

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Курс лекций

**Лектор: к.т.н., доц. Морозова
Ирина Георгиевна**

ЛИТЕРАТУРА

1. Степин П.А. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 2000.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2000.
3. № 880. Шинкин В.Н. Сопротивление материалов. Курс лекций. 2005.
4. № 1840. Архангельский А.В., Белов М.И. Прикладная механика. Учебно-методическое пособие. 2003.

Исходные понятия и определения

Сопротивление материалов – наука о расчете элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость.

- **Прочность** – свойство материала, не разрушаясь, воспринимать внешние воздействия (нагрузки, температуры и др.).
- **Жесткость** - способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформаций.
- **Устойчивость** - способность конструкций сопротивляться усилиям, стремящимся вывести их из состояния равновесия.

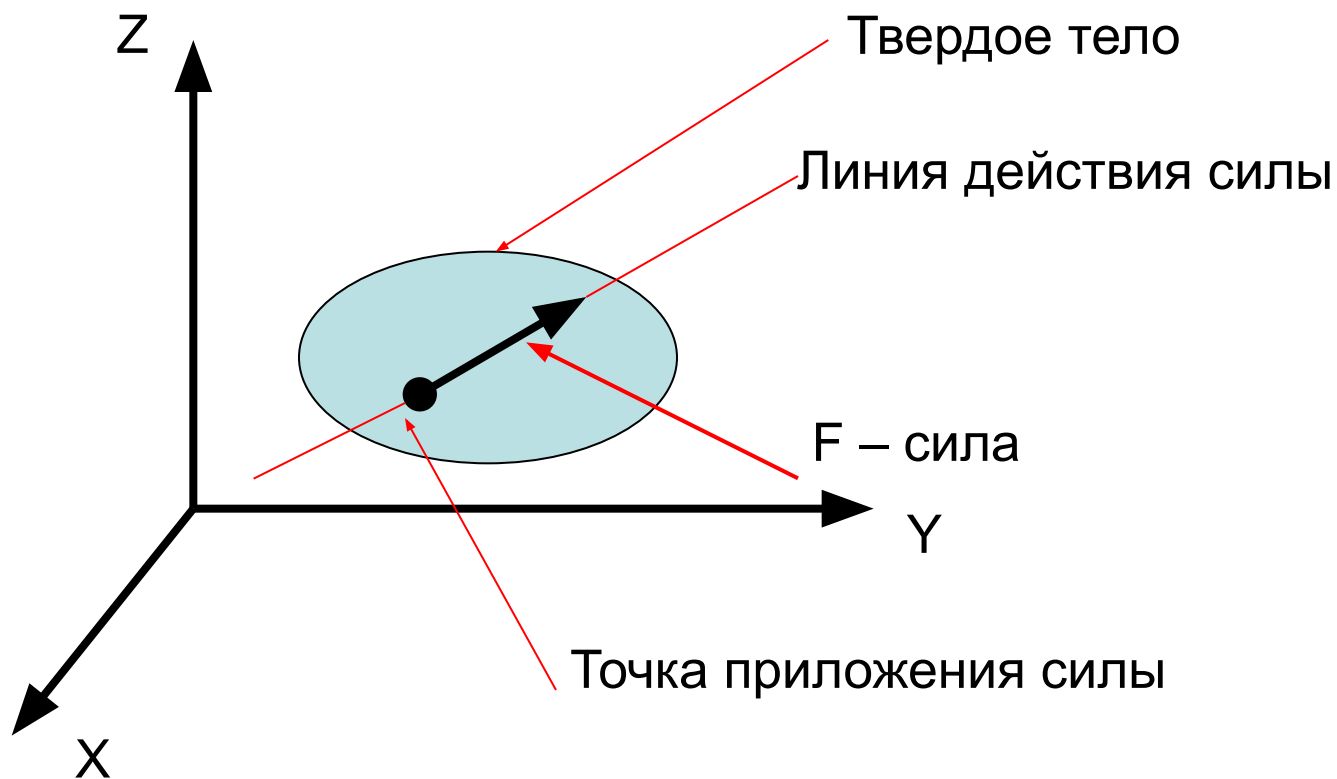
Основные понятия статики

- **Статика** – раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.
- **Абсолютно твердое тело** – тело, расстояния между любыми точками которого остаются неизменными. Условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, используют при изучении действия сил на деформируемое тело с соответствующими дополнениями

Основные понятия статики

- **Сила** есть мера механического взаимодействия твердых тел, в результате которого тела могут приобретать ускорение или деформироваться.
- **Сила** – векторная величина, характеризуемая **модулем, точкой приложения и направлением**.

Основные понятия статики



Основные понятия статики

- **Система сил** — совокупность нескольких сил, действующих на данное тело.
- Сила, эквивалентная некоторой системе сил — **равнодействующая сила**.
- **Внешние силы** — действуют на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел) не принадлежащих этой системе.
- **Внутренние силы** — силы взаимодействия между телами данной системы.

Аксиомы статики

- 1. Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно. (Закон инерции Галилея).
- 2. Две силы, приложенные к твердому телу взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны и они направлены по одной прямой в противоположные стороны (уравновешивающие силы).

Аксиомы статики

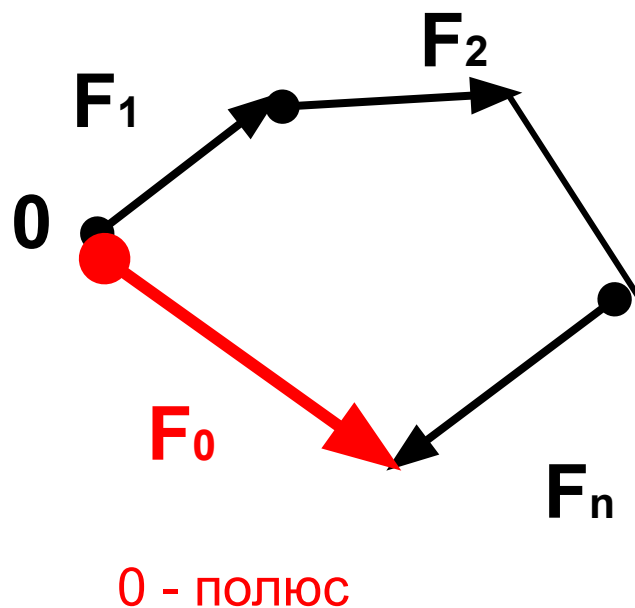
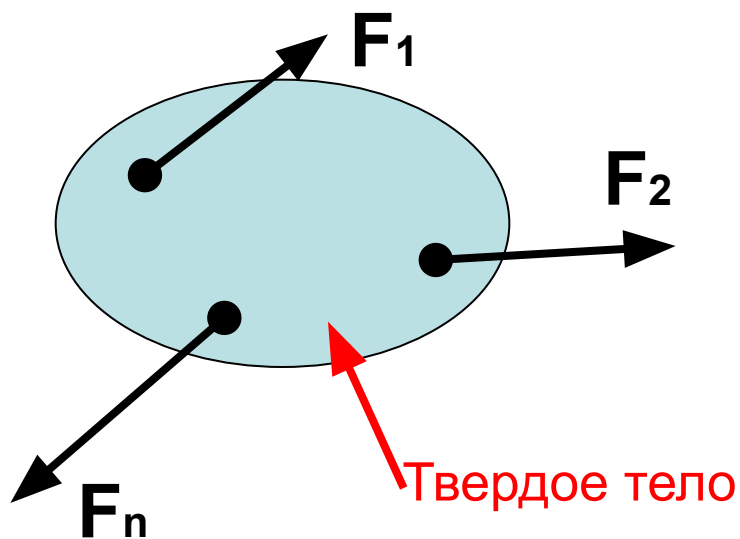
- 3. Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил. **Следствие:**
- **Не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия, сохраняя неизменным ее модуль и направление.**

Аксиомы статики

- 4. Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.
- 5. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие (закон Ньютона).

Основные понятия статики

- Главный вектор системы сил – их геометрическая сумма



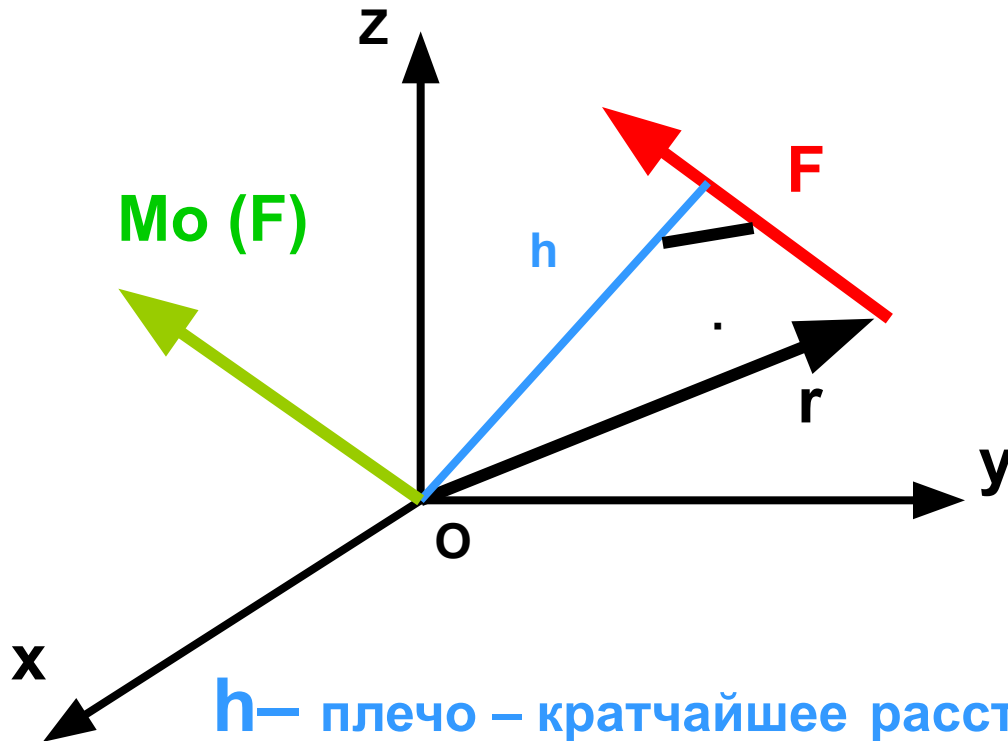
Основные понятия статики

Момент силы относительно точки –

векторное произведение радиус - вектора точки приложения силы на вектор силы. Вектор момента силы перпендикулярен вектору силы и радиус – вектору.

$$\overline{M}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

Основные понятия статики



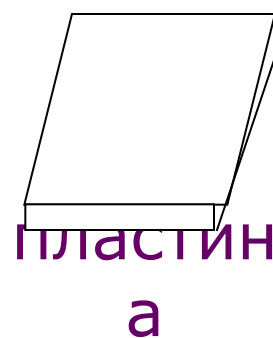
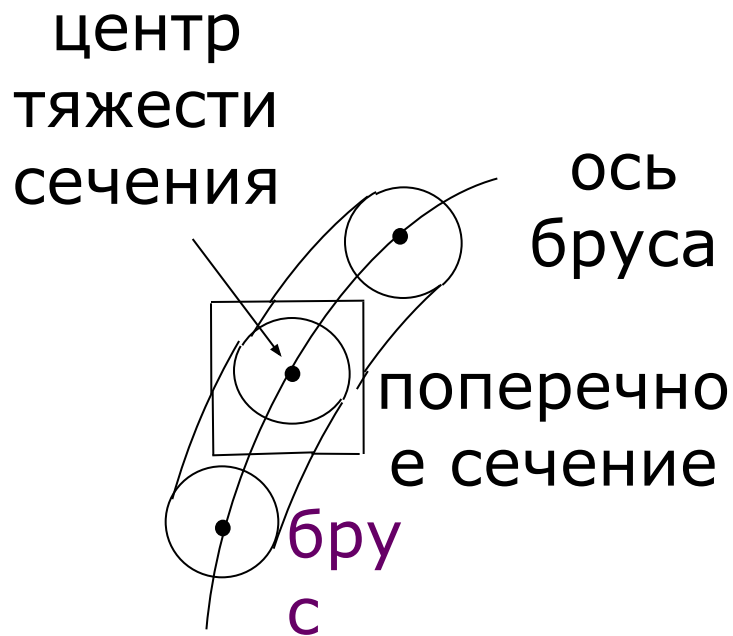
h – плечо – кратчайшее расстояние от полюса до линии действия силы (перпендикуляр).

Основные понятия статики

- **Главный момент M_0 системы сил** относительно выбранной точки – геометрическая сумма моментов всех сил относительно этой точки.
- **Необходимое и достаточное условие равновесия системы сил:**

$$\overline{F}_0 = 0 \quad \overline{M}_0 = 0$$

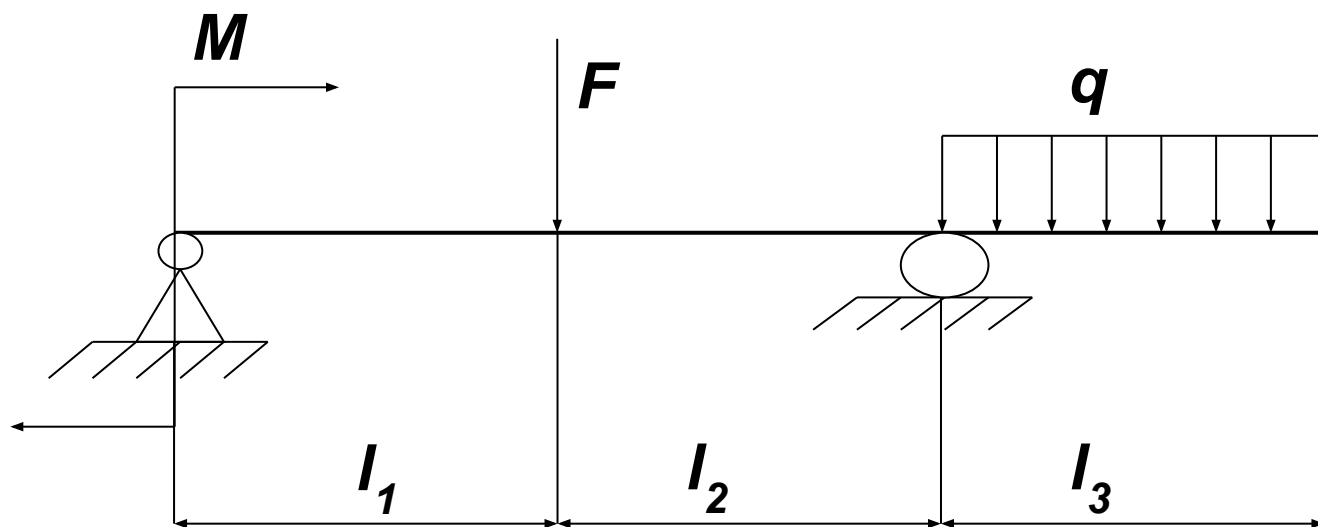
Схематизация элементов конструкций



Виды внешних нагрузок

- **Сосредоточенная сила F** – сила, которую можно считать приложенной в точке, H .
- **Распределенная сила** действует вдоль линии (линейная нагрузка q , H/m), на некоторой площадке (поверхностное давление p , H/m^2) или в некотором объеме (объемные силы γ , H/m^3).
- **Сосредоточенный момент M** – момент, который можно считать приложенным в точке; размерность – $H \cdot m$.
- **Распределенный момент m** действует вдоль линии, $H \cdot m/m$.

