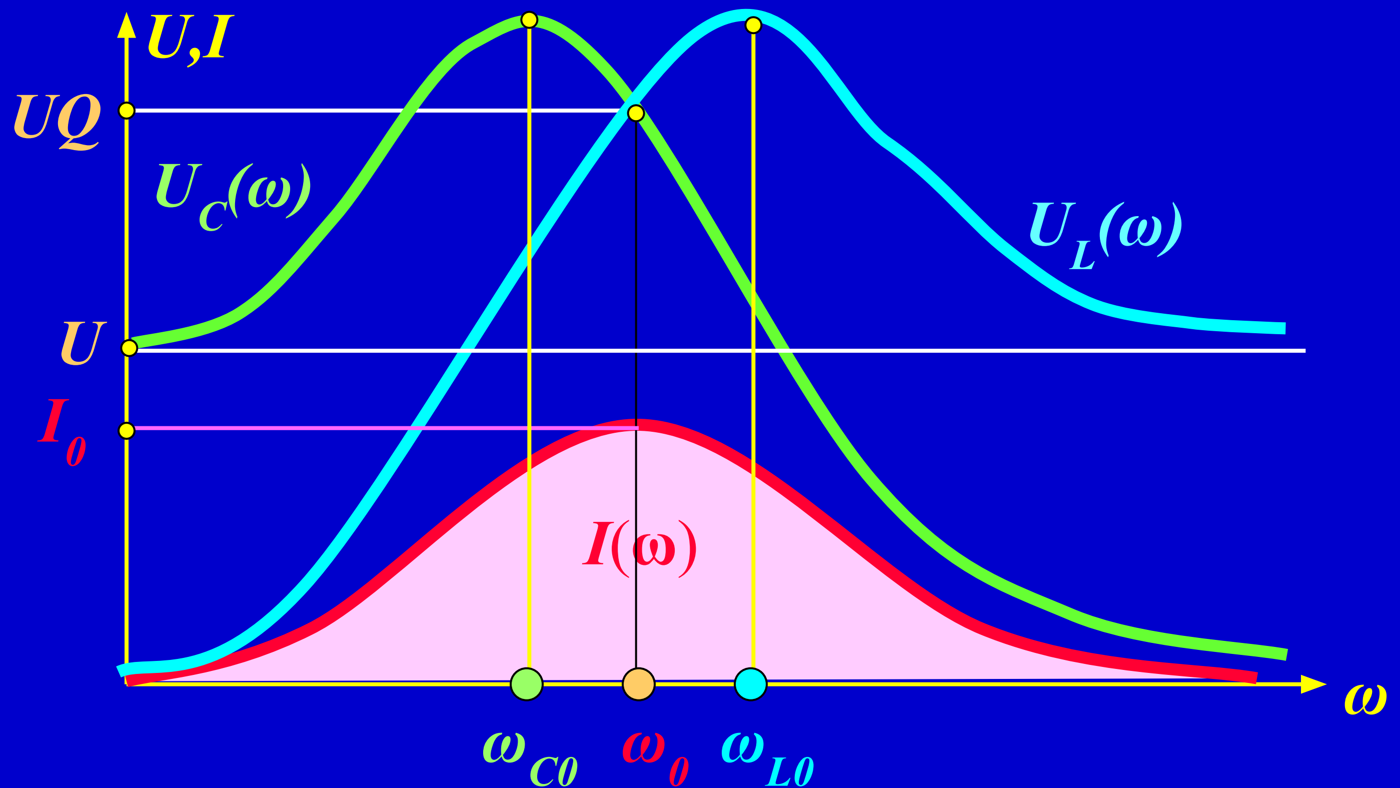
Зависимости *$I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$* – называются амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ) относительно тока и напряжений, или резонансными характеристиками.

Для нахождения экстремумов *$U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$* необходимо:

$$\frac{\partial U_L(\omega)}{\partial\omega}=0 \qquad \frac{\partial U_C(\omega)}{\partial\omega}=0$$

На частотах ω_{L0} и ω_{C0} напряжения на реактивных элементах контура примут максимальное значение.

$$U_{C\max}(\omega_{C0}) = U_{L\max}(\omega_{L0}) = \frac{2 \cdot U \cdot Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{2U}{d\sqrt{4 - d^2}}$$



