Московский энергетический институт

Кафедра общей физики и ядерного синтеза

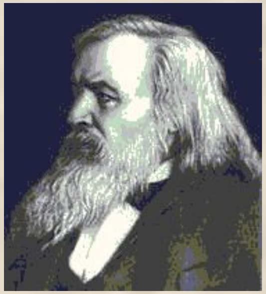
учебная лаборатория
“Механика и молекулярная физика”

Физический эксперимент. Статистическая обработка результатов физического эксперимента

Физический эксперимент.
Статистическая обработка результатов физического эксперимента

ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Измерения составляют неотъемлемую часть научных исследований и инженерной деятельности.



1834 -1907

Д.И. Менделеев, который был великим теоретиком и экспериментатором, писал:

«Наука начинается там, где начинают измерять. Точная наука немыслима без меры»

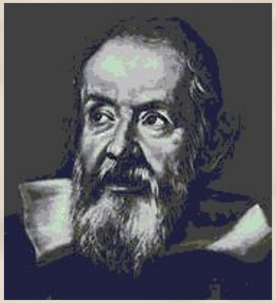
ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Технический прогресс требует создания все более точных, быстродействующих средств измерения. Так, в течение нескольких десятилетий требования к точности измерений в машиностроении возросли примерно в десять тысяч раз. Появились средства измерения, основанные на новых физических принципах, в том числе телеметрические и автоматизированные средства, средства измерений, интегрированные со средствами вычислительной техники, переработки и хранения информации.

Измерительная техника является составной частью более общей отрасли техники – приборостроения и информационной техники. Эта отрасль охватывает средства измерения, анализа, обработки и представления информации, устройства регулирования, автоматизированные системы управления экспериментом и измерением.

ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Процесс измерения предполагает знание физических законов, лежащих в основе изучаемого явления, или хотя бы частичную модель этого явления. Во всяком случае, нужно иметь четкое определение той величины, которая подлежит измерению. Об этом знали еще ученые, которые находились у колыбели современной науки.



1564 - 1642

Галилею принадлежит изречение:

«Следует измерять то, что измеримо, и делать измеримым то, что таковым не является»

ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Цель эксперимента – определить значение физической величины. Значение физической величины – это ее оценка в виде некоторого числа принятых для нее единиц измерения.

Измерение – нахождение значения физической величины с помощью специальных технических средств (измерительных приборов).

Измерения могут быть прямыми, при которых значение физической величины находят непосредственно из опытных данных (показания измерительных приборов), и косвенными, при которых значение физической величины рассчитывают на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, определяемыми путем прямых измерений.

Основное качество измерения – его точность. Оценка точности результата измерения – неотъемлемая часть эксперимента. Эту оценку модно сделать, найдя погрешность измерения.

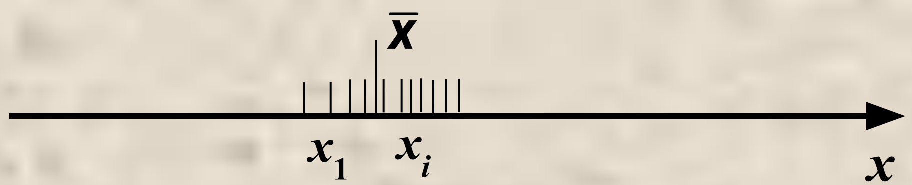
ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ

Любая физическая величина обладает истинным значением, идеальным образом отражающим соответствующие свойства объекта.

Однако, несовершенство средств измерений, физическая природа самой измеряемой величины, а также другие факторы приводят к тому, что эксперимент дает не истинное значение физической величины, а ее приближенное значение.

Действительным значением физической величины называют значение физической величины, найденное экспериментальным путем. Это значение должно быть достаточно близко к истинному значению, чтобы быть использованным вместо него.

При многократных измерениях в качестве действительного значения физической величины принимают среднее арифметическое значение результатов измерений.

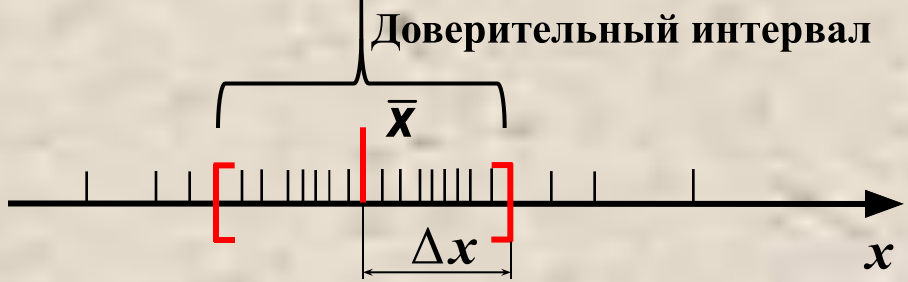


$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ

Погрешность измерения – отклонение результата измерения от истинного значения.

При многократных измерениях оценка погрешности производится следующим образом:



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

1.Проводят серию из ***n*** измерений.

2.Вычисляют среднее арифметическое значение результатов измерений.

3.Используя методы математической статистики и теории вероятностей определяют ширину доверительного интервала, о котором известно, что истинное значение измеряемой физической величины лежит в его пределах с заданной вероятностью.