Виды нагрузок

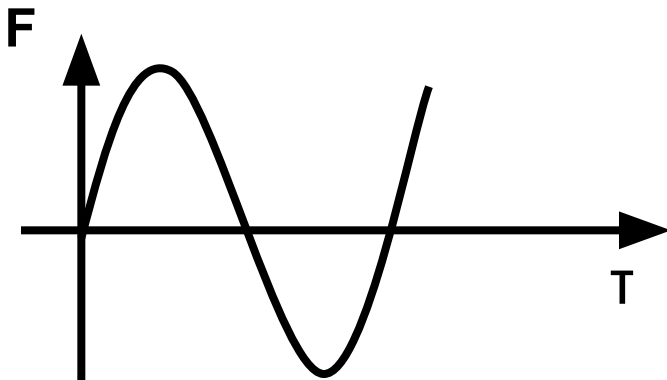


Виды нагрузок

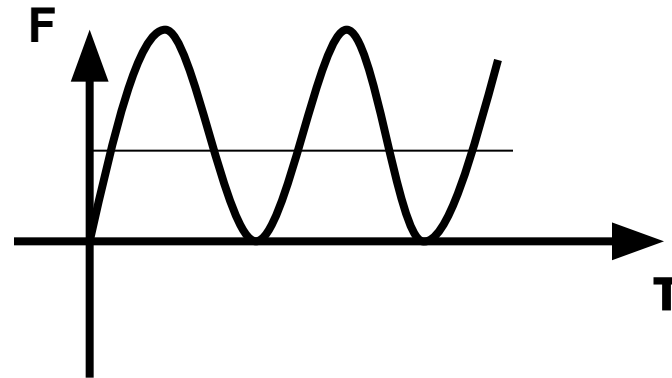
- **Статические** – не изменяющиеся или очень мало изменяющиеся.
- **Динамические** – ударные.
- **Повторно-периодические** - циклические

Изменение нагрузок во времени

симметричный цикл



отнулевой цикл



Опорные реакции

- Твердое тело называют свободным, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.
- Связь – тело ограничивающее движение данного твердого тела.
- Силы, действующие на несвободное твердое тело:
 1. Внешние и внутренние;
 2. Задаваемые (активные);
 3. Реакции связей (силы, выражающие механическое действие связей на тело) .

Опорные реакции

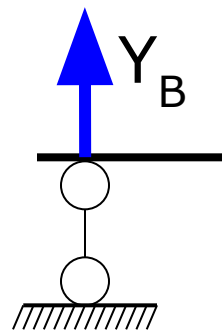
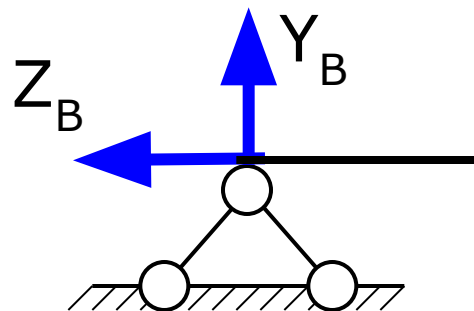
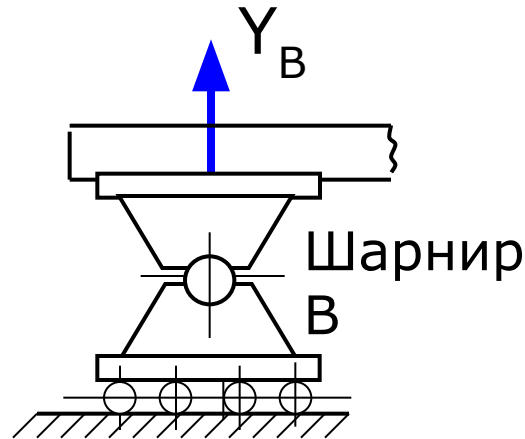
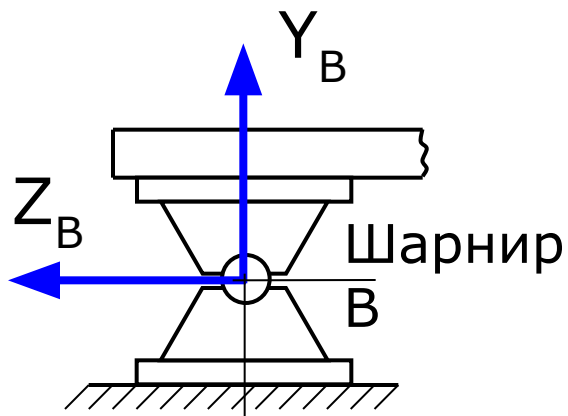
- Принцип освобождаемости твердых тел от связей:
- Несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое кроме задаваемых сил, действуют реакции связей.

Классификация опор и опорные реакции

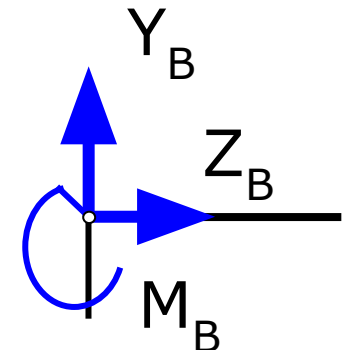
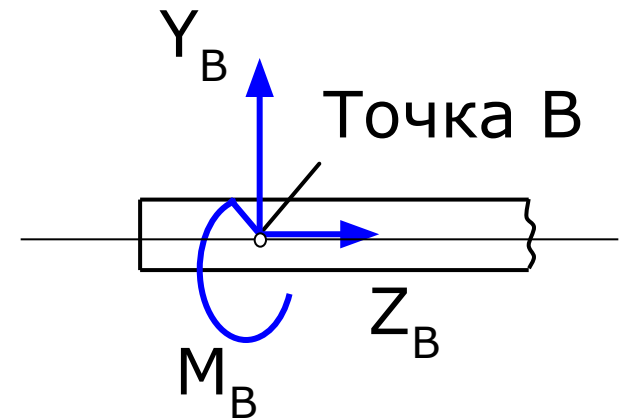
Шарнирные опоры

неподвижная

подвижная



Жесткая заделка

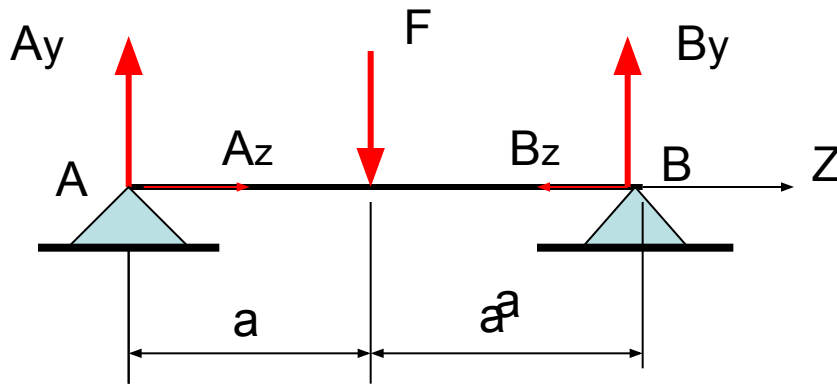


Определение опорных реакций

Уравнения равновесия для определения опорных реакций можно составить несколькими способами. Выбор точек, направление осей и системы уравнений осуществляется конкретно в каждом случае так, чтобы была возможность совместного решения уравнений. Например:

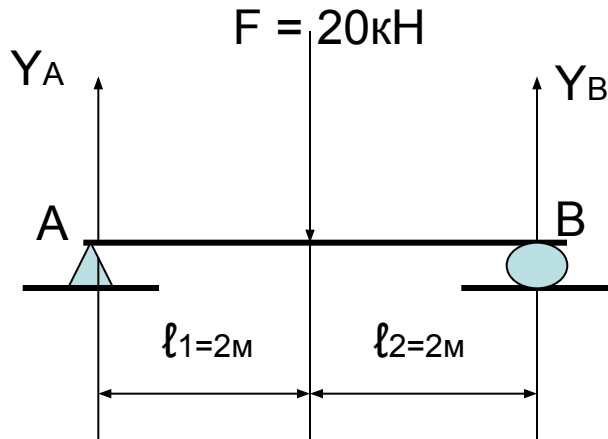
1. $\sum Z = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0.$
2. $\sum Z = 0; \sum M_a = 0; \sum M_b = 0.$
3. $\sum M_a = 0; \sum M_b = 0; \sum M_c = 0$

Определение опорных реакций

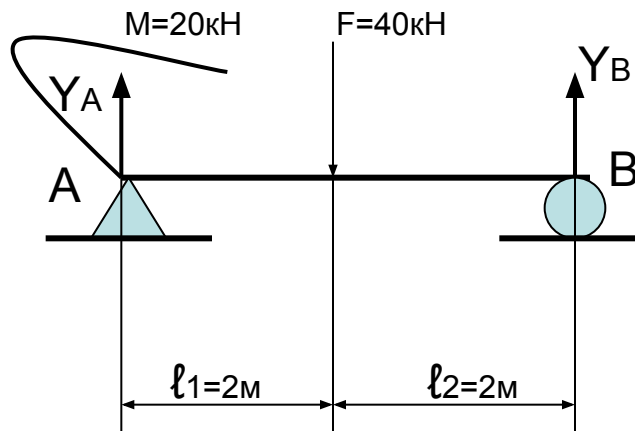


1. Приравняем к нулю сумму всех сил, действующих на балку вдоль оси: $\sum Z = 0$ так как горизонтальная нагрузка отсутствует, то $A_z = 0$ и $B_z = 0$.
2. Составим уравнение балки в виде суммы моментов, действующих на нее относительно точки A, задаваясь положительным и отрицательным направлением моментов: $\sum M_A = -Fa + B_y 2a = 0 \longrightarrow B_y = F / 2$
3. Аналогично относительно точки B: $\sum M_B = Fa - A_y 2a = 0 \longrightarrow A_y = F / 2$
4. Если опорные реакции имеют отрицательный знак, то меняем их направление на противоположное.
5. Осуществим проверку правильности вычислений: $\sum Y = 0$.

Определение опорных реакций

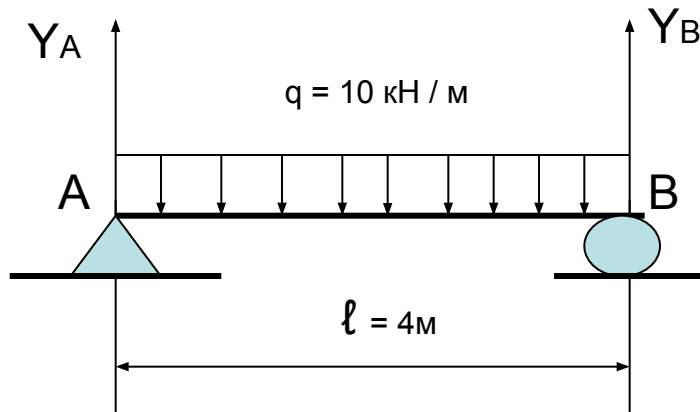


$$\begin{aligned}\sum Z &= 0 \\ \sum M_A &= -F l_1 + Y_B (l_1 + l_2) = 0 \\ Y_B &= 20 \cdot 2 / 4 = 10 \text{ кН} \\ \sum M_B &= -Y_A (l_1 + l_2) + F l_2 \\ Y_A &= F l_2 / (l_1 + l_2) = 10 \text{ кН} \\ \text{Проверка: } \sum Y &= 0\end{aligned}$$

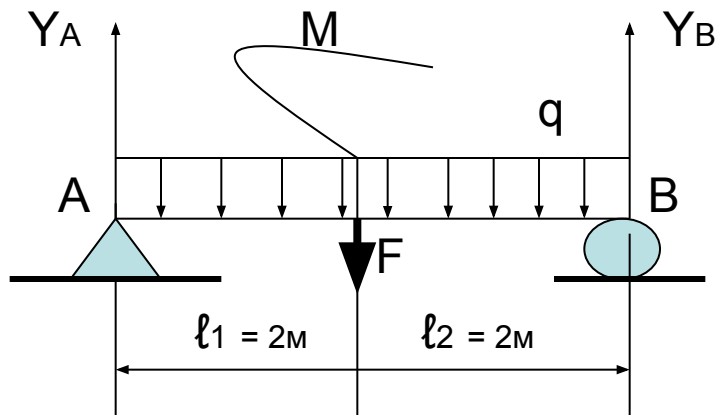


$$\begin{aligned}\sum Z &= 0 \\ \sum M_A &= -M - F l_1 + Y_B (l_1 + l_2) \\ Y_B &= 25 \text{ кН} \\ \sum M_B &= -M + F l_2 + Y_A (l_1 + l_2) \\ Y_A &= 15 \text{ кН} \\ \text{Проверка: } \sum Y &= 0 = Y_A - F + Y_B\end{aligned}$$

Определение опорных реакций



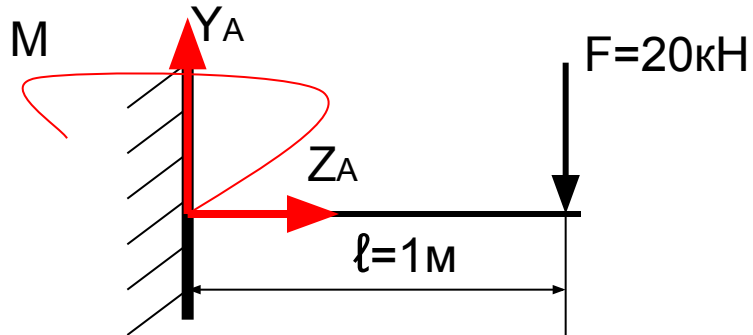
$$\begin{aligned} \sum Z &= 0 \\ \sum M_A &= -q l \cdot l/2 + Y_B l = 0 \\ Y_B &= 20\text{кН} \\ \sum M_B &= q l \cdot l/2 - Y_A l = 0 \\ Y_A &= 20\text{кН} \\ \text{Проверка: } \sum Y &= 0 \end{aligned}$$



$$q = 10\text{кН/м}; F = \text{кН}; M = 20\text{кНм}$$

$$\begin{aligned} \sum Z &= 0 \\ \sum M_A &= -q l \cdot l/2 - F l_1 - M + Y_B (l_1 + l_2) \\ Y_B &= 30\text{кН} \\ \sum M_B &= q l \cdot l/2 + F l_2 - M - Y_A (l_1 + l_2) \\ Y_A &= 20\text{кН} \\ \text{Проверка: } \sum Y &= 0 \end{aligned}$$

Определение опорных реакций



$$\sum Z = 0$$

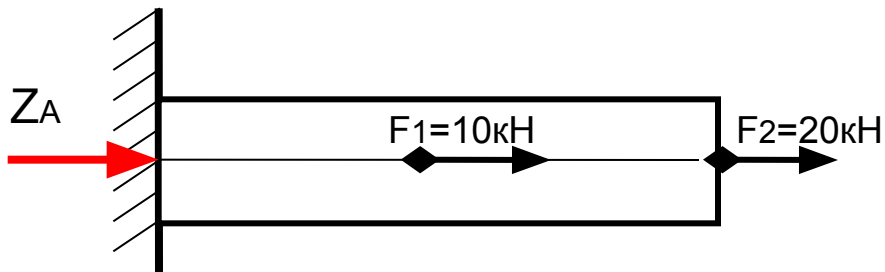
$$\sum M_A = M - F l = 0$$

$$M = 20 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = M - Y_A l$$

$$Y_A = M / l$$

$$Y_A = 20 \text{ кН}$$



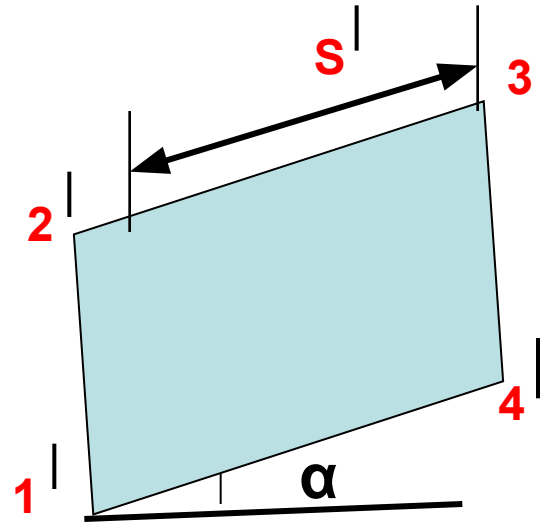
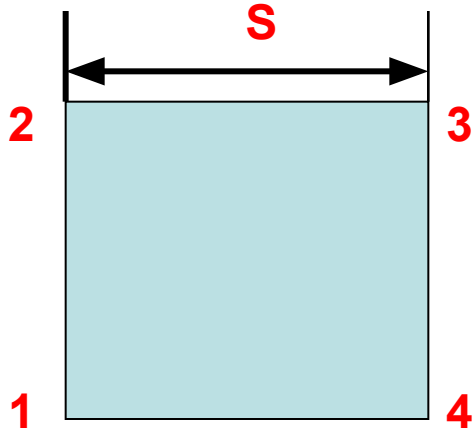
$$\sum Z = Z_A + F_1 + F_2 = 0$$

$$Z_A = -30 \text{ кН}$$

Виды деформаций

- **Деформации** (изменения размеров и формы тела) возникают под действием нагрузок.
- **Линейные деформации** – изменение линейных размеров.
- **Угловые деформации** – изменение угловых размеров.