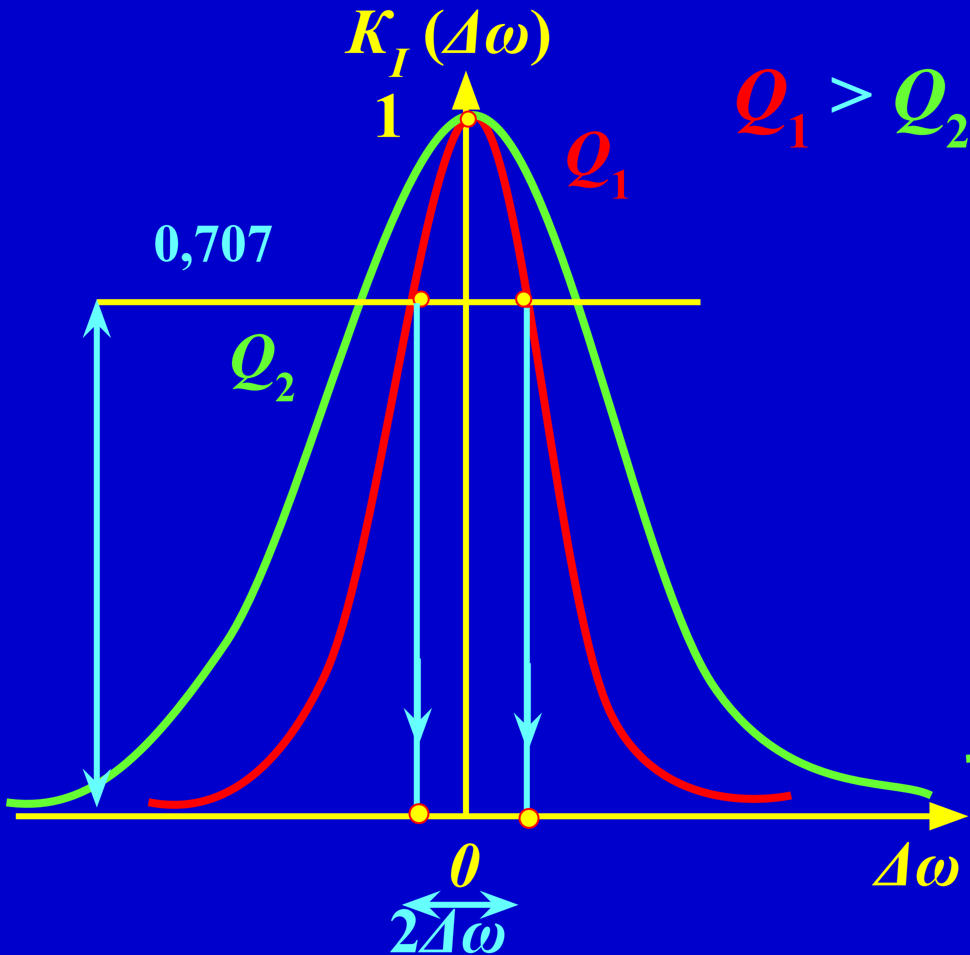
С увеличением добротности контура (уменьшением затухания) частоты ω_{L0} и ω_{C0} сближаются с резонансной частотой ω_0, при этом I_0, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ возрастают и кривые становятся острее.

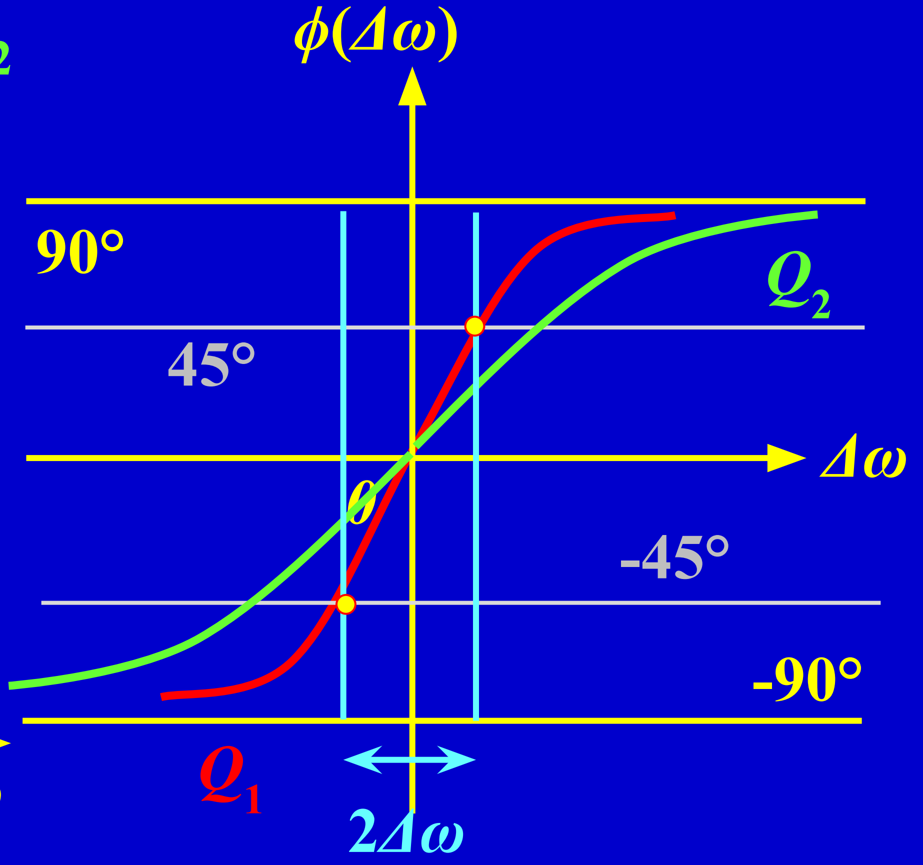
АЧХ контура

$$K_I(\Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{2\cdot Q\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}}}}$$

ФЧХ контура

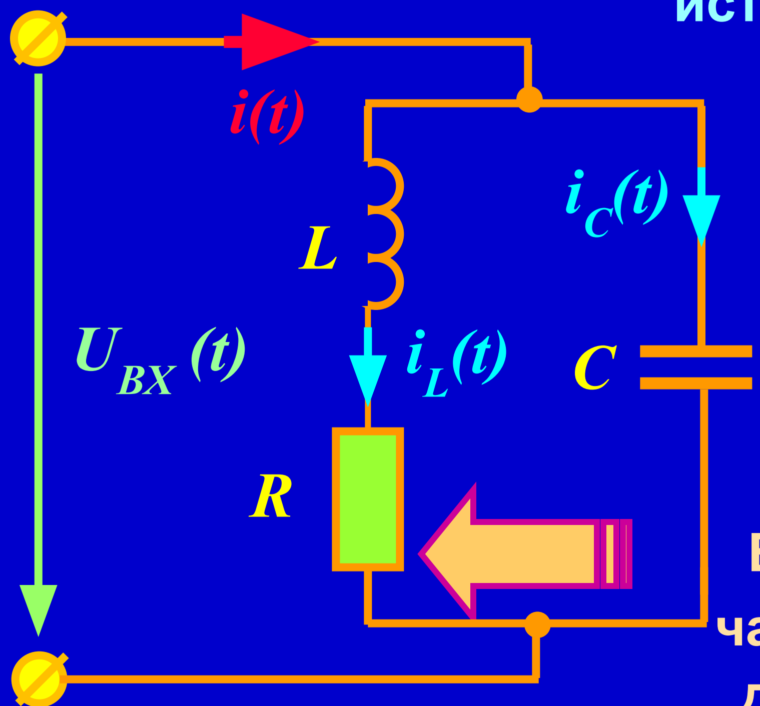
$$\varphi(\Delta\omega) = arctg(2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0})$$