4.Абсолютную погрешность принимают равной половине ширины доверительного интервала.

5.Значение измеренной физической величины записывают в виде

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x).$$

Эта запись эквивалентна утверждению, что истинное значение находится в пределах доверительного интервала: $\bar{x} - \Delta x \le x \le \bar{x} + \Delta x$.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

ПОГРЕШНОСТЬ

- **По форме числового выражения**
  - Абсолютная
  - Относительная
  - щелкните здесь
- **По характеру проявления**
  - Систематическая
  - Случайная
  - Промах
  - щелкните здесь
- **По источнику появления**
  - Методическая
  - Эксперимента
  - Средств измерения
  - щелкните здесь

Классификация погрешностей по форме числового выражения

По форме числового выражения различают абсолютную и относительную погрешности

Абсолютная погрешность – разность между результатом измерения и истинным значением измеряемой физической величины. Абсолютная погрешность выражается в единицах измерения физической величины.

При однократных измерениях

$$\Delta x = |x_{изм} - x|\ ,$$

где x – истинное значение; $x_{изм}$ – измеренное значение.

При многократных измерениях

$$\Delta x = |\bar{x} - x|$$

где x – истинное значение; $\bar{x}$ – среднее арифметическое значение.

Относительная погрешность – отношение абсолютной погрешности измерения к измеренному значению физической величины:

$\delta_x = \dfrac{\Delta x}{\bar{x}}$ - безразмерная величина, либо $\delta_x = \dfrac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$ - в процентах

Классификация погрешностей измерения по характеру проявления в эксперименте

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях.

Случайная погрешность – составляющая погрешности, изменяющаяся случайным (непредсказуемым) образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Грубая погрешность (промах) – погрешность, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях погрешность.

Как правило, это связано с грубой ошибкой экспериментатора.

Классификация погрешностей по источнику появления

Методическая погрешность – составляющая погрешности измерений, зависящая от несовершенства метода измерений, несовершенства теории, положенной в основу экспериментального метода и т.п.

Погрешность эксперимента – совокупность погрешностей, связанных непосредственно с измерениями. Это погрешность отсчитывания показаний приборов, погрешность интерполяции, погрешность от параллакса и т.п.

Погрешность средств измерения – инструментальная погрешность. Она зависит от погрешностей, связанных с принципом действия и точностью изготовления применяемых измерительных приборов. Включает в себя как систематическую, так и случайную составляющие.

ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Погрешность прямого измерения включает в себя погрешность средств измерения и случайную погрешность.

Погрешность средств измерений рассчитывают так:

Для многократных измерений

$$\Delta x_{си} = \frac{\Delta_{пред}}{\sqrt{3}},$$

где $\Delta_{пред}$ – предел допускаемой инструментальной погрешности.

Для однократных измерений

$$\Delta x_{си} = \Delta_{пред}.$$

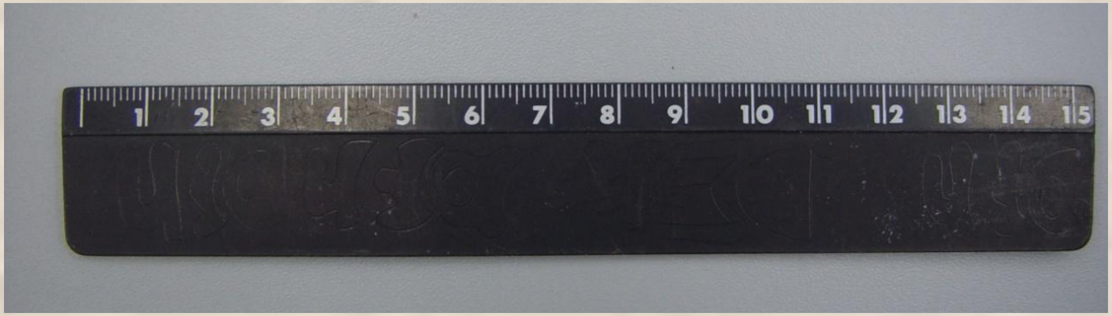
Данные об измерительных приборах записывают в таблицу спецификации измерительных приборов, которая является неотъемлемой частью протокола измерений.

Таблица 1. Спецификация измерительных приборов

Название прибора и его тип	Пределы измерения	Цена деления	Предел допускаемой инструментальной погрешности
Линейка	0 – 150 мм	1 мм	0,5 мм

ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

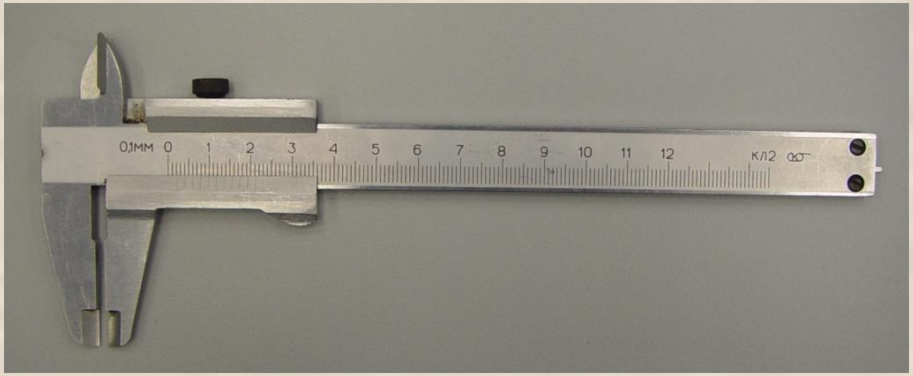
Для измерительных приборов с непрерывным отсчетом (линейка, транспортир и т.п.) предел допускаемой инструментальной погрешности принимается равным половине цены деления шкалы.