Виды деформаций



$$S' = \Delta S + S$$

α – угловая деформация

$\epsilon = \Delta S / S$ – средняя линейная деформация

Основные допущения о свойствах материалов

- материал имеет **сплошное** (непрерывное) строение;
- материал **однороден**, т.е. его свойства во всех точках одинаковы;
- материал **изотропен**, т.е. его свойства во всех направлениях одинаковы;
- материал **упруг**, т.е. после снятия внешних воздействий он полностью восстанавливает свои размеры и форму.

Гипотезы о характере деформаций

- **гипотеза плоских сечений Бернулли** – сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации;
- **гипотеза о ненадавливании волокон** – волокна могут деформироваться только под действием усилий, направленных вдоль них;
- **закон Гука** – упругие деформации прямо пропорциональны приложенной нагрузке.

Гипотезы о характере деформаций и другие принципы

- **Гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий.**
- **Принцип неизменности начальных размеров** - деформации малы по сравнению с первоначальными размерами тела.
- **Принцип независимости действия сил** - результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, приложенных к телу последовательно и в любом порядке.

Принцип Сен - Венана

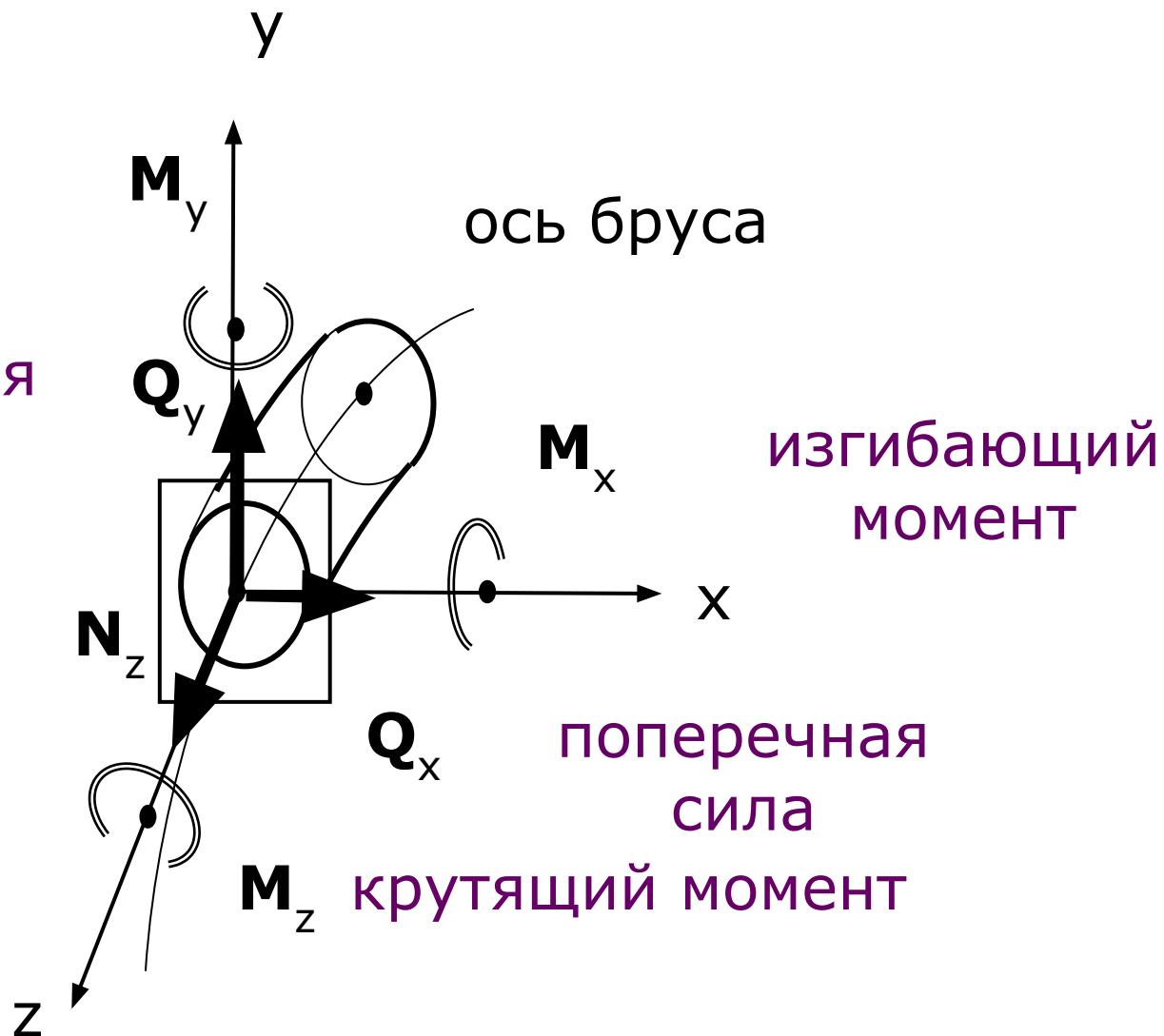
- В точках тела достаточно удаленных от места приложения нагрузок, внутренние силы мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок.

Внутренние силовые факторы (наиболее общий случай)

изгибающий
момент

поперечная
сила

продольная
сила



Внутренние силовые факторы (частные случаи)

- Если в сечении под воздействием внешних нагрузок (к ним относятся и опорные реакции) возникает только:
 1. продольная сила N_z – случай нагружения - растяжение (сжатие);
 2. изгибающий момент $M_x (M_y)$ — изгиб (чистый);
 3. поперечная сила $Q_x (Q_y)$ – сдвиг;
 4. крутящий момент M_z – кручение.

Метод сечений

(для определения внутренних силовых факторов)

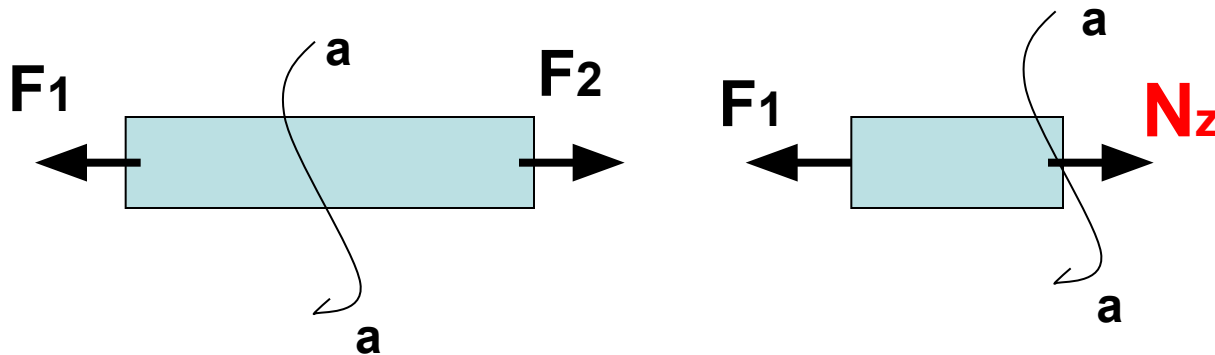
1. Мысленно рассекают брус на две части поперечной плоскостью, перпендикулярной оси бруса;
2. Отбрасывают одну из частей и взаимодействие частей друг с другом заменяют внутренними усилиями, которые уравновешивают внешние силы, действующие на отсеченную часть.

Метод сечений (для определения ВСФ)

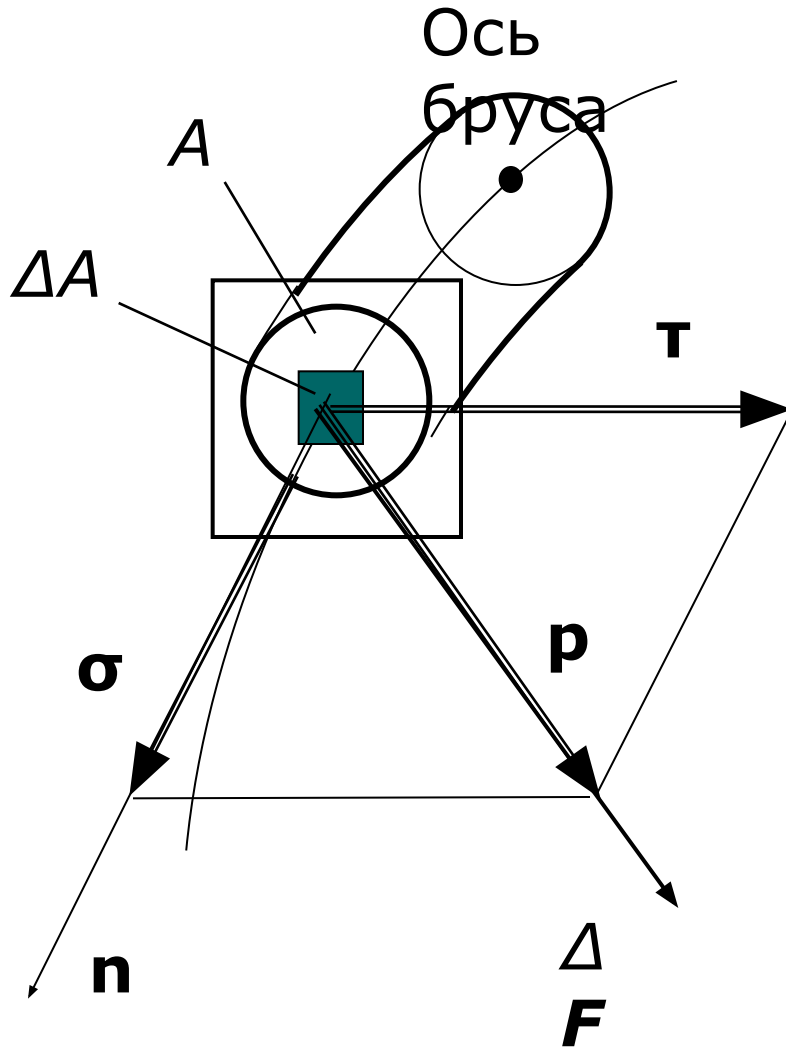
3. Составляют уравнения равновесия:

$$\sum Y=0; \sum X=0; \sum Z=0; \sum M_y=0; \sum M_x=0; \sum M_z=0.$$

4. Определяют внутренние силовые факторы.



Напряжение — внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке данного сечения



Напряжение, *Па*:

p – полное,

σ – нормальное,

τ – касательное. -

Напряжения

- Среднее напряжение, приходящееся на единицу площади ΔA :

$$P_m = \Delta F / \Delta A$$

Уменьшая размеры площадки до предела, получим истинное напряжение или напряжение в данной точке данного сечения:

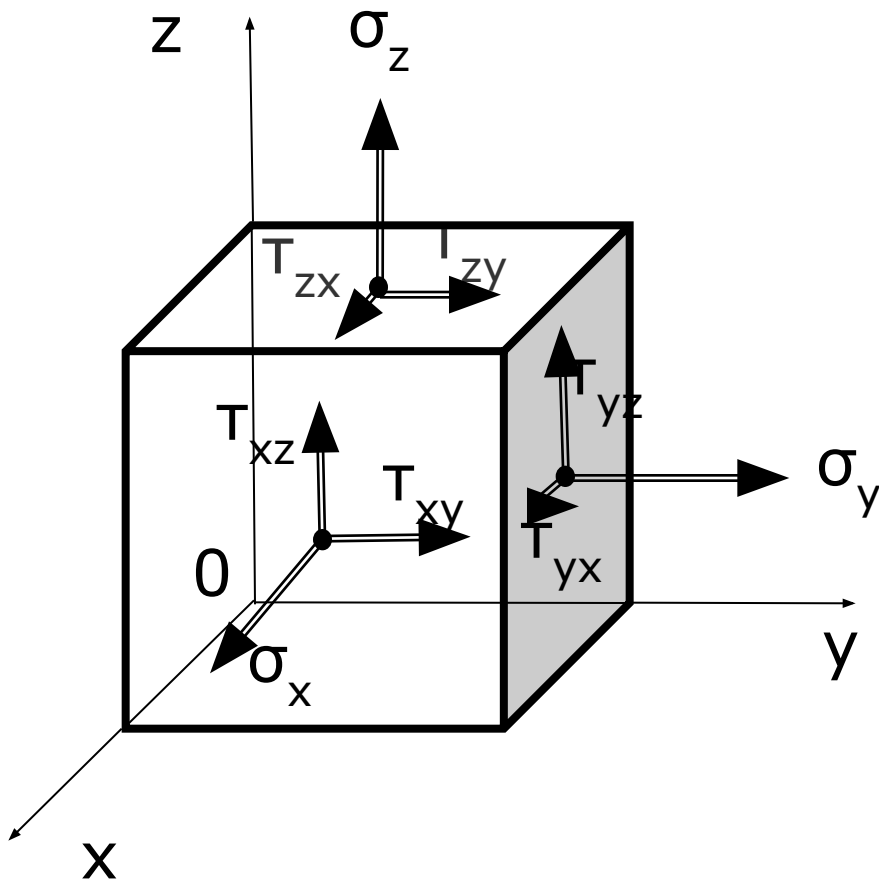
$$P = \lim \Delta F / \Delta A \quad \text{при} \quad \Delta A \rightarrow 0$$

Напряженное состояние в данной точке

- это совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через данную точку.

Рассмотрим элементарный (бесконечно малый) куб, ребра которого параллельны осям координат.

Напряженное состояние в данной точке



σ – имеет индекс оси, которой оно //

T – имеет 2 индекса:

1. - указывает какой оси // нормаль к dA ;
2. - какой оси // само касательное напряжение

Главные площадки и главные напряжения

- Главными площадками напряжений называют площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения τ
- Главные напряжения - нормальные напряжения σ , действующие на главных площадках. ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – с учетом знака).
- В каждой точке напряженного тела существуют три главные взаимно перпендикулярные площадки.

Виды напряженного состояния

1. Объемное напряженное состояние:
 $\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \sigma_3 \neq 0$.
2. Плоское напряженное состояние: одно из главных напряжений = 0.
3. Линейное напряженное состояние: два главных напряжения = 0.