2. Резонанс токов. Параметры и частотные характеристики колебательного контура

Резонанс токов возможен на участке ЭЦ, в которой катушка индуктивности – L и конденсатор – C включены параллельно источнику сигнала



Сопротивление $R \rightarrow$ потери в контуре

Полное сопротивление контура

$$Z_K(j\omega) = \frac{(R + j\omega L)\cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Вблизи резонансной частоты ω_P и большой добротности контура

$$X_L(\omega_P) = \omega_P L \gg R$$

$$Z_K(j\omega) = \frac{(R + j\omega L)\cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{L/C}{R[1 + j(\omega L - 1/\omega C)]} = \frac{\rho^2}{R\cdot(1 + j\frac{2Q\Delta\omega}{\omega_P})}$$

$$Z_K(j\omega) = \frac{R_0}{(1 + j\dfrac{2Q\Delta\omega}{\omega_P})}$$

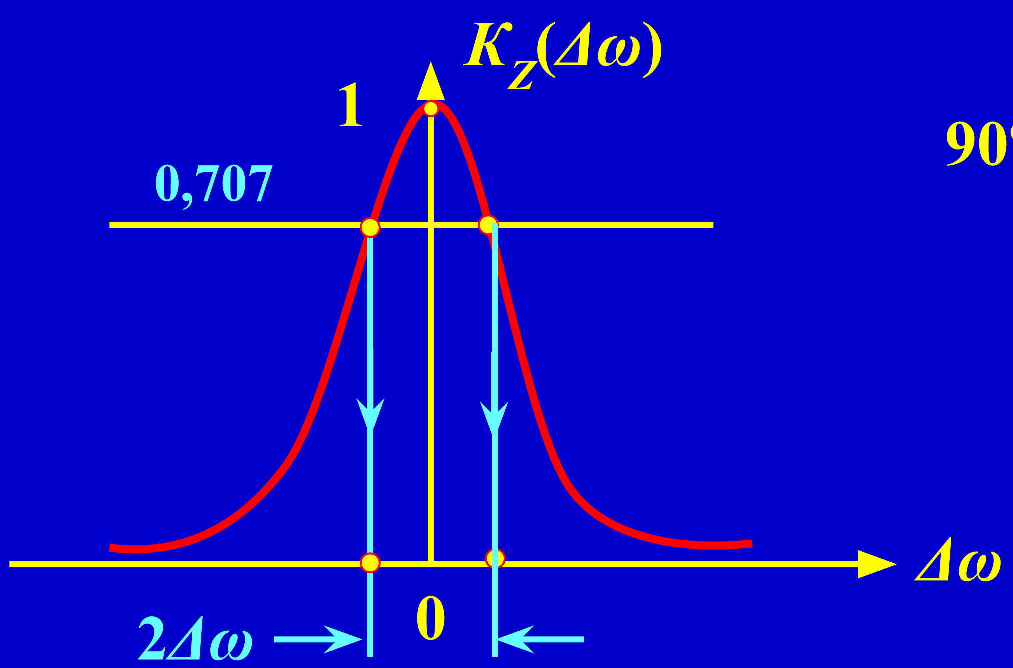
где

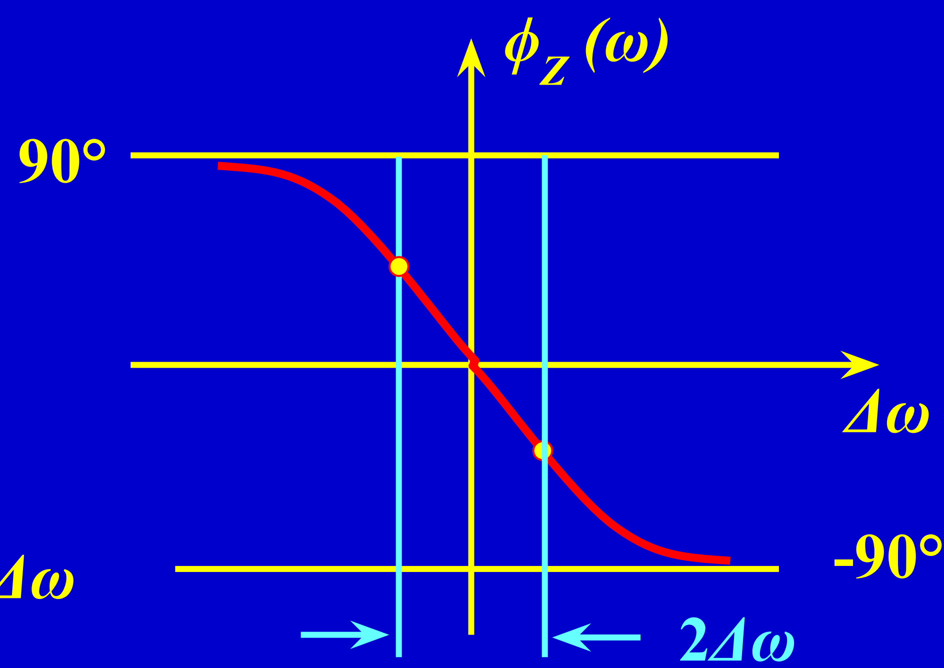
$$R_0 = \frac{\rho^2}{R} = \rho \cdot Q = R \cdot Q^2$$