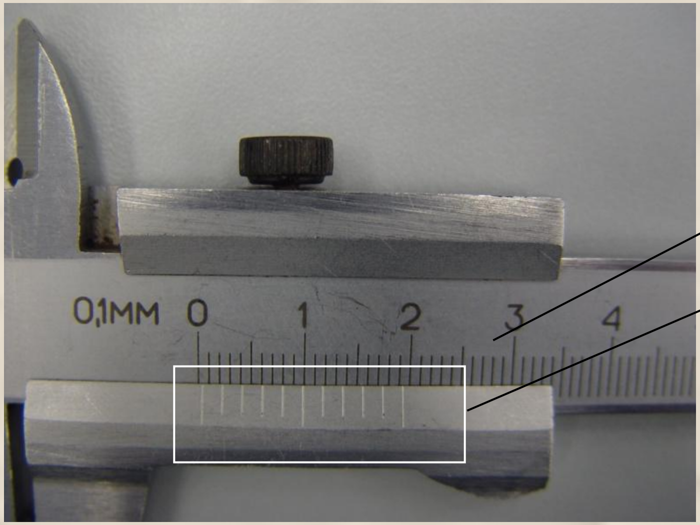
Цена деления линейки 1 мм

ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Для измерительных приборов с дополнительной шкалой − нониусом (штангенциркуль, микрометр и т.п.) предел допускаемой инструментальной погрешности принимается равным цене деления нониуса.



Штангенциркуль



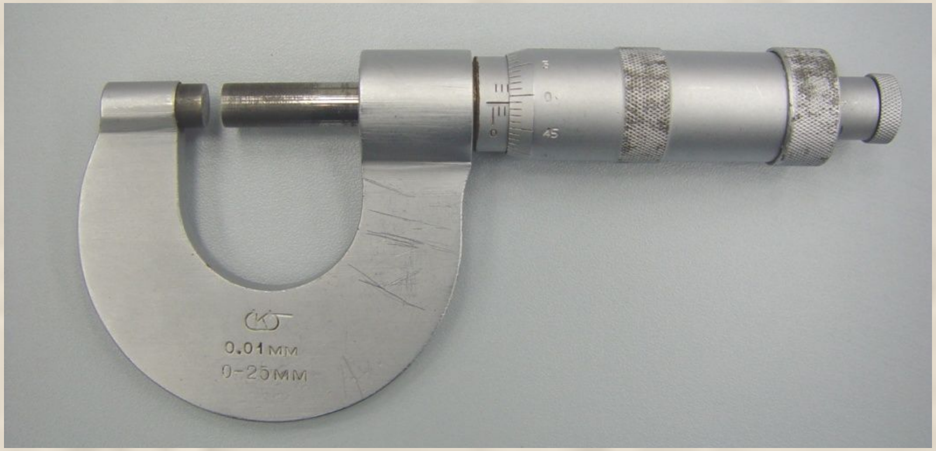
Основная шкала

Нониус

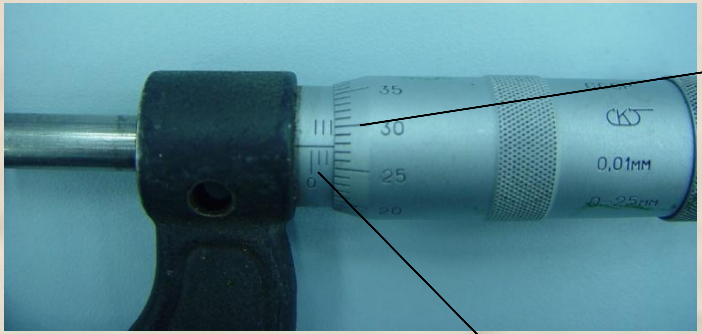
Цена деления нониуса 0,1 мм

ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Для измерительных приборов с дополнительной шкалой − нониусом (штангенциркуль, микрометр и т.п.) предел допускаемой инструментальной погрешности принимается равным цене деления нониуса.



Микрометр



Дополнительная шкала на барабанчике.