Условие прочности для простейших случаев:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \qquad \tau_{\max} \leq [\tau]$$

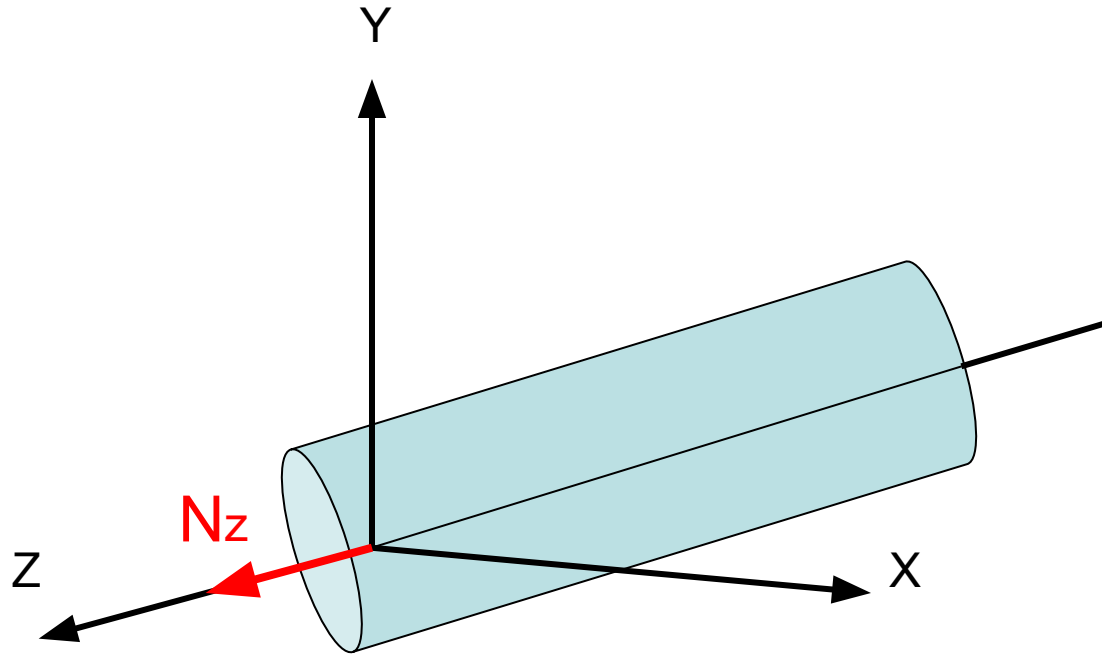
Центральное растяжение и сжатие

- Центральным растяжением (сжатием) называют вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса действует только одна продольная сила, приложенная к центру тяжести сечения.
- **Основные гипотезы:** гипотеза о ненадавливании продольных волокон, гипотеза плоских сечений Бернулли, принцип Сен-Венана.

Центральное растяжение и сжатие

- **гипотеза плоских сечений Бернулли** – сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации;
- **гипотеза о ненадавливании волокон** – волокна могут деформироваться только под действием усилий, направленных вдоль них;
- **принцип Сен-Венана** – В точках тела достаточно удаленных от места приложения нагрузок, внутренние силы мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок.

Центральное растяжение и сжатие



N_z – продольная сила – внутренний силовой фактор при центральном растяжении /(сжатии).

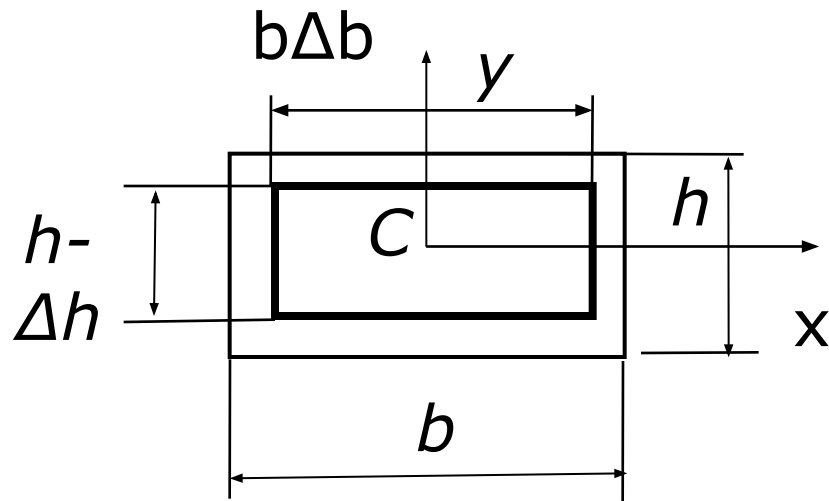
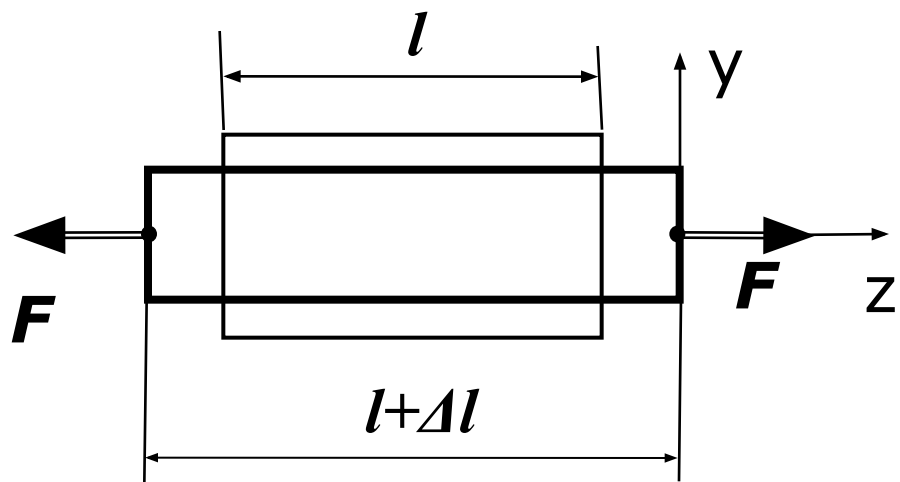
Построение эпюры N_z при центральном растяжении (сжатии)

1. Брус заменяют расчетной схемой, изобразив его ось с приложенными к ней внешними силами (в т. ч. опорными реакциями).
2. Для определения продольной силы N_z используют метод сечений.
3. При построении эпюры продольных сил брус делят на участки для которых материал однороден; $F = \text{const}$; $A = \text{const}$.

Проверка правильности построения эпюр N_z

1. Если в сечении проложена сосредоточенная сила, то на эпюре имеет место скачок равный по величине этой силе.
2. Если участок балки находится в состоянии сжатия то продольная сила меньше нуля и наоборот при растяжении она положительна.
3. При наличии распределенной нагрузки продольная сила изменяется по линейному закону; в противном случае продольная сила постоянна.

Деформации при растяжении и сжатии



$$\varepsilon = \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{- относительная продольная деформация}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_y = -\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon^o \quad \text{- относительная поперечная деформации}$$

Закон Гука. Коэффициент Пуассона.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- напряжение при растяжении и сжатии, **N/mm^2 (МПа).**

$$\varepsilon^{\circ} = \mu \varepsilon$$

μ – коэффициент Пуассона, $0 \leq \mu \leq 0,5$.

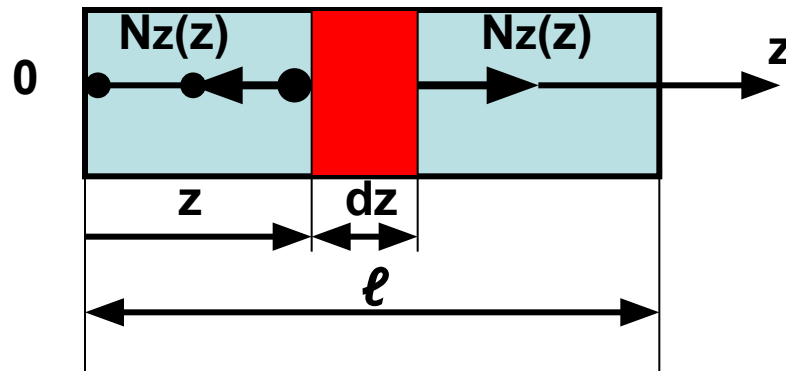
$$\sigma = E \varepsilon$$

- **Закон Гука**, где E – модуль продольной упругости (Юнга), **N/mm^2 (МПа).**

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

- удлинение стержня

Абсолютное удлинение стержня под действием произвольной системы сил



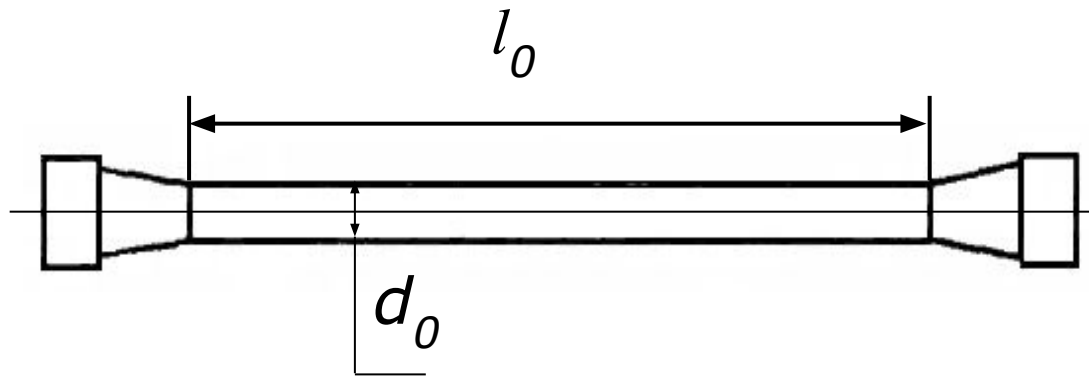
$$\Delta l = \int_0^l \frac{Nz(z)}{EA(z)} dz$$

При $A=\text{const}$ и $Nz(z)=\text{const}$

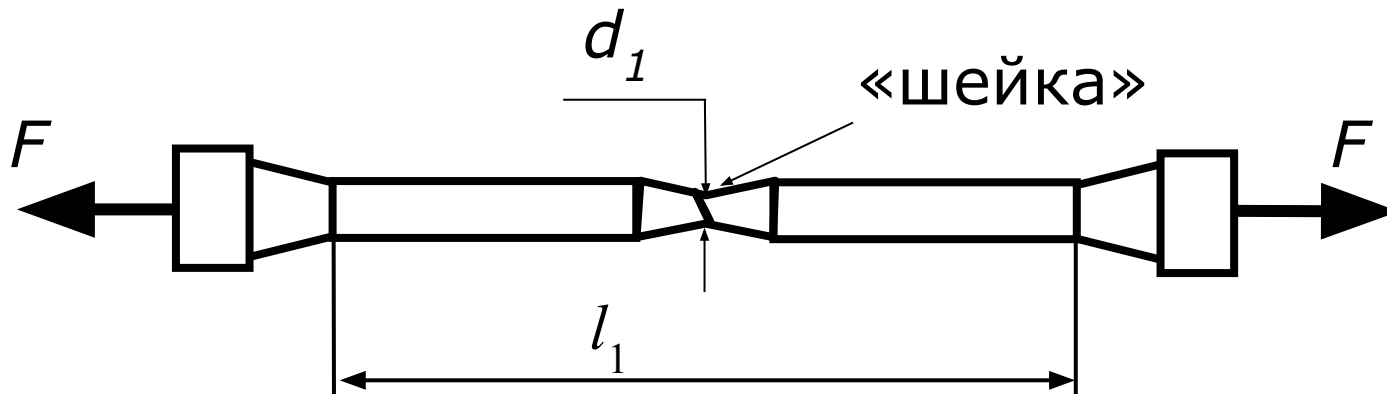
$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{Nz^i l_i}{E_i A_i}$$

Испытание на растяжение

Образец для испытаний



Разрушение образца из
пластичного материала



Относительное

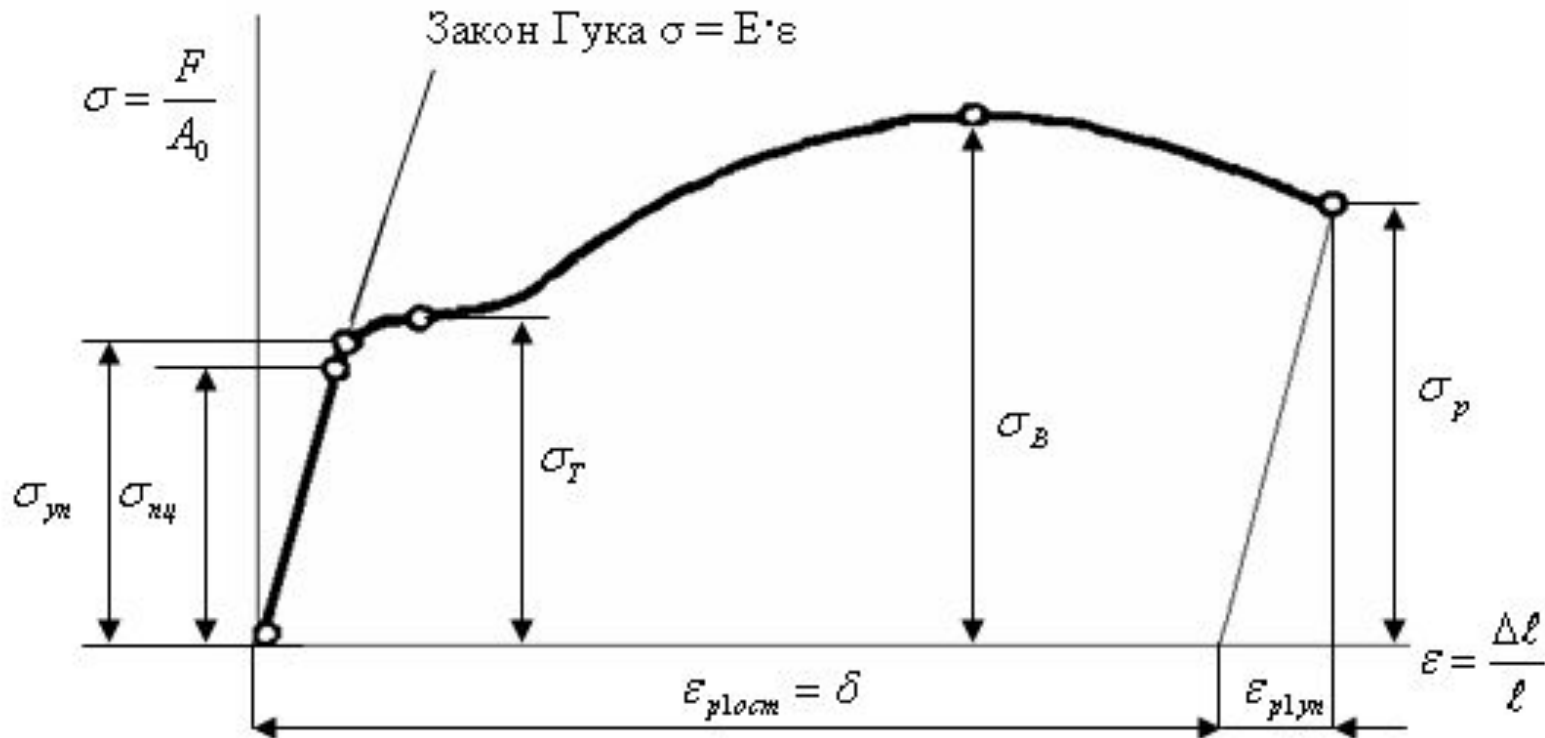
- удлинение

$$\delta = \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{\Delta_0} \cdot 100\%$$