резонансное сопротивление контура

Аналитически АЧХ контура отражается зависимостью нормированного сопротивления модуля входного сопротивления от *абсолютной расстройки*

$$K_Z(\Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 + (\dfrac{2Q\Delta\omega}{\omega_P})^2}}$$





Ток в неразветвленной части цепи

$$I_0 = U \cdot G_0 = \frac{U}{R_0}$$

R_0 – эквивалентное резонансное сопротивление контура

Режим работы участка цепи с параллельными ветвями, при котором ток в неразветвленной части и напряжение на выводах контура совпадают по фазе называется резонансом токов

Токи* в параллельных ветвях цепи *при резонансе

$$I_L(\omega_0) = \frac{U}{X_L(\omega_0)} = \frac{U}{\sqrt{L/C}} = \frac{U}{\rho}$$

Ток в индуктивной ветви

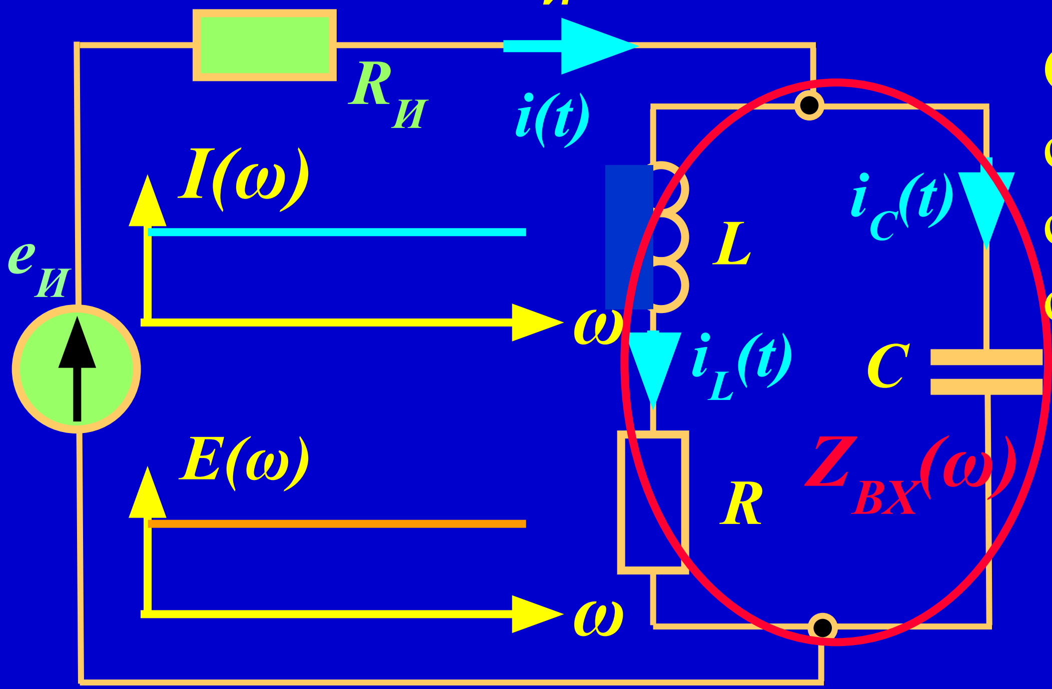
Ток в емкостной ветви

$$I_C(\omega_0) = \frac{U}{X_C(\omega_0)} = \frac{U}{\sqrt{L/C}} = \frac{U}{\rho}$$

$$\frac{I_L(\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{I_C(\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R} = Q$$

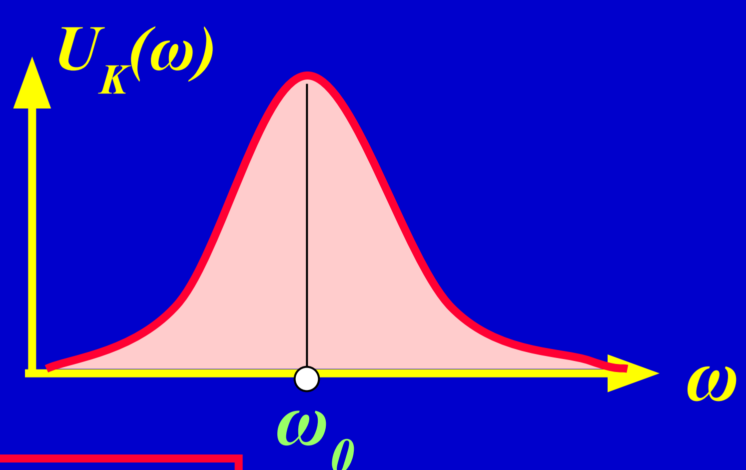
Отсюда возник термин «*резонанс токов*»

В реальном параллельном колебательном контуре резонансные избирательные характеристики зависят от соотношения сопротивления контура $Z_{ВХ}(\omega)$ и внутреннего сопротивления $R_И$ источника входного сигнала



Сопротивление контура $Z_{ВХ}(\omega)$ совместно с внутренним сопротивлением источника $R_И$ образуют делитель напряжения