Цена деления барабанчика 0,01 мм

Основная шкала

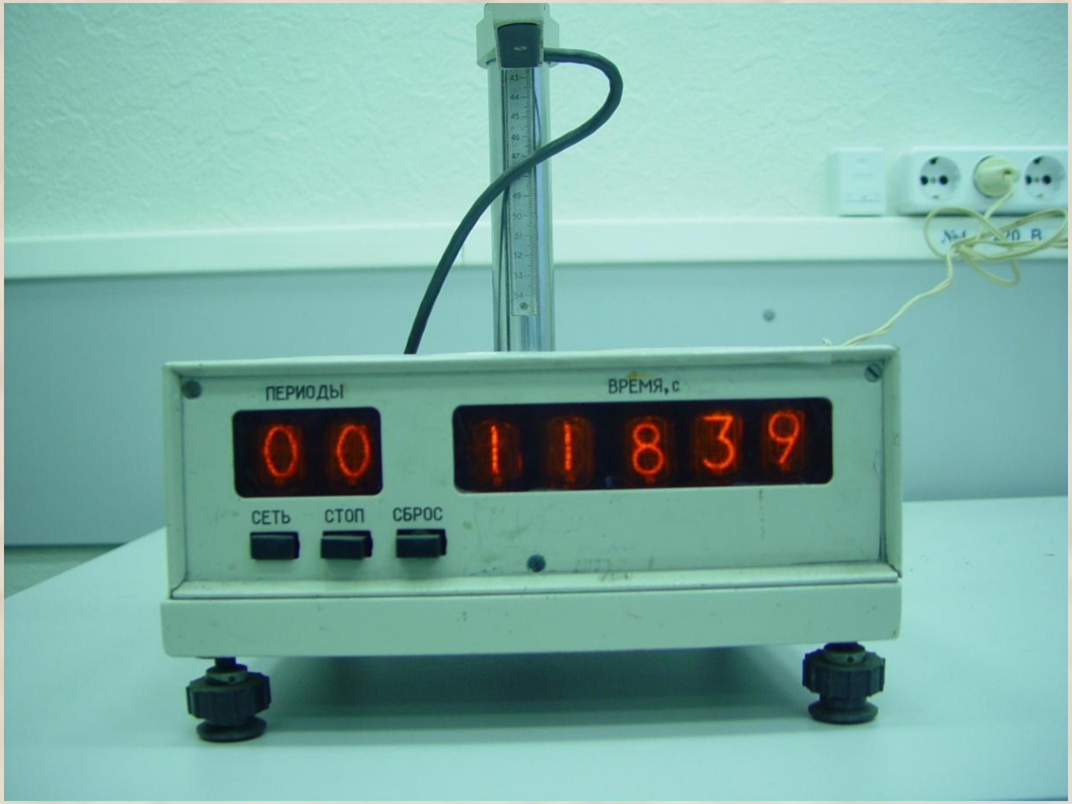
ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Для измерительных приборов со скачущей стрелкой (секундомер) предел допускаемой инструментальной погрешности принимается равным цене деления шкалы.

Цена деления шкалы секундомера 0,2 с

ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Для цифровых приборов для каждого предела измерения в паспорте приводится формула для определения относительной или абсолютной погрешности.



ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Случайная погрешность проявляется в разбросе экспериментальных данных при измерении одной и той же физической величины при одинаковых условиях и рассчитывается по формуле Стьюдента:

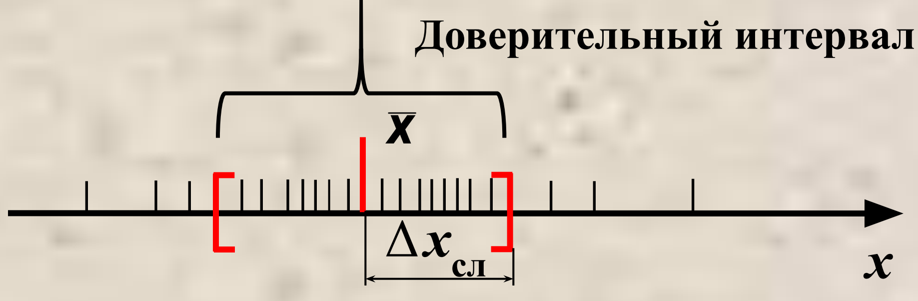
$$\Delta x_{\text{сл}} = t_{p,n} S_x ,$$

где $t_{p,n}$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений n; $\bar{x}$ – среднее арифметическое значение результатов измерений; x_i – результат текущего измерения; S_x – среднеквадратичное отклонение от среднего значения (дисперсия), вводится в математической статистике для оценки разброса результатов измерений от среднего арифметического.

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}} .$$

ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Доверительной вероятностью ***P*** называется вероятность, с которой доверительный интервал накрывает случайное отклонение результата наблюдения. Чем больше доверительная вероятность, тем больше ширина доверительного интервала. В рядовых физических экспериментах обычно выбирают $P = 0{,}95$. Это значит, что 95% измерений дадут значения, попадающие в доверительный интервал.



Еще один фактор, влияющий на ширину доверительного интервала – надежность данной серии экспериментов, чем больше число измерений n, тем более надежным является эксперимент и тем меньше ширина доверительного интервала.

Результирующая погрешность: $$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{сл})^2 + (\Delta x_{си})^2}.$$

Число измерений следует выбирать таким, чтобы случайная погрешность была меньше погрешности средств измерения.

ПОГРЕШНОСТЬ КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

При косвенном измерении искомое значение физической величины рассчитывают используя известную зависимость (формулу) между этой величиной и другими величинами, определяемыми путем прямых измерений.

В формулу кроме результатов прямых измерений могут входить также физические постоянные, табличные значения и данные экспериментальной установки.

Пусть при косвенном измерении искомое значение физической величины $\boldsymbol{y}$ находят из соотношения $\boldsymbol{y = f(x_1, x_2, x_3, ...)}$, где $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\dots\boldsymbol{x_i}$ – значения физических величин, найденные в результате прямых измерений, или заданные как данные установки.