- сужение

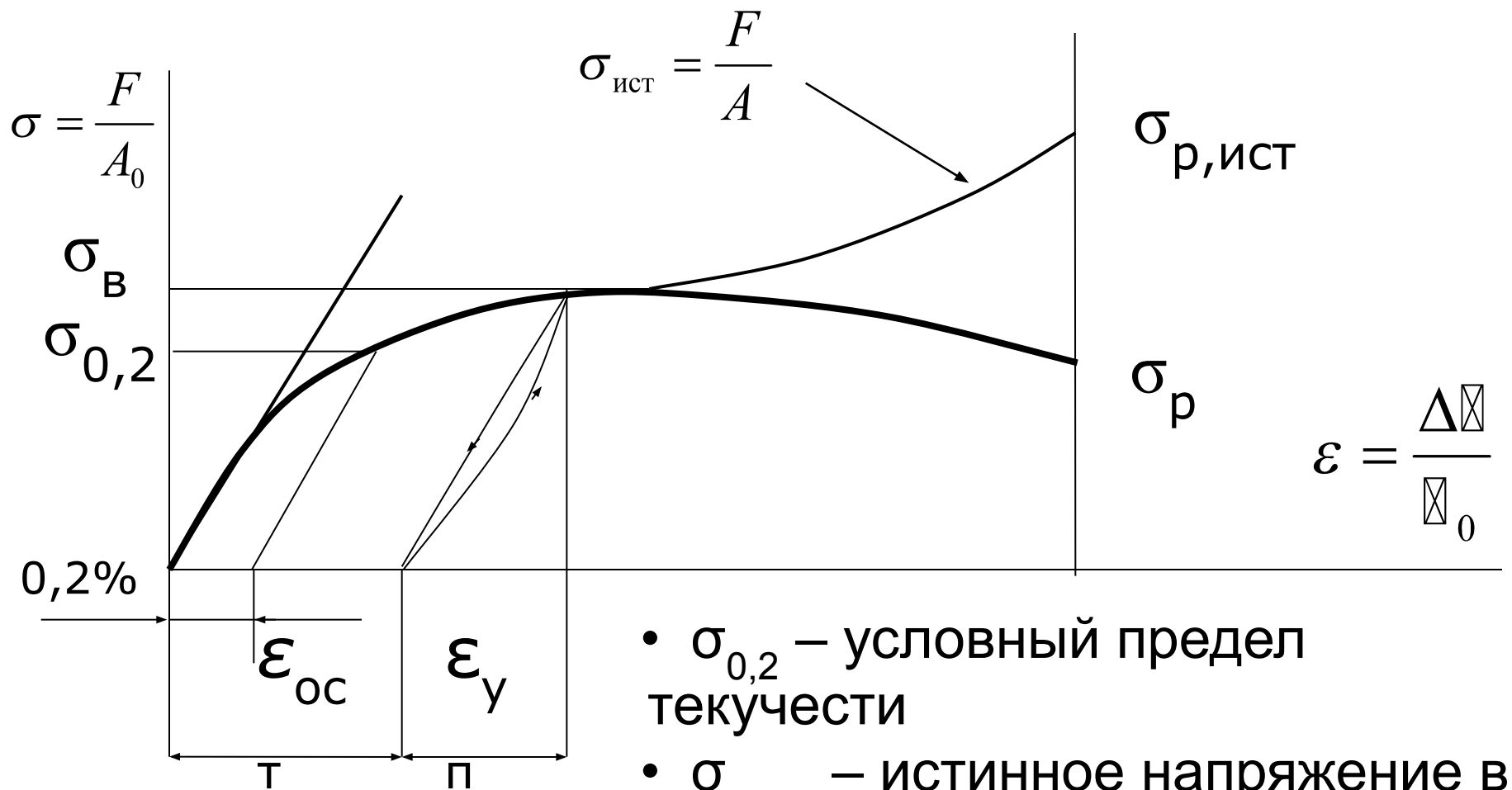
$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%$$

Диаграмма растяжения с площадкой текучести



- $\sigma_{пц}$, $\sigma_{уп}$ и $\sigma_{т}$ – пределы пропорциональности, упругости и текучести;
- $\sigma_{в}$ – временное сопротивление;
- $\sigma_{р}$ – напряжение в момент разрыва.

Диаграмма растяжения без площадки текучести



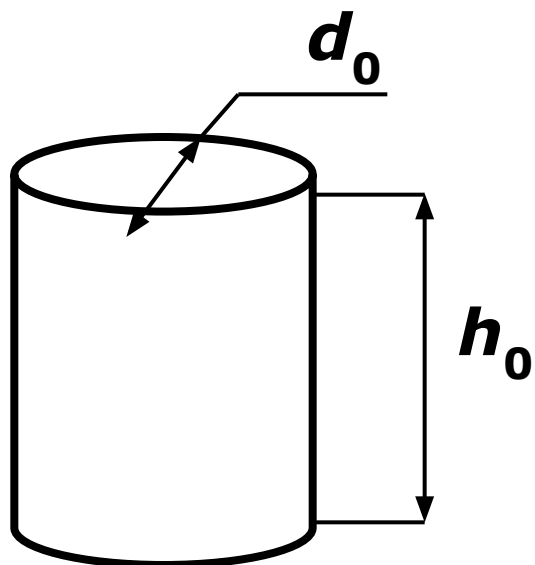
$$\sigma_{ист} = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

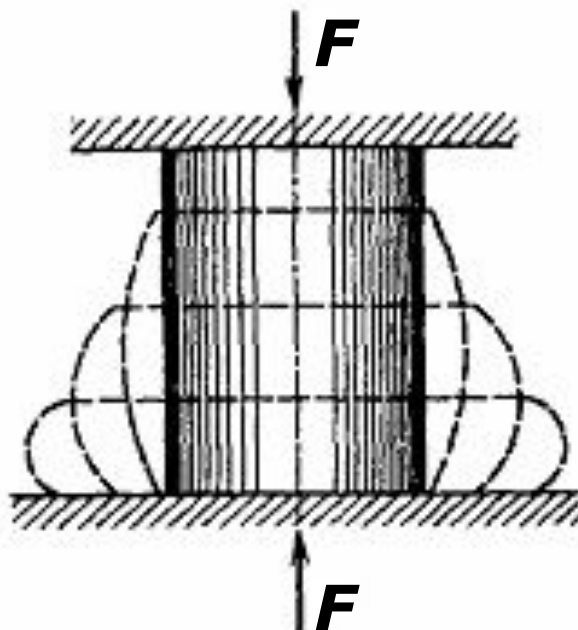
- $\sigma_{0,2}$ – условный предел текучести
- $\sigma_{р,ист}$ – истинное напряжение в момент разрыва

Испытание на сжатие

Образец для
испытаний

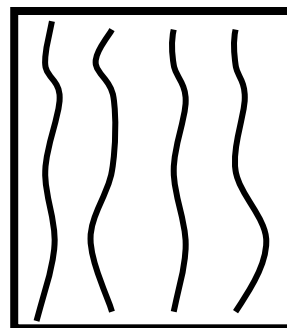
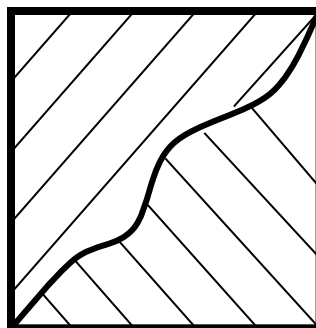


$$\frac{h_0}{d_0} = 1 \div 3$$



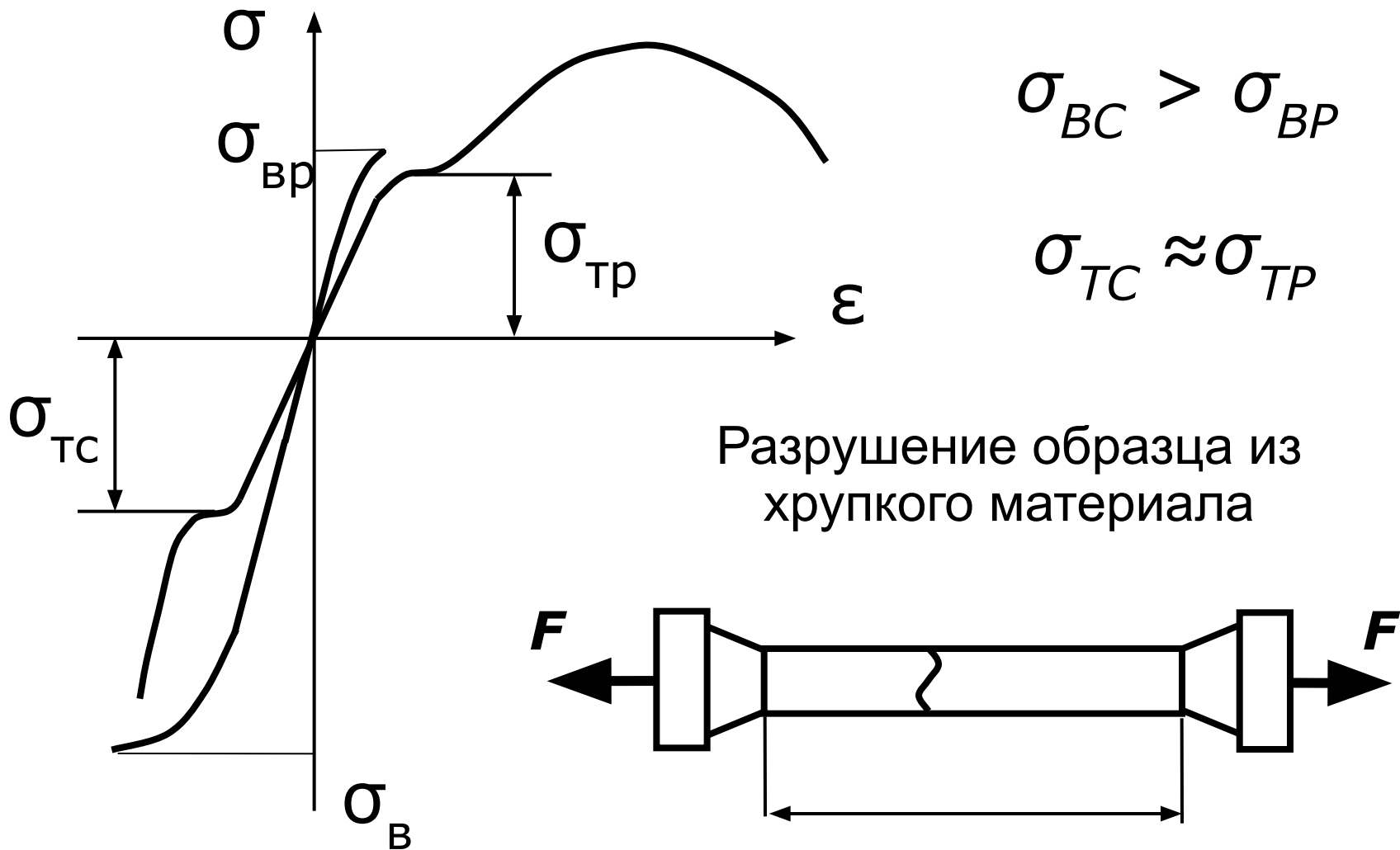
Деформация
образца

из пластичного
материала



из хрупкого
материала

Диаграммы растяжения и сжатия пластичного и хрупкого материалов



Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

$$\sigma_{\max} = \max \left(\frac{N_z}{A} \right) \leq [\sigma]$$

- **проверочный расчет**

$$A \geq \frac{\max N_z}{[\sigma]}$$

- **проектный расчет**

$$[N_z] = A[\sigma]$$

- **определение допустимой нагрузки**

Допускаемые напряжения и коэффициент запаса прочности

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{[n]} \quad \text{- допускаемое напряжение}$$

σ_{lim} - предельное (опасное)

напряжение для пластических материалов

$$\sigma_{\text{lim}} = \sigma_T$$

$$\sigma_{\text{lim}} = \sigma_B \quad \text{- для хрупких материалов}$$

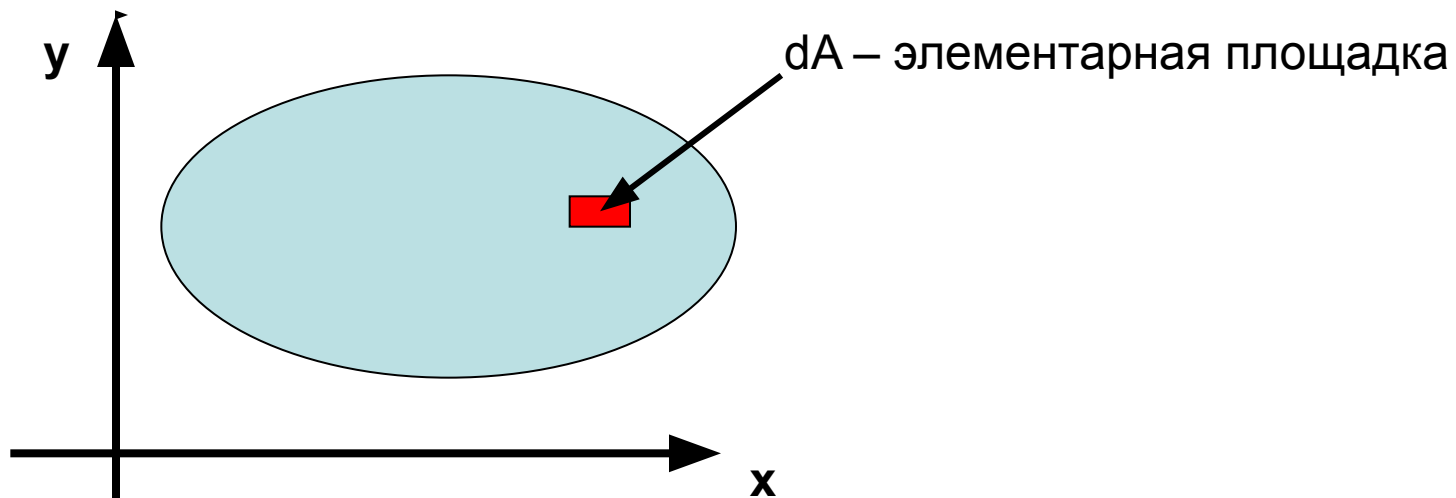
$$[n] \quad \text{- коэффициент запаса прочности}$$

$$[n] = [n_T] = 1,2 \div 2,5 \quad \text{- для пластических материалов}$$

$$[n] = [n_B] = 2 \div 5 \quad \text{- для хрупких материалов}$$

Геометрические характеристики плоских сечений

Площадь – простейшая геометрическая характеристика поперечного сечения.



$$A = \int_A dA \text{ – площадь сечения}$$

Геометрические характеристики плоских сечений

В расчетах элементов конструкций (на изгиб, кручение, сложное сопротивление и т. д.) используют более сложные геометрические характеристики плоских сечений:

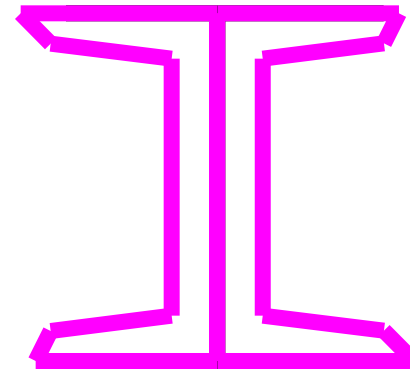
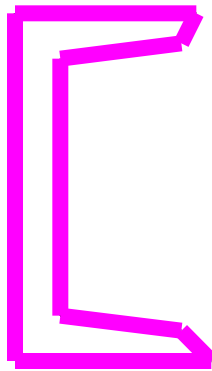
- **статический осевой момент;**
- **осевой момент инерции;**
- **полярный момент инерции;**
- **центробежный момент инерции.**

Эти характеристики учитывают не только форму и размер сечения, но и расположение точек и осей относительно которых они вычисляются

Геометрические характеристики плоских сечений

Геометрические характеристики сечений простейших форм (круг, прямоугольник, треугольник) определяют по табличным формулам.

Геометрические характеристики сечений нормального сортамента (уголок, швеллер, двутавр) по таблицам ГОСТ.



Статический момент сечения

Статический момент инерции относительно некоторой оси – взятая по всей площади этого сечения A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояние до этой оси.