1) При $R_И > Z_{ВХ}(\omega)$



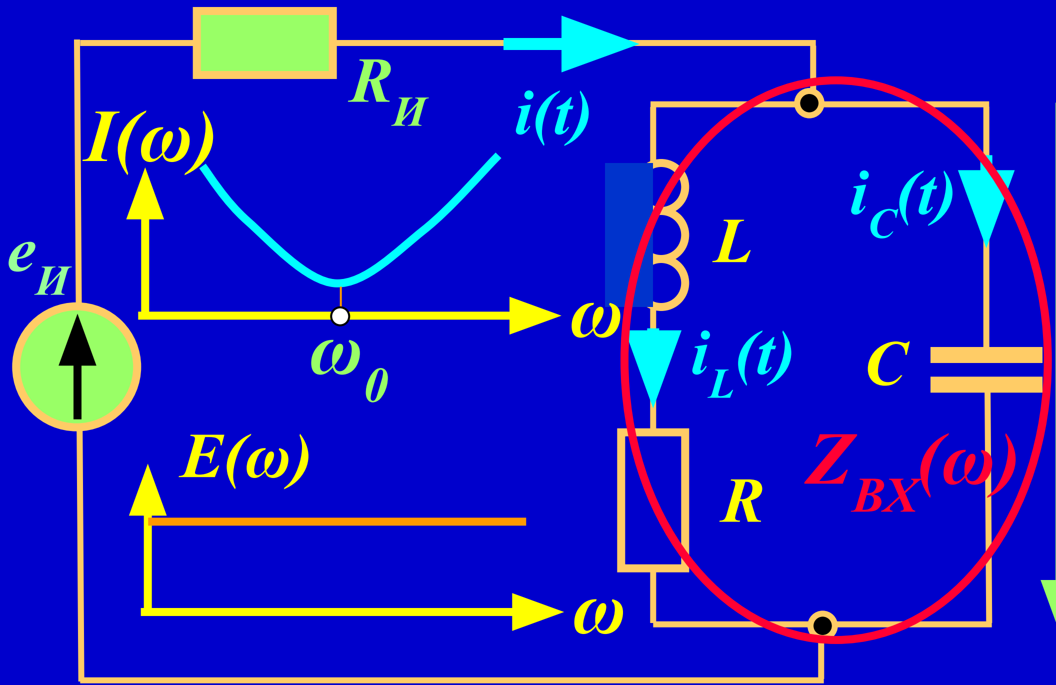
$$I(\omega) = \frac{e_И}{R_И + Z_{ВХ}(\omega)} \approx \frac{e_И}{R_И} \rightarrow const$$

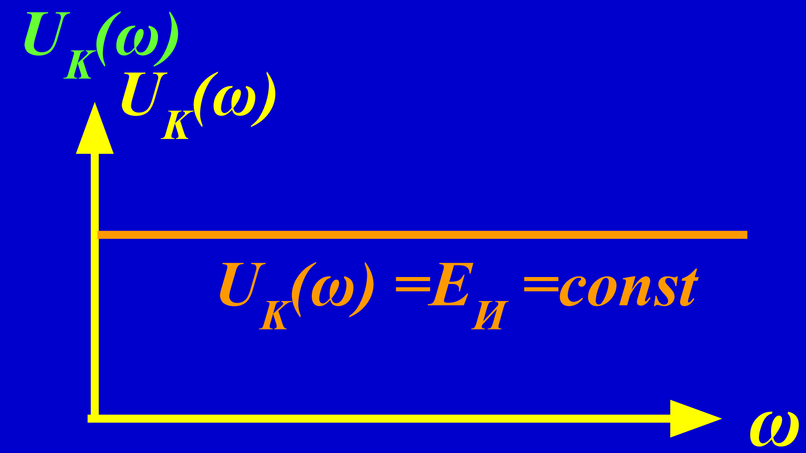
$$U_K(\omega) = \frac{e_И}{R_И} \cdot Z_{ВХ}(\omega) \rightarrow \mathrm{var}$$

$$K_{ДН}(\omega) = \frac{Z_{ВХ}(\omega)}{R_И} \rightarrow мал$$

Необходимо усиление $U_K(\omega)$

2) При $R_И < Z_{BX}(\omega)$





Избирательности входного сигнала нет

$$I(\omega) = \frac{e_И}{R_И + Z_{BX}(\omega)} \approx \frac{e_И}{Z_{BX}(\omega)} \to \mathrm{var}$$

$$U_K(\omega) = \frac{e_И}{Z_{BX}(\omega)} \cdot Z_{BX}(\omega) = e_И = const$$

Параллельный колебательный контур включают в цепи, обладающие

$$R_И \;\square\square\; Z_{вх}(\omega)$$

3. Полоса пропускания колебательного контура

Способность колебательного контура выделять сигналы заданной частоты и уменьшать (подавлять) сигналы всех других частот называется избирательностью

Контур с **лучшей избирательностью** обладает **большей добротностью**

Избирательность ***характеризуется формой амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) контура***

Полосой пропускания называется область частот, вблизи резонансной частоты, в пределах которой н модуль коэффициента передачи уменьшается в заданное число раз (чаше всего в √2 раз).