Абсолютная погрешность косвенного измерения определяется по формуле

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta x_1)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2 + \dots},$$

где Δx_i – погрешности прямых измерений; $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ –частные производные.

ПОГРЕШНОСТЬ КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Если искомая величина определяется суммой

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots ,$$

то в этом случае удобно вывести формулу для абсолютной погрешности

$$\Delta y = \sqrt{\alpha_1^2 (\Delta x_1)^2 + \alpha_2^2 (\Delta x_2)^2 + \dots} \, .$$

Пример:

$$y = 2x_1 + 3x_2 ,$$

$$\Delta y = \sqrt{2^2 (\Delta x_1)^2 + 3^2 (\Delta x_2)^2} \, .$$

ПОГРЕШНОСТЬ КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Если искомая величина определяется произведением степенных функций

$$y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots ,$$

то в этом случае удобно сначала вывести формулу и вычислить относительную погрешность

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\alpha_1^2 \left(\delta_{x_1}\right)^2 + \alpha_2^2 \left(\delta_{x_2}\right)^2 + \dots} ,$$

и затем абсолютную погрешность

$$\Delta y = y \delta_y .$$

Пример:

$$y = x_1^2 x_2^2 x_3^{-0,5} ,$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{2^2 (\delta x_1)^2 + 3^2 (\delta x_2)^2 + (0,5)^2 (\delta x_3)^2} .$$

Учет погрешностей трансцендентных и иррациональных величин

Трансцендентные и иррациональные величины, физические постоянные, как правило, определены весьма точно. Например π = 3,14159…, число Авогадро N_A = (6,0220921 ± 0,0000062)·10^{23} 1/моль, ускорение свободного падения на широте Москвы g = (9,80655 ± 0,00005) м/с^2.

Обычно в расчетную формулу подставляют округленные значения таких величин:

$$\pi \approx 3{,}14 \qquad\qquad g \approx 9{,}81\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Если при этом взять на одну значащую цифру больше, чем число значащих цифр в результатах прямых измерений, то относительная погрешность округления будет заведомо много меньше относительной погрешности прямых измерений. В таком случае данное число можно считать точным и его погрешностью пренебречь.

Учет погрешностей трансцендентных и иррациональных величин

Пример. Пусть вычисляется площадь круга по формуле $S = \pi r^2$.

Формула для определения относительной погрешности имеет вид

$$\delta_S = \sqrt{\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2}.$$

В результате прямых измерений получено значение радиуса

$r = (1{,}35 \pm 0{,}03)$ см.

Если взять $\pi = 3{,}142$, то относительная погрешность округления числа π будет на два порядка меньше относительной погрешности измерения радиуса:

$$\delta_\pi = \frac{0{,}0004}{3{,}142} = 0{,}00013, \qquad \delta_r = \frac{0{,}03}{1{,}35} = 0{,}022.$$

В этом случае число π можно считать точным и относительную погрешность площади рассчитать по формуле

$$\delta_S = \sqrt{\cancel{\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2} + 4\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2} = 2\frac{\Delta r}{r}.$$

Учет погрешностей физических постоянных, табличных значений, данных установок

Погрешность табличных данных и данных установок принимается равной половине единицы последнего разряда значения, приведенного в таблице или на установке.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – это цифры.

− 65,32 − это число. Число состоит из знака, цифр и разделителя.

разряд сотых
разряд десятых
разряд единиц
разряд десятков

Половина единицы разряда сотых – 0,005

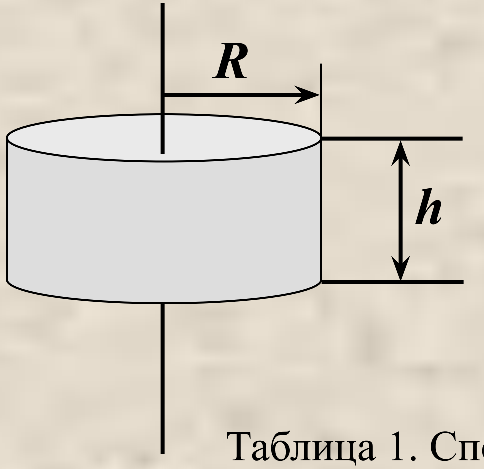
$m = 123{,}4$ г $\qquad \dfrac{\mathbf{0{,}1}}{\mathbf{2}} \qquad \Delta m = \pm 0{,}05$ г

$l = 123$ мм, $\qquad \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \Delta l = \pm\, 0{,}5$ мм

$\tau = 123{,}02$ с, $\qquad \dfrac{\mathbf{0{,}01}}{\mathbf{2}} \qquad \Delta \tau = \pm\, 0{,}005$ с

ПРИМЕР ИЗМЕРЕНИЙ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Необходимо определить объем цилиндра радиусом ***R*** и высотой ***h*.**



Радиус цилиндра задан ***R*** = 18 мм.

Высота цилиндра ***h*** определяется путем прямого измерения. Измерения проводятся штангенциркулем с ценой деления нониуса 0,1 мм.