$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA$$

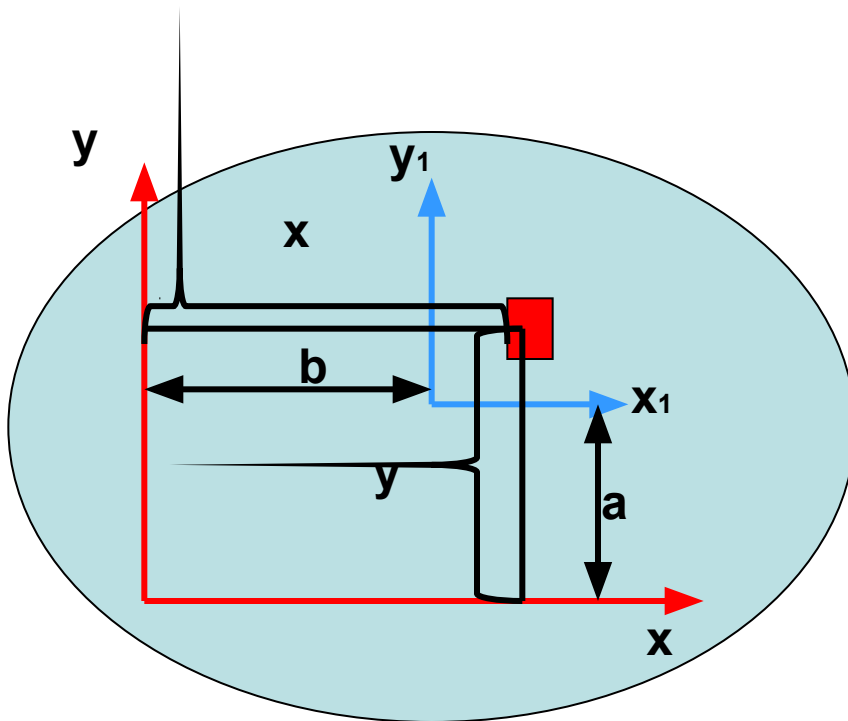
На основании теоремы о моменте равнодействующей можно показать, что:

$S_x = Ay_c$; $S_y = Ax_c$, где y_c , x_c - координаты центра тяжести сечения.

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно этой же оси.

Статический момент сечения

Зависимость статического момента одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей.



$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA$$

$$y_1 = y - a$$

$$x_1 = x - b$$

$$S_{x_1} = \int (y - a) dA \quad S_{y_1} = \int (x - b) dA$$

$$S_{x_1} = S_x - aA \quad S_{y_1} = S_y - bA$$

S может быть < 0 ; $= 0$; > 0

Оси, проходящие через центр тяжести сечения называются **центральными**.
Относительно любой центральной оси $S = 0$.

Осевой момент инерции

Осевой момент инерции сечения – взятая по всей площади этого сечения A сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат расстояния до данной оси.

ИЛИ

Осевым моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, численно равная интегралу:

относительно оси x

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

относительно оси y

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Полярный момент инерции

Полярный момент инерции относительно некоторой точки – взятая по всей площади этого сечения A сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний до данной точки.

или

Полярным моментом инерции сечения называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

Центробежный момент инерции

Центробежный момент инерции сечения относительно 2-х взаимно перпендикулярных осей – взятая по всей площади этого сечения A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояние до этих осей.

или

Центробежным моментом инерции называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Главные оси сечения

Для главных осей сечения должны выполняться следующие условия:

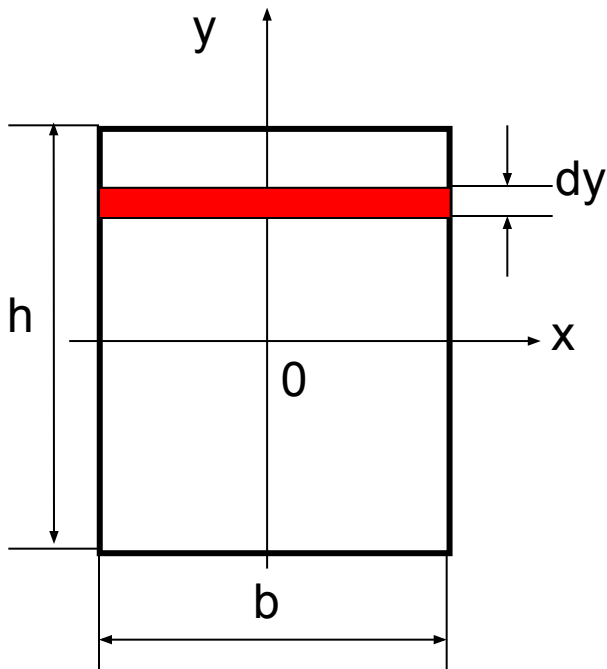
1. Центробежный момент инерции сечения относительно этих осей должен быть равен нулю:
 $I_{xy} = 0$
 2. Осевые моменты инерции относительно этих осей должны быть экстремальными.
 3. Эти оси должны быть взаимно перпендикулярными.
- Главные центральные оси** – главные оси, проходящие через центр тяжести сечения.

Главные оси сечения

Относительно главных центральных осей сечения:

1. $I_{xy} = 0$
2. I_x и I_y – экстремальны
3. $S_x = 0$ и $S_y = 0$
4. $I_x + I_y = I_p$ - сумма осевых моментов сечения относительно 2-х взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения этих осей

Определение моментов инерции простых фигур



Прямоугольник

0 – центр тяжести сечения; $x \parallel b$

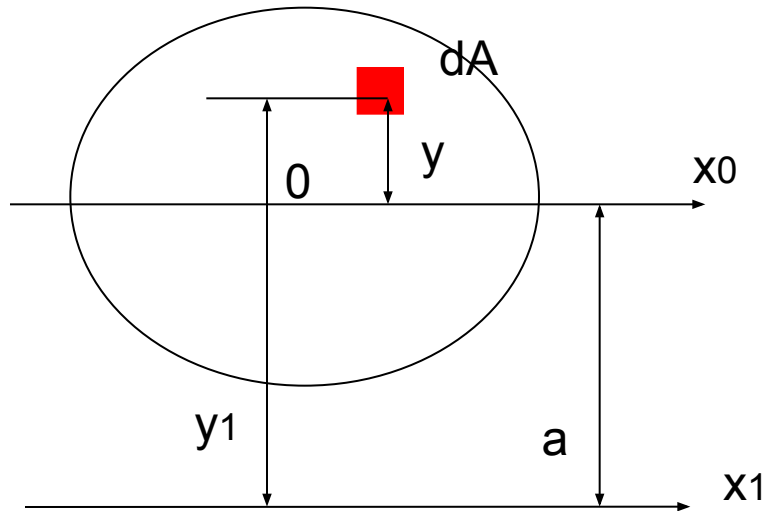
$$dA = bdy$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = by^3/3 \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$I_x = bh^3 / 12$$

$$I_y = hb^3 / 12$$

Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей



X_0 – центральная ось

$$Y_1 = a + y$$

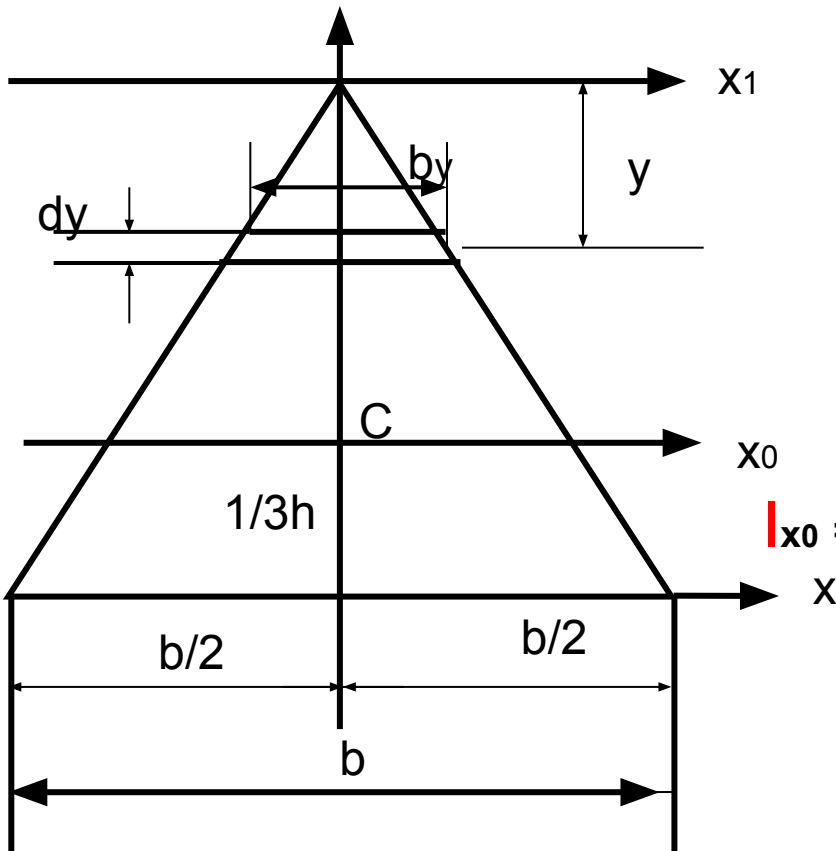
$$\begin{aligned} I_{x1} &= \int_A (a + y)^2 dA^2 = \\ &= a^2 \int_A da + 2a \int_A y dA + \int_A y^2 dA \end{aligned}$$

$$I_{x1} = I_{x0} + Aa^2$$

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Определение моментов инерции простых фигур

Треугольник



$$I_{x_1} = \int_A y^2 dA \quad dA = by dy$$

Из подобия треугольников
 $by/y = b/h$

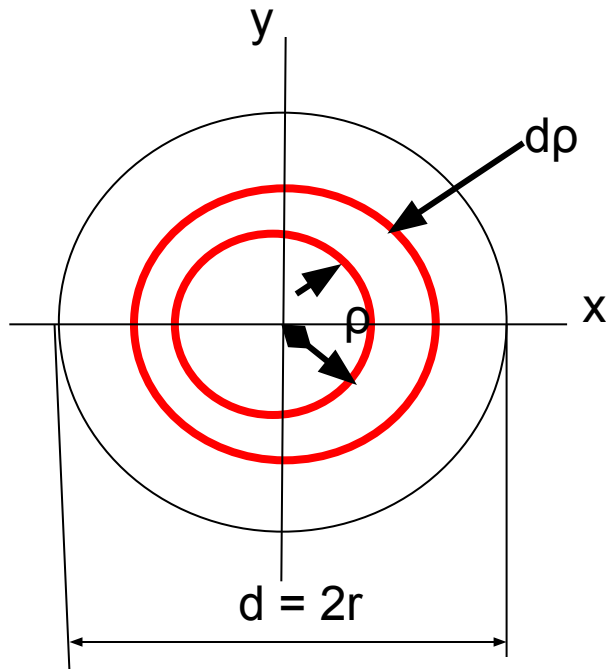
$$I_{x_1} = b/h \int y^3 dy = bh^3/4$$

$$I_{x_0} = I_{x_1} - Aa^2 = bh^3/4 - bh/2(2h/3)^2 = bh^3/36$$

$$I_x = bh^3/12$$

Определение моментов инерции простых фигур

Круг



$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA \quad dA = 2\pi\rho d\rho$$

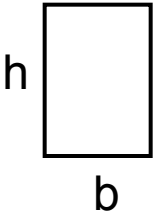
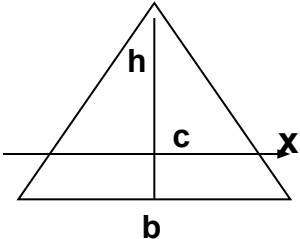
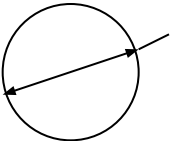
$$I_{\rho} = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \pi r^4 / 2 = \pi d^4 / 32 \approx 0.1 d^4$$

$$I_{x0} = I_{y0} = I_{\rho} / 2 = \pi r^4 / 4 = \pi d^4 / 64 \approx 0.05 d^4$$

Для кольца: $I_{x0} = I_{y0} = 0.05 D^4 (1 - c^4)$,

где $c = d / D$

№	Наименование	Формула	Размерность	Применение
1	Площадь сечения	$A = \int_A dA$	(ед. дл.) ²	Расчеты на прочность и экономичность
2	Статический осевой момент	$S_x = \int_A y dA$ $S_y = \int_A x dA$	(ед. дл.) ³	Нахождение центра тяжести сечения; определение касательных напр. при изгибе
3	Осевой момент инерции	$I_x = \int_A y^2 dA$ $I_y = \int_A x^2 dA$	(ед. дл.) ⁴	Расчеты на прочность и жесткость при изгибе; расчеты на устойчивость.
4	Полярный момент инерции	$I_x = \int_A \rho^2 dA$ $I_y = \int_A \rho^2 dA$	(ед. дл.) ⁴	Расчеты на кручение
5	Моменты сопротивления Осевые моменты Полярный момент	$W_x = I_x / y_{\max}$ $W_y = I_y / x_{\max}$ $W_\rho = I_\rho / \rho_{\max}$	(ед. дл.) ³	Расчеты на выполнение условия прочности при изгибе и кручении
6	Центробежный момент инерции	$I_{xy} = \int_A xy dA$	(ед. дл.) ⁴	Определение положения главных центральных осей

Форма сечения	A	I	W
	$A = bh$	$I_x = bh^3 / 12$ $I_y = hb^3 / 12$	$W_x = bh^2 / 6$ $W_y = hb^2 / 6$
При $h = b = a$	$A = a^2$	$I_x = I_y = a^4$	$W_x = W_y = a^3 / 6$
	$A = bh / 2$	$I_x = bh^3 / 36$	$W = bh^2 / 24$
	$A = \pi d^2 / 4$	$I_x = I_y = \pi d^4 / 64$	$W_x = W_y = \pi d^3 / 32 = 0,1 d^3$

ИЗГИБ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ.

- **Изгиб** – вид деформации, при котором искривляется продольная ось бруса.
- **Прямой изгиб** – изгиб, при котором внешние силы, действующие на балку, лежат в одной (силовой) плоскости, проходящей через продольную ось балки и главную центральную ось инерции поперечного сечения.

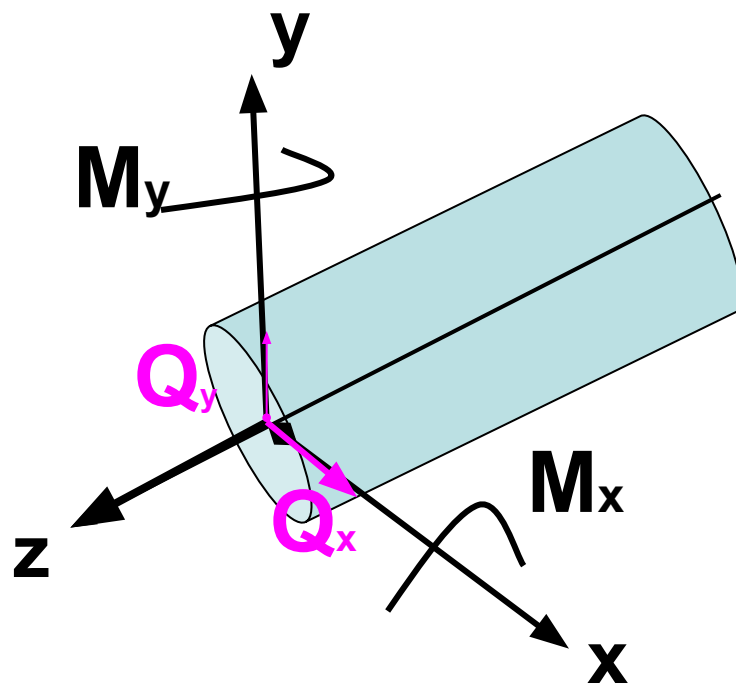
ИЗГИБ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ.

- **Чистый изгиб** – в любом поперечном сечении балки возникает только один изгибающий момент **M**.
- **Поперечный изгиб** – в поперечном сечении балки одновременно действуют изгибающий момент **M** и поперечная сила **Q**.