- **Последовательный колебательный контур**

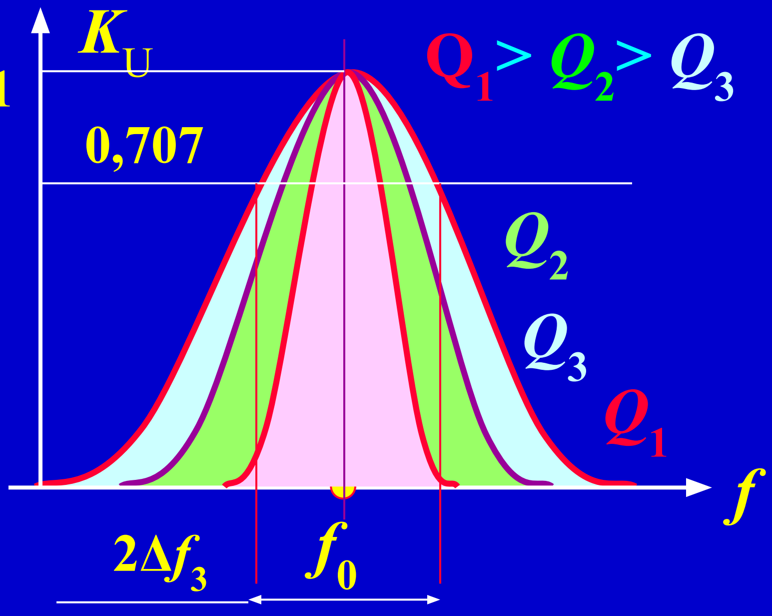
Нормированная АЧХ ($U_{вых} = U_C$)

$$K_U = \frac{K(f)}{K(f_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+(2Q\Delta f / f_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

Полоса пропускания

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \to [Гц]$$

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot (R+R_H)}{\rho} \to \frac{f_0 \cdot (R+R_i)}{\rho}$$



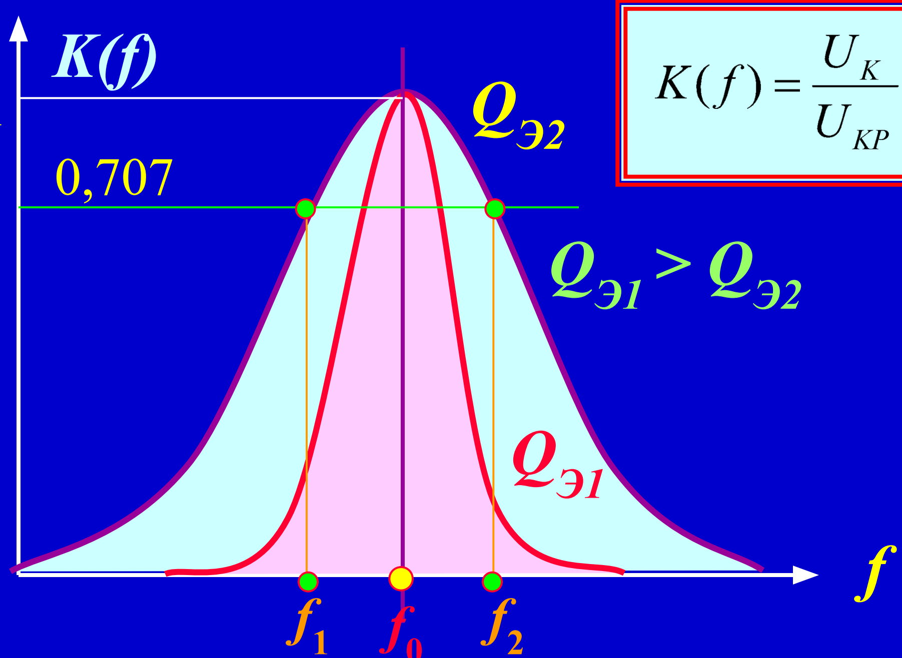
❑ Параллельный колебательный контур

Обобщенная расстройка

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - {}^{1}\!/_{\omega C}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Полоса пропускания параллельного контура определяется

$$2\Delta f = \frac{f_P}{Q_Э} = \frac{f_0 \cdot (1 + {}^{R_{0Э}}\!/_{R_i})}{Q} =, \rightarrow Q = \frac{\rho}{R}; Q_Э = \frac{Q}{1 + {}^{R_{0Э}}\!/_{R_i}}$$



$$K(f) = \frac{U_K}{U_{KP}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_Э^2(\omega/\omega - \omega_0/\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

Граничные частоты

$$f_{1,2} = \frac{f_0}{2Q_Э}\left(\sqrt{1 + 4Q_Э^2} \pm 1\right)$$

$$2\Delta f = |f_2 - f_1|$$

Расширение полосы пропускания

На практике в ряде случаев требуется существенно расширить полосу пропускания контура, не изменяя его резонансной частоты. (*Q*↓ → *R*) или (ρ↓ - применяется редко → необходимо изменять одновременно *L* и *C*)

$$2\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{f_0 \cdot R}{\rho} \to [\Gamma ц]$$

$$2\Delta f = \frac{f_P}{Q_Э} = \frac{f_P}{Q_Э}$$

Практически часто уменьшают добротность за счет увеличения активного контура двумя путями:

- **шунтированием контура резистором $R_Ш$ (*параллельный КК*)**
- **введением в контур добавочного сопротивления $R_Д$ (*последовательный КК*);**

Сопротивление добавочного резистора рассчитывают по

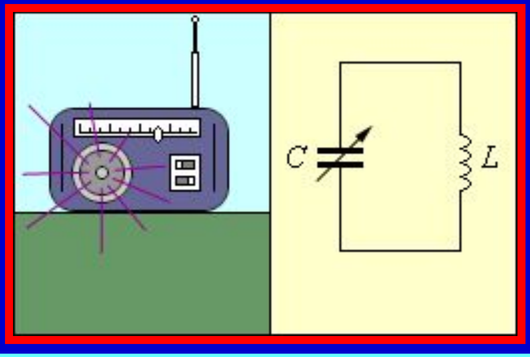
$$R_Д = \frac{2\Delta f_{ТРЕБ} \cdot \rho}{f_0}$$

Подключение к контуру шунтирующего резистора $R_Ш$ эквивалентно включению последовательно с элементами контура добавочного резистора $R_Д$