Объем рассчитываем по формуле:

$$V = \pi R^2 h.$$

Таблица 1. Спецификация измерительных приборов

Название прибора и его тип	Пределы измерения	Цена деления	Предел допускаемой инструментальной погрешности
Штангенциркуль	0 -150 мм	0,1 мм	0,1 мм

Данные установки:

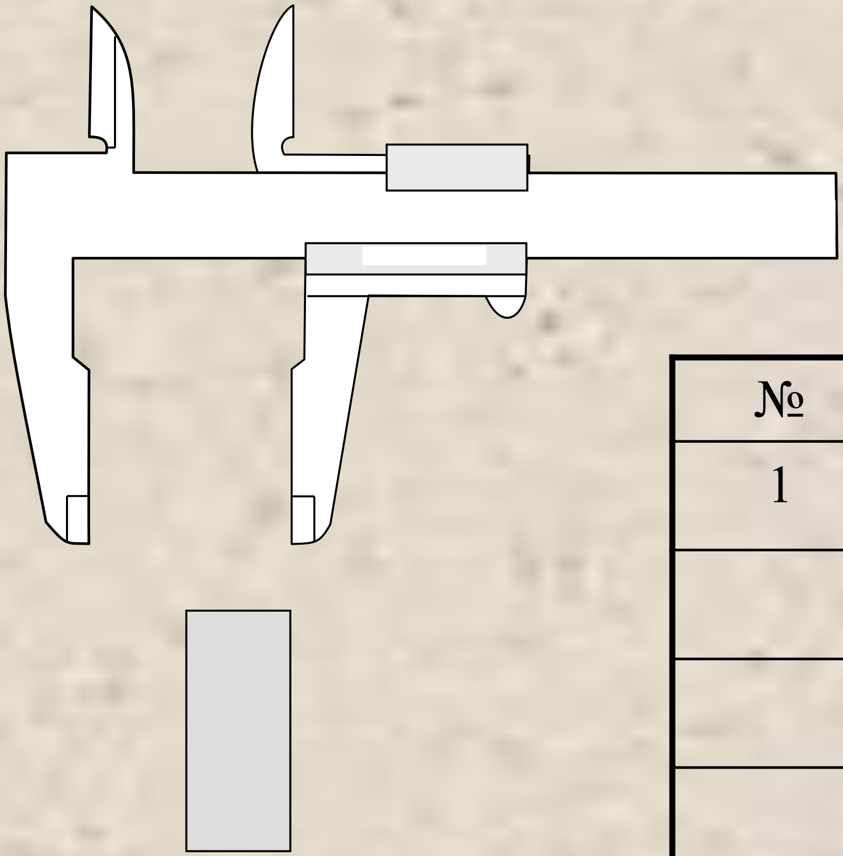
R = 18 мм; ΔR = ± 0,5 мм.

Измерим высоту цилиндра пять раз с помощью штангенциркуля. Результаты измерений запишем в табл.2.