ИЗГИБ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

- **гипотеза плоских сечений Бернулли** – сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации;
- **гипотеза о ненадавливании волокон** – волокна могут деформироваться только под действием усилий, направленных вдоль них.

Внутренние силовые факторы при изгибе



M – изгибающие моменты

Q – поперечные силы

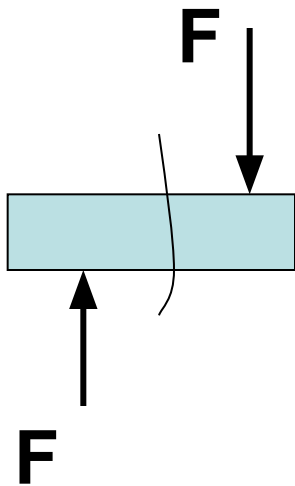
Определение внутренних силовых факторов при изгибе

Для определения ВСФ при изгибе применяют метод сечений.

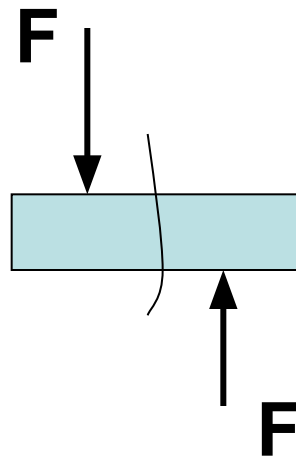
1. В поперечном сечении **Q** – численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.
2. **M** – численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

Правило знаков при определении ВСФ

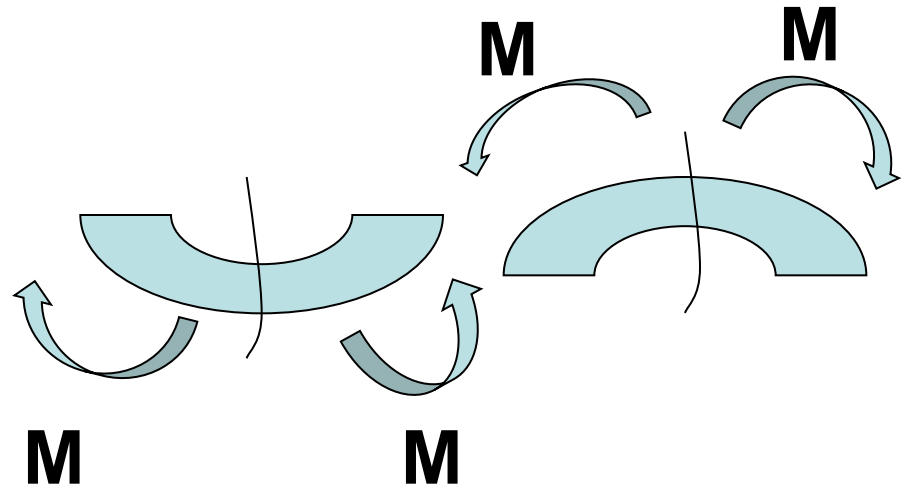
$Q > 0$



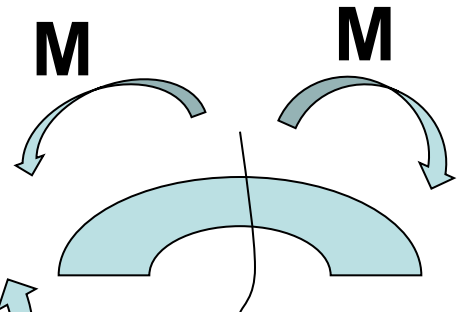
$Q < 0$



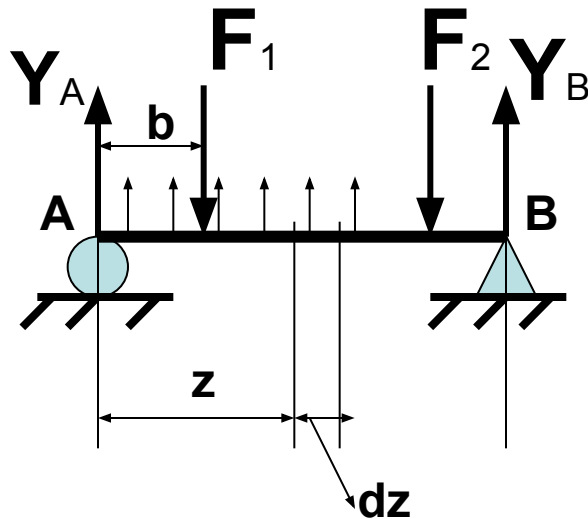
$M > 0$



$M < 0$



Дифференциальные зависимости при изгибе



1, Q в сечении на расстоянии z от A:

$$Q = Y_A - F_1 + qz \quad (1)$$

2. Q в сечении на расстоянии $z+dz$ от A:

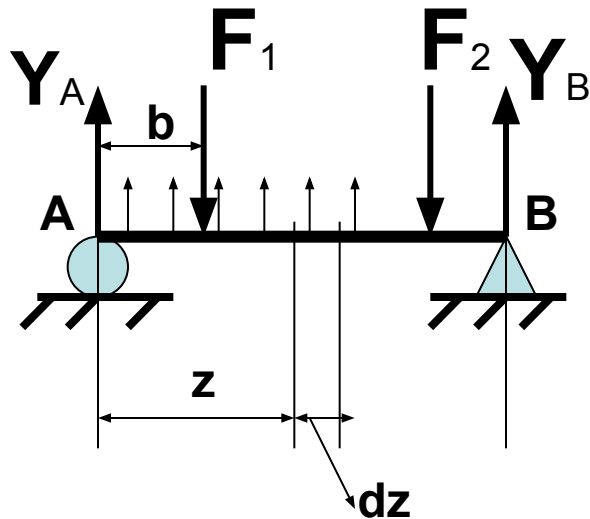
$$Q + dQ = Y_A - F_1 + q(z+dz) \quad (2)$$

3. Вычтем (1) из (2):

$$dQ = qdz \rightarrow \mathbf{q = dQ / dz}$$

Полная производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Дифференциальные зависимости при изгибе



1. М в сечении на расстоянии z от А:

$$M = Y_A z - F_1(z - b) + qz(z/2) \quad (3)$$

2. М в сечении на расстоянии $z+dz$ от А:

$$M+dM = Y_A(z+dz) - F_1(z+dz-b) + q(z+dz)(z+dz)/2 \quad (4)$$

3. Вычтем (3) из (4):

$$dM = Y_A dz - F_1 dz + qz dz + q dz dz/2$$

$$dM = dz(Y_A - F_1 + qz) \rightarrow \mathbf{Q = dM/dz}$$

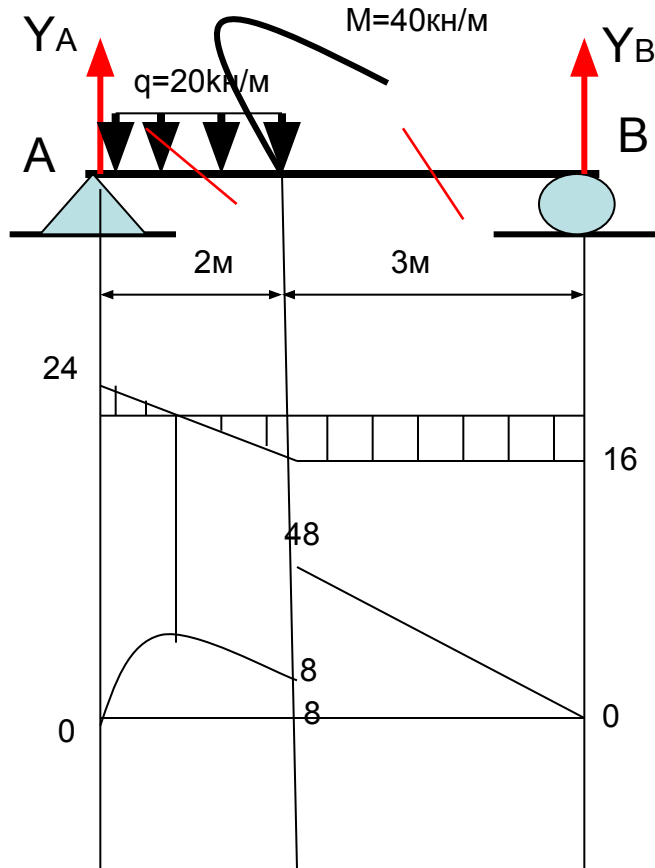
Полная производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе.

Дифференциальные зависимости при изгибе

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{d^2 M}{dz^2} = q$$

Вторая производная от изгибающего момента равна интенсивности распределенной нагрузки.

Построение эпюр M и Q



$$Y_A = 24 \text{ кН}; Y_B = 16 \text{ кН}; l_1 = 2\text{м}; l_2 = 3\text{м}$$

$$Q_1 = Y_A - qz; Q_1(0) = 24 \text{ кН}; Q_1(2) = -16 \text{ кН}$$

$$Q_2 = Y_A - ql_1 = -16 \text{ кН}$$

$$z_{\text{экс.}} = 1,2\text{м}$$

$$M_1 = Y_A z - qz(z/2) = Y_A z - qz^2 / 2$$

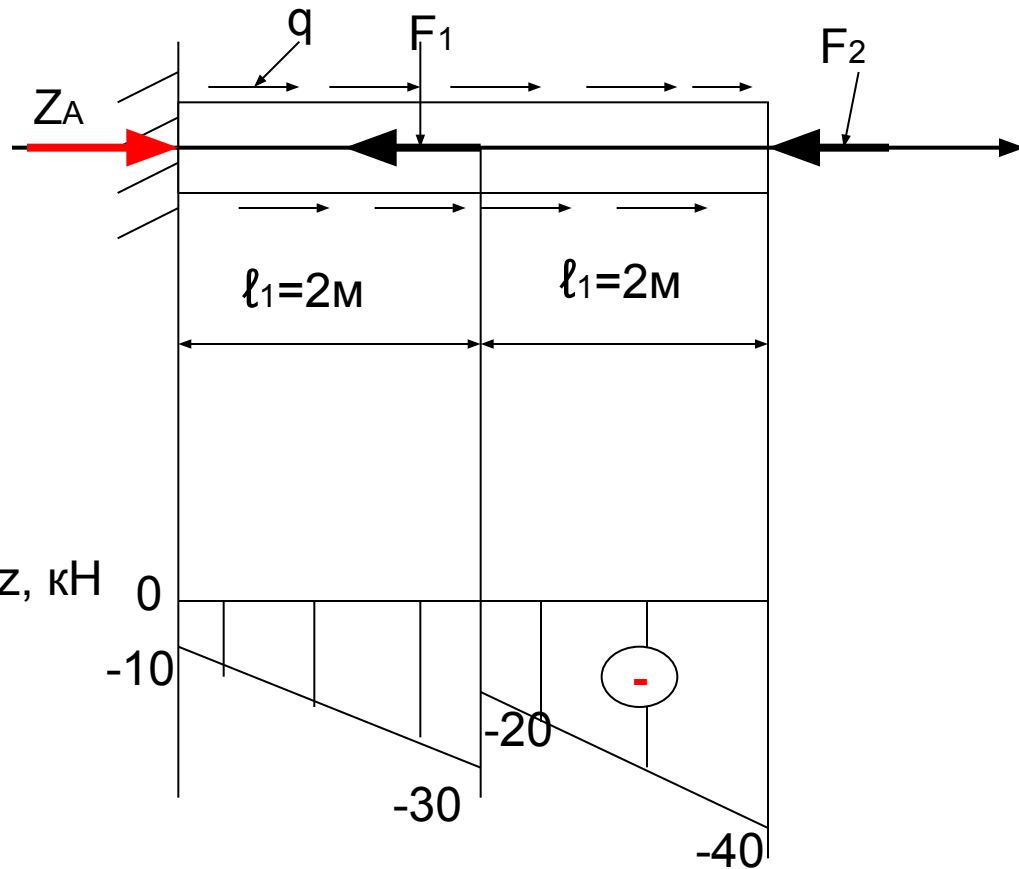
$$M_1(0) = 0; M_1(2) = 8 \text{ кН}$$

$$M_2 = Y_A z - ql_1(z - l_1/2) + M$$

$$M_2(2) = 48 \text{ кН}; M_2(5) = 0$$

$$M_1(1,2) = 10,8 \text{ кН}$$

Построение эпюры N_z при центральном растяжении (сжатии)



$$q = 10 \text{ кН / м}; F_1 = 10 \text{ кН}; F_2 = 40 \text{ кН}$$

$$\sum Z = Z_A + q(l_1 + l_2) - F_1 - F_2 = 0$$

$$Z_A = 10 \text{ кН}$$

$$N_{z1} + Z_A + qz = 0$$

$$N_{z1}(Z = 0) = -10 \text{ кН}$$

$$N_{z1}(Z = 2) = -30 \text{ кН}$$

$$N_{z2} + qz - F_1 + Z_A = 0$$

$$N_{z2}(Z = 2) = -20 \text{ кН}$$

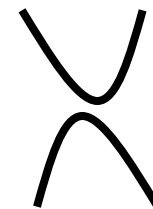
$$N_{z2}(Z = 4) = -40 \text{ кН}$$

Проверка правильности построения эпюр Q и M

1. В месте приложения сосредоточенной силы на эпюре поперечной силы Q_x (Q_y) имеет место скачок равный по величине приложенной силе.
2. В месте приложения сосредоточенного изгибающего момента M на эпюре M_x (M_y) имеет место скачок равный по величине этому моменту (в том числе на концах балки).
3. Если на конце балки не приложен сосредоточенный изгибающий момент или этот конец балки не в жесткой заделке, то M_x (M_y) = 0.
4. Если поперечная сила Q_x (Q_y) в сечении отсутствует, то M_x (M_y) = const.
5. Если на эпюре Q_x (Q_y) меняет знак на противоположный (т.е. эпюра проходит через 0, то в этой точке эпюра M_x (M_y) имеет экстремум.