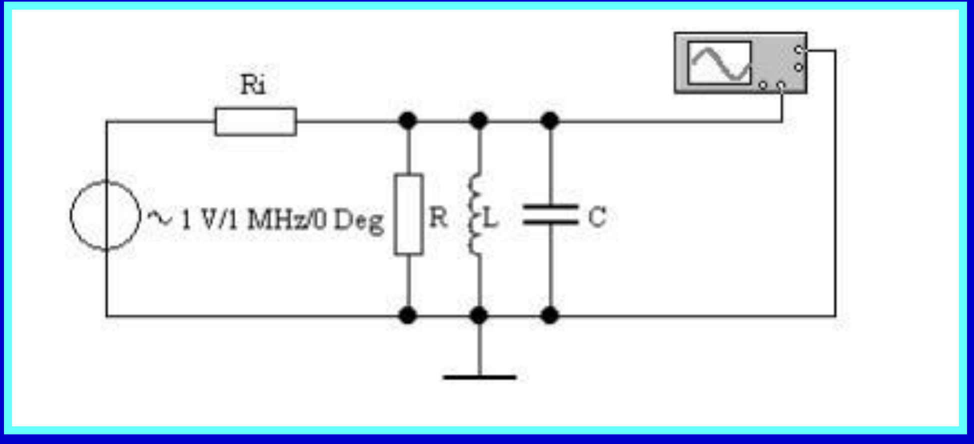
$$R_Ш = \frac{\rho^2}{R_Д}$$

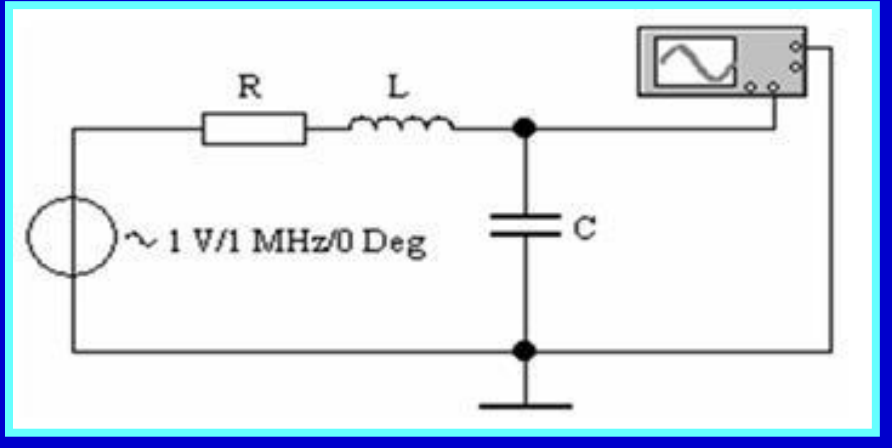
$$R_Д = \frac{\rho^2}{R_Ш}$$

Практические схемы входных избирательных цепей приемных устройств электроники

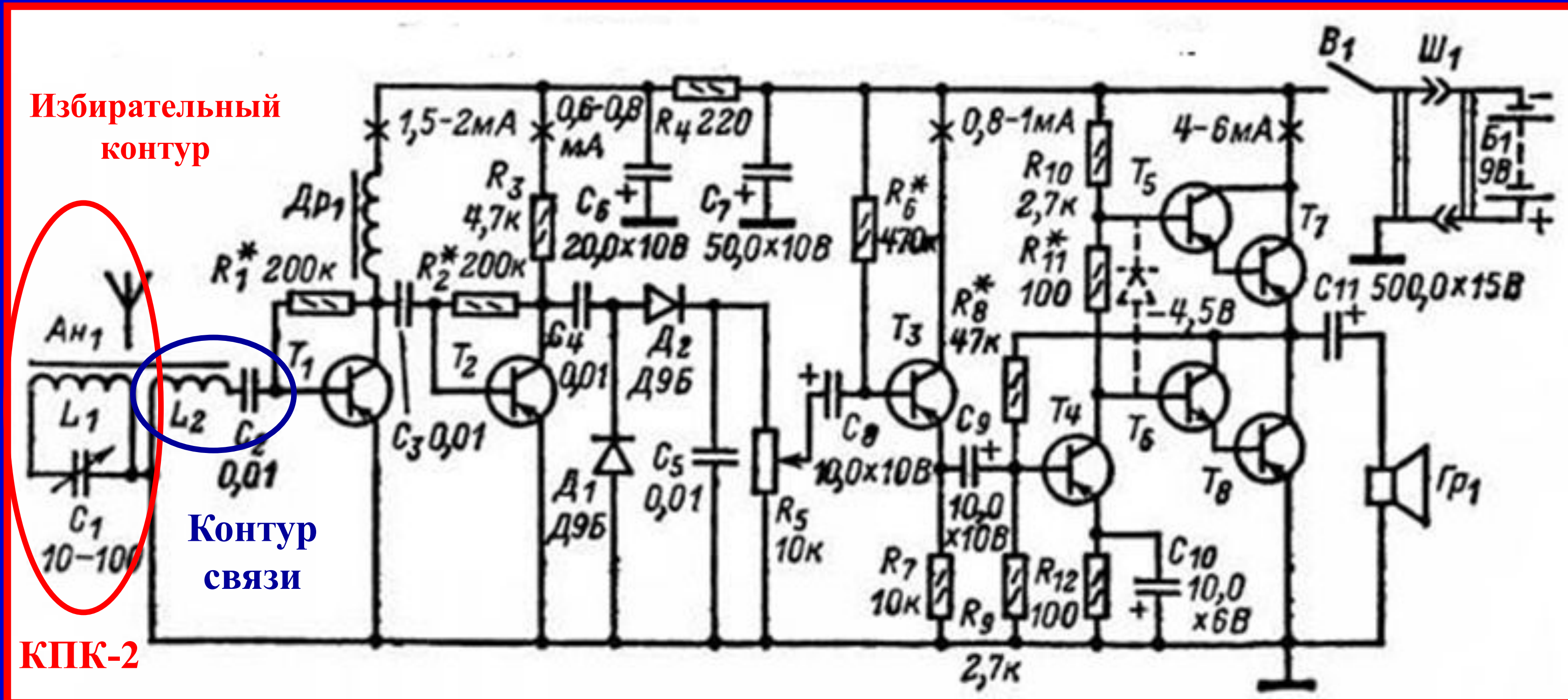


Модели для исследования избирательных входных цепей (контуров)