Таблица 2. Измерение высоты образующей цилиндра

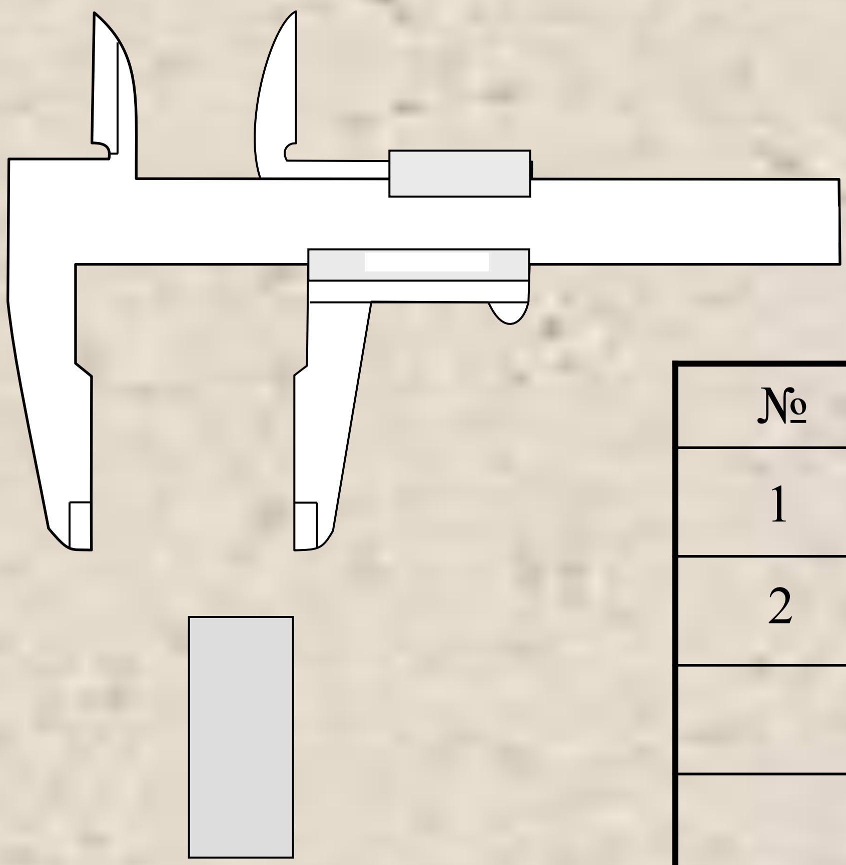
№	h, мм

Прямое измерение высоты цилиндра



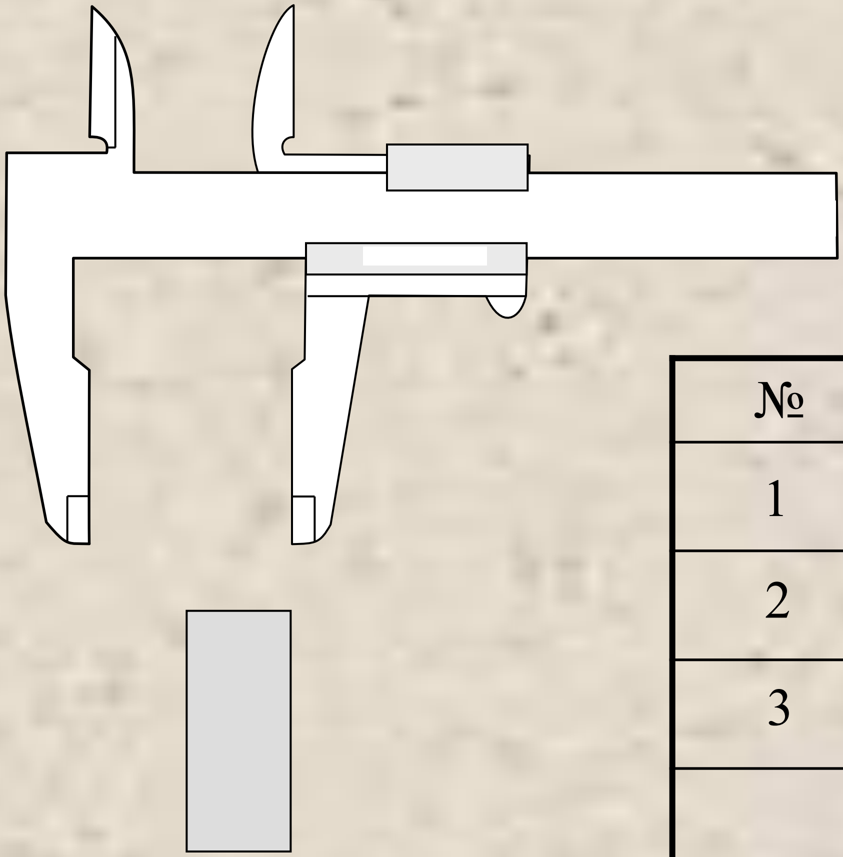
№	h, мм
1	12,3

Прямое измерение высоты цилиндра



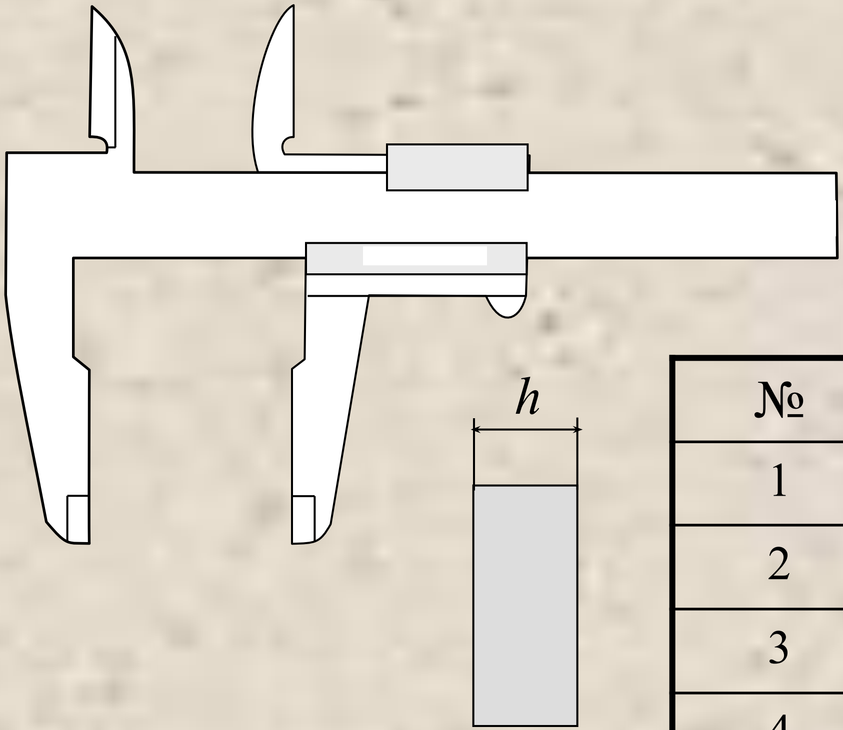
№	*h*, мм
1	12,3
2	12,1

Прямое измерение высоты цилиндра



№	*h*, мм
1	12,3
2	12,1
3	12,2

Прямое измерение высоты цилиндра



№	h, мм
1	12,3
2	12,1
3	12,2
4	12,3
5	12,1

Статистическая обработка результатов измерения

Таблица 2. Измерение высоты образующей цилиндра

№	h, мм
1	12,3
2	12,1
3	12,2
4	12,3
5	12,1

По результатам измерений определим среднее значение ***h***:

$$h_{ср} = \frac{12{,}3 + 12{,}1 + 12{,}2 + 12{,}3 + 12{,}1}{5} = 12{,}2 \text{ мм}$$

Рассчитаем объем цилиндра по среднему значению ***h*** (возьмем число **π = 3,14** – на одну цифру после запятой больше, чем в значении высоты):

$$V_{ср} = \pi R^2 h_{ср} = 3{,}14 \cdot (18)^2 \cdot 12{,}2 = 12411{,}792 \text{ мм}^3$$

Статистическая обработка результатов измерения

Выведем из расчетной формулы

$$V = \pi R^2 h$$

формулу для вычисления относительной погрешности :

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

Относительной погрешность числа числа π можно пренебречь.