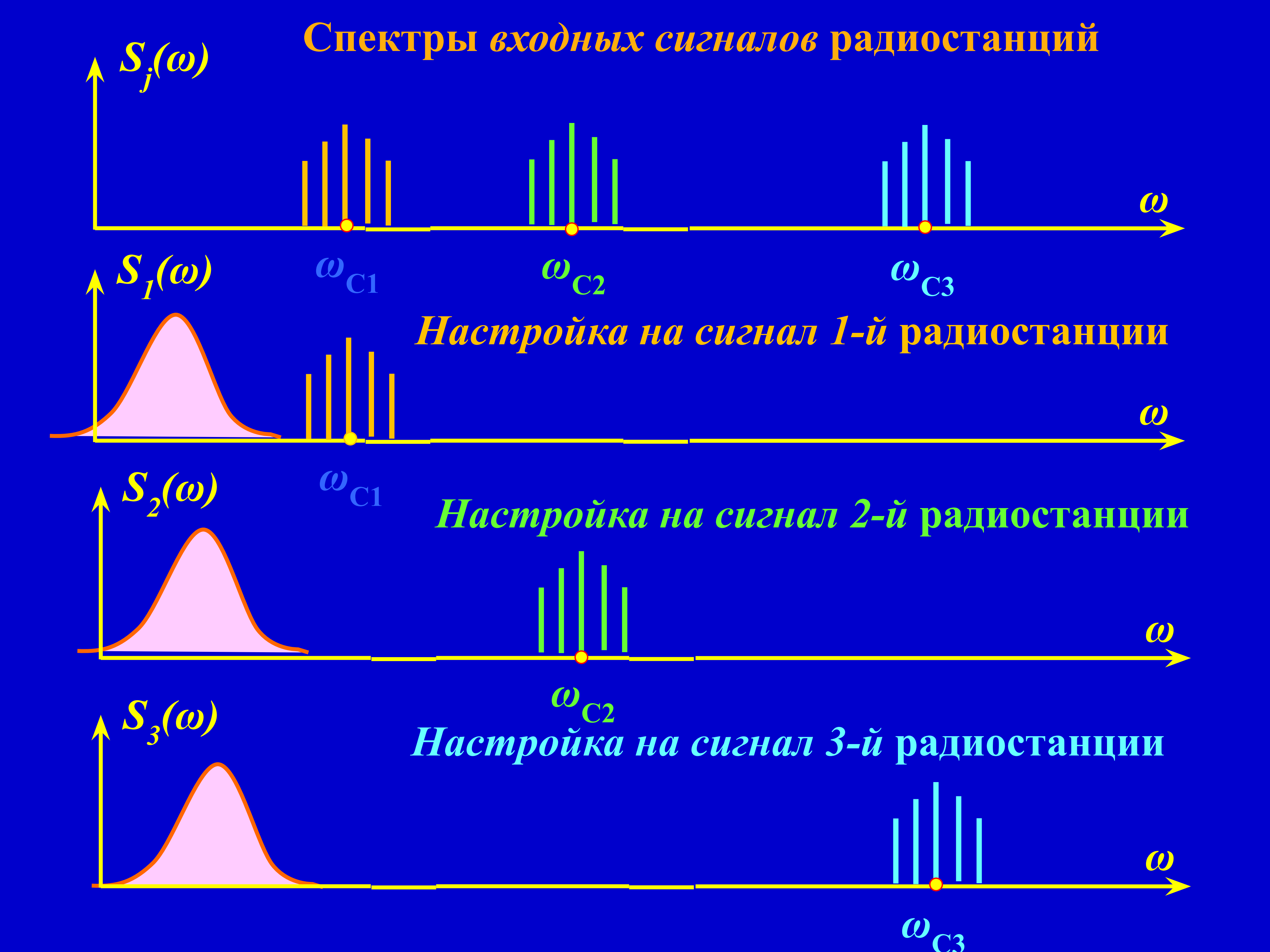




Однодиапазонный КВ приемник



Входной контур приемника, может быть настроен на частоты 3-х радиостанций, образует катушка *L*1 магнитной антенны Ан1 и конденсатор переменной емкости *C*1. Через катушку связи *L*2 и разделительный конденсатор C2 сигнал радиостанции, на которую настроен контур магнитной антенны, подается на базу транзистора Т1 первого каскада усилителя высокой частоты.



Спектры входных сигналов радиостанций
Sj(ω)
ω
ωC1
ωC2
ωC3
S1(ω)
Настройка на сигнал 1-й радиостанции
ω
ωC1
S2(ω)
Настройка на сигнал 2-й радиостанции
ω
ωC2
S3(ω)
Настройка на сигнал 3-й радиостанции
ω
ωC3

Задание на самостоятельную работу

Литература:

1. Нефедов В.И.. **Основы радиоэлектроники и связи:** *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2005 г, с. 219 – 226

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. **Основы теории электрических цепей и электроники:** *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 54 – 66.

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. **Электротехника:** *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.