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

Статистическая обработка результатов измерения

№	h, мм
1	12,3
2	12,1
3	12,2
4	12,3
5	12,1

Определим погрешность прямого измерения ***h*.**

Погрешность средств измерения:

$$\Delta h_{\text{си}} = \frac{\Delta_{\text{пр}}}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{3}} = 0{,}068.$$

Случайную погрешность $\Delta h_{\text{сл}}$ вычисляем по формуле

$$\Delta h_{\text{сл}} = t_{p,n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(h_i - h_{\text{ср}}\right)^2}{n(n-1)}}\,.$$

Для доверительной вероятности $P = 0{,}95$ и числа измерений $n = 5$ коэффициент Стьюдента $t_{p,n}$ **= 2,776 (**значения коэффициента Стьюдента приведены в таблице) .

$$\Delta h_{\text{сл}} = 2{,}776 \cdot \sqrt{\frac{(12{,}3-12{,}2)^2 + (12{,}1-12{,}2)^2 + (12{,}2-12{,}2)^2 + (12{,}3-12{,}2)^2 + (12{,}1-12{,}2)^2}{5 \cdot 4}}\,.$$

$\Delta h_{\text{сл}} = 0{,}34$ **мм**

Результирующая абсолютная погрешность:

$$\Delta h = \sqrt{\left(\Delta h_{\text{сл}}\right)^2 + \left(\Delta h_{\text{си}}\right)^2} = \sqrt{(0{,}34)^2 + (0{,}068)^2} \approx 0{,}369 \text{ мм}$$

Статистическая обработка результатов измерения

Вычислим относительную погрешность измерения высоты и радиуса цилиндра:

$$\delta_h = \frac{\Delta h}{h_{\text{ср}}} = \frac{0{,}396}{12{,}2} = 0{,}033\,, \qquad \delta_R = \frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}5}{18} = 0{,}028\,.$$

Относительная погрешность объема цилиндра рассчитывается по формуле:

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = \sqrt{4(0{,}028)^2 + (0{,}033)^2} = 0{,}065$$

Вычислим абсолютную погрешность измерения объема цилиндра:

$$\Delta V = \delta_V V_{\text{ср}} = 0{,}065 \cdot 12411{,}792 = 806{,}767 \text{ мм}^3.$$

$$V_{\text{ср}} = 12411{,}792 \text{ мм}^3.$$

Как правильно округлить значение погрешности и среднего значения?

Правила округления результатов измерений

Сначала округляется значение абсолютной погрешности:

– если первая значащая цифра 1 или 2, то значение погрешности округляется до двух значащих цифр;

13,85 → 14

первая цифра 1 Округляем до двух цифр

$0,125 \approx 0,13$ $1,037 \approx 1,0$ $0,235 \approx 0,24$ $165,43 \approx 1,7 \cdot 10^2$

– если первая значащая цифра 3, 4,... , 9, то значение погрешности округляется до одной значащей цифры.

3,85 → 4

первая цифра 3 Округляем до одной цифры

$0,502 \approx 0,5$ $7,434 \approx 7$ $0,045 \approx 0,05$ $735,32 \approx 7 \cdot 10^2$

Правила округления результатов измерений

Затем округляется среднее значение измеряемой величины:

- последняя значащая цифра в среднем значении должна стоять в том же разряде, что и последняя значащая цифра в округленном значении абсолютной погрешности.

Среднее значение: 163,248 мм Погрешность: 0,235 мм

163,25 мм ⟵ 0,24 мм

$$l = (163{,}25 \pm 0{,}24)\ \text{мм}$$

$$(467{,}202 \pm 0{,}502) \approx (467{,}2 \pm 0{,}5)$$

$$(123{,}072 \pm 1{,}04) \approx (123{,}1 \pm 1{,}0)$$

$$(1234{,}5 \pm 165{,}4) \approx (1{,}23 \pm 0{,}17) \cdot 10^3$$

Запись окончательного результата измерений

Запишем окончательный результат измерения объема цилиндра:

$\Delta V = 806{,}767$ мм^3 $\Rightarrow$ $8 \cdot 10^2$ мм^3

$V_{ср} = 12411{,}792$ мм^3 $\Rightarrow$ $124 \cdot 10^2$ мм^3

$$V = (124 \pm 8) \cdot 10^2 \text{ мм}^3, \quad P = 0{,}95$$

или

$$V = (12{,}4 \pm 0{,}8) \text{ см}^3, \quad P = 0{,}95$$

Выход