Проверка правильности построения эпюр Q и M

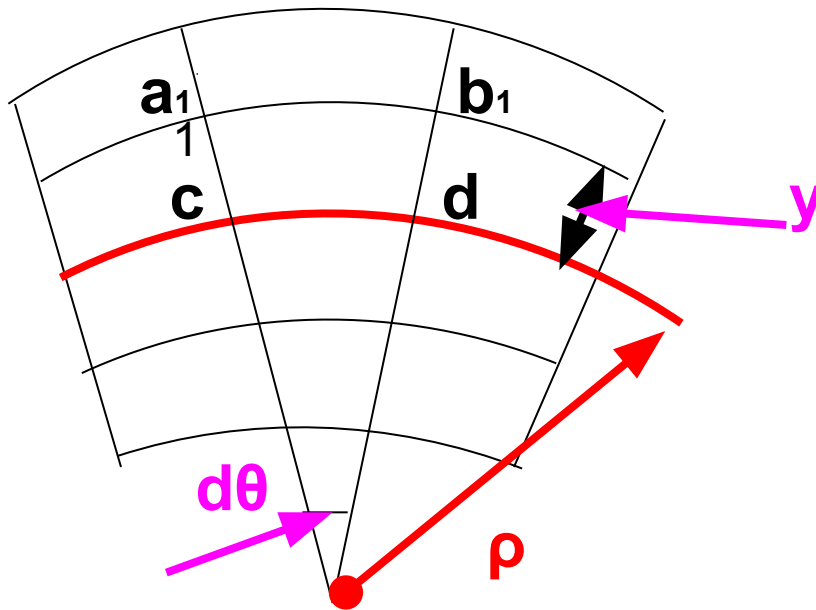
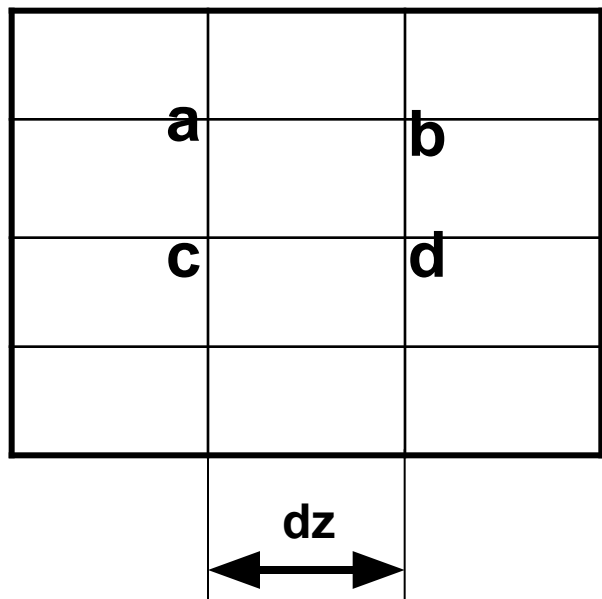
6. Участку балки с распределенной нагрузкой q соответствует эпюра Q_x (Q_y), изменяющаяся по линейному закону, при этом эпюра M_x (M_y) изменяется по параболе.
7. Если на эпюре Q_x (Q_y) имеет место скачок, то на эпюре M_x (M_y) – перелом графика, т.е. в случае параболы нет общей касательной к сопредельным участкам.
8. Если эпюра, $Q > 0$, то эпюра M возрастает, а если эпюра $Q < 0$, то эпюра M убывает.
9. Если эпюра Q возрастает, то эпюра M имеет прогиб вниз если эпюра Q убывает, то эпюра M имеет прогиб вверх



Определение нормальных напряжений при изгибе

- **Допущения:** гипотеза плоских сечений и гипотеза о ненадавливании волокон.
- **Нейтральный слой** – слой балки не испытывающий при изгибе ни растяжения, ни сжатия.
- **Нейтральная линия (ось)** – линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью сечения балки.
- ρ – радиус кривизны нейтрального слоя балки

Закон распределения внутренних сил при плоском чистом изгибе



$$(a_1 b_1 - ab) / ab = \varepsilon = (a_1 b_1 - cd) / cd \quad (1)$$

$$\varepsilon = \rho d\theta + y d\theta - cd / cd = y d\theta / cd \quad (3)$$

$$a_1 b_1 = (\rho + y) d\theta \quad (2)$$

$$\rho = cd / d\theta \quad (4)$$

$$\varepsilon = y / \rho$$

Закон распределения внутренних сил при плоском чистом изгибе

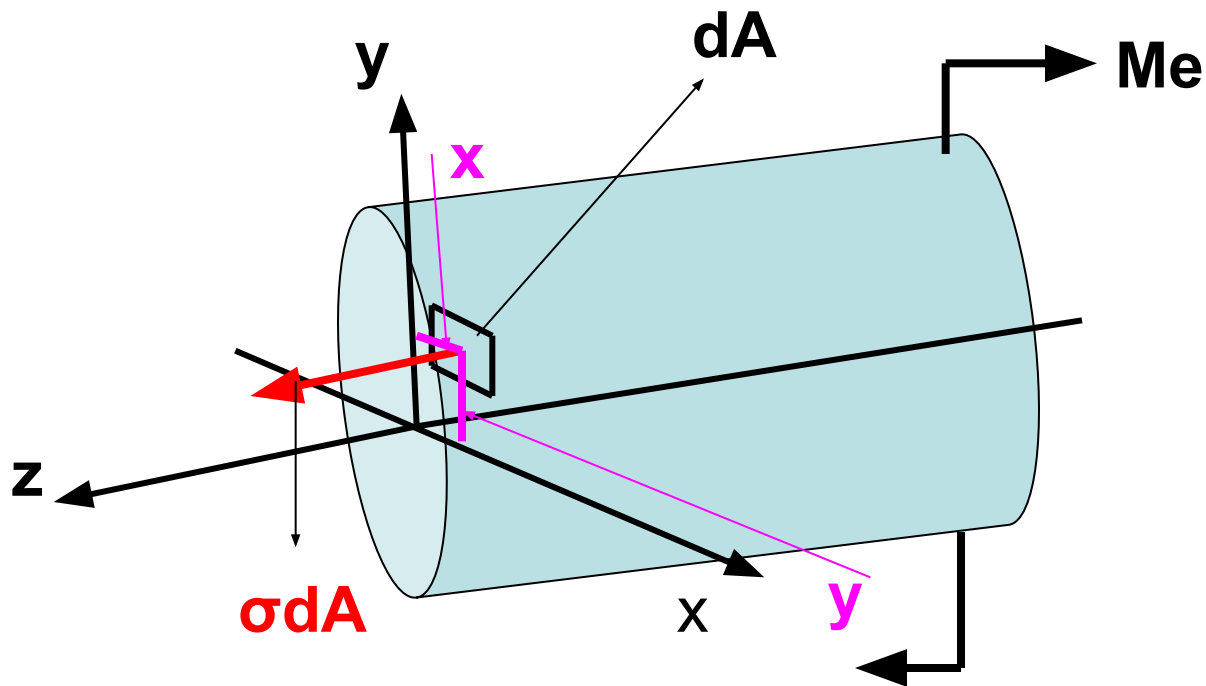
- По высоте сечения балки деформации изменяются по линейному закону.

$$\varepsilon = y / \rho$$

- Нормальные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения балки пропорционально расстоянию от нейтральной оси.

$$\sigma = E\varepsilon = Ey / \rho$$

Определение значений нормальных напряжений из уравнений равновесия



σdA – элементарная сила, действующая на элементарную площадку dA

Me – внешний изгибающий момент

Определение значений нормальных напряжений из уравнений равновесия

- Если часть балки, находящаяся под действием M_e и внутренних сил, возникающих в поперечном сечении, находится в равновесии:

$$1. \sum X=0 \quad 2. \sum Y=0 \quad 3. \sum Z=0$$

$$4. \sum M_x=0 \quad 5. \sum M_y=0 \quad 6. \sum M_z=0$$

Определение значений нормальных напряжений из уравнений равновесия

- Уравнения №1 и №2 – тождества, т. к. элементарные силы σdA перпендикулярны осям Y и X .
- Из уравнения №3:

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (\sigma = Ey / \rho) \quad \sigma = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$
$$\frac{E}{\rho} \neq 0 \quad \therefore \int_A y dA = 0 \quad S_x = \int_A y dA$$

Нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Определение значений нормальных напряжений из уравнений равновесия

- Из уравнения 4:

$$-M_e + \int_A y \sigma dA = 0 \quad \sigma = E y / \rho \quad M_e = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

$$M = \frac{E I_x}{\rho} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I_x} \quad \sigma = \frac{M y}{I_x}$$

M – суммарный изгибающий момент в поперечном сечении.

1 / ρ – кривизна нейтрального слоя балки.

$\frac{E I_x}{\rho}$ - жесткость балки

$\sigma = \frac{M y}{I_x}$ нормальное напряжение в произвольной точке сечения.

Определение значений нормальных напряжений из уравнений равновесия

- Из уравнения 5:

$$\int_A \sigma dAx = 0 \quad \sigma = E\epsilon_y / \rho \quad \int_A xy dA = 0 \quad I_{xy} = 0$$

Следовательно X и Y – главные центральные оси сечения

- Уравнение №6 - тождество т.к. усилия σdA // оси Z (т. е. нет кручения).

Расчеты на прочность при изгибе

$$\sigma_{\max} = \max \left(\frac{M_x}{W_x} \right) \leq [\sigma]$$

- проверочный расчет

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]}$$

- проектный расчет

$$[M_x] = W_x [\sigma]$$

- определение допускаемой нагрузки

Касательные напряжения при изгибе

- Формула Журавского (для прямого изгиба):

$$\tau = \frac{Q S_x^{отс.}}{I_x b}$$

Касательное напряжение в рассматриваемом слое поперечного сечения

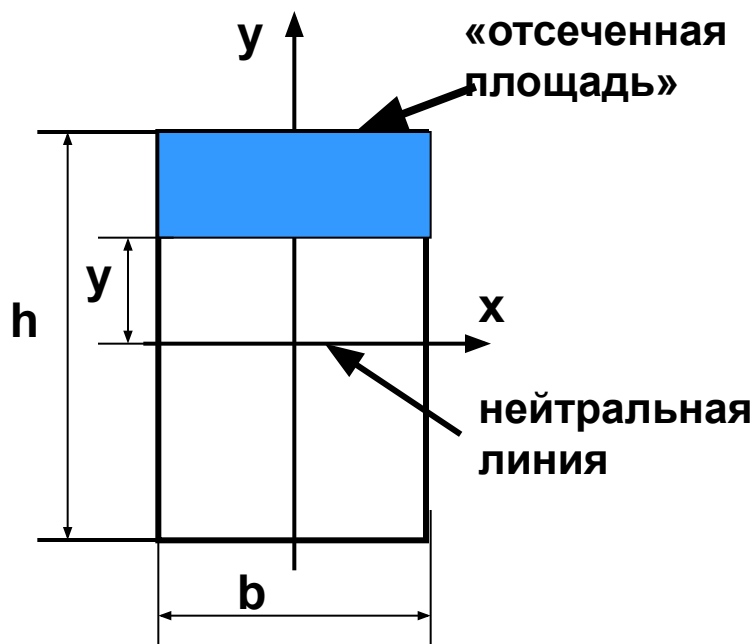
Q – поперечная сила; **b** – ширина рассматриваемого волокна;

$S_x^{отс.}$ - статический момент «отсеченной площади» сечения (лежащей дальше от нейтральной линии, чем рассматриваемый слой волокна)

I_x - момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси

Распределение по сечению касательных напряжений

- Прямоугольное сечение балки



$$S_x = y_c A$$

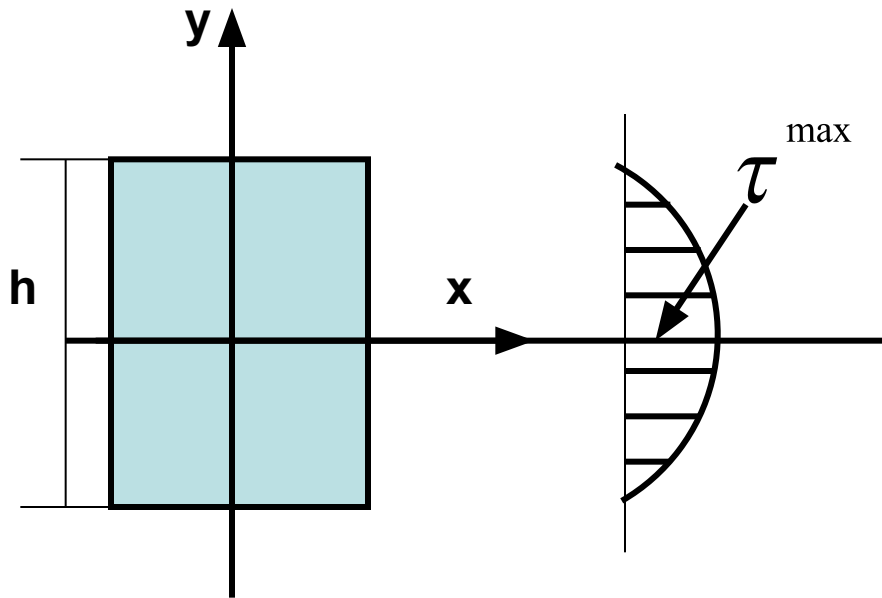
$$S_x^{отс.} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \cdot b \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

$$I_x = \frac{b h^3}{12}$$

$$\tau = \frac{Q b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot 12}{2 b h^3 b}$$

$$\tau = \frac{6Q}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения



$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$y = \frac{h}{2} \quad \tau = 0$$

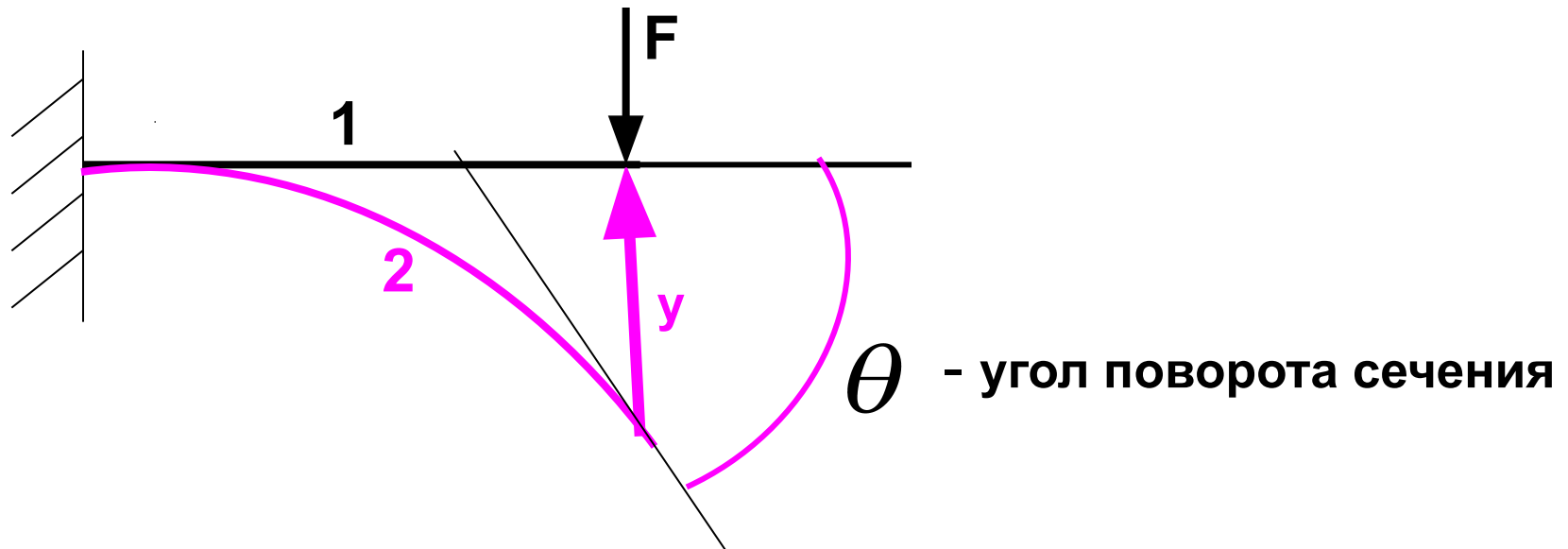
$$y = 0 \quad \tau^{\max} = \frac{3Q}{2A}$$

$$y = -\frac{h}{2} \quad \tau = 0$$

Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования

- Под действием внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей прямой балки, ее ось искривляется в той же плоскости. При этом точки оси перемещаются.
- **Упругая линия** – изогнутая ось балки.
- **Прогиб балки** в данной точке (сечении) – перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки.

Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования



1 – недеформированная ось балки

2 – упругая линия - изогнутая ось балки ($\ell_{у.л} = \ell_{о.б.} = \text{const}$)

y – прогиб конца балки ($y \ll \ell_б$)

Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования

- Угол поворота поперечного сечения балки θ равен углу между касательной, проведенной к изогнутой оси балки в данном сечении и недеформированной осью балки, то есть равен углу поворота оси балки.

$\theta > 0$, если поперечное сечение при деформации поворачивается против часовой стрелки

Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования

- Правило знаков для прогибов:
 $y > 0$, если точки оси смещаются при деформации вверх относительно недеформированной оси балки.
- Смещениями точек оси по горизонтали (сдвигами) пренебрегают, так как они весьма малы.

Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования

Кривизна изогнутой оси балки: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I_x}$

Из курса математического анализа известно, что кривизна упругой линии $y(z)$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y(z)}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2 y(z)}{dz^2}$$

Дифференциальное уравнение упругой линии балки при изгибе

$$M_x(z) = \frac{E I_x}{\rho} = E I_x \frac{d^2 y(z)}{d z^2}$$

Величину прогиба $y(z)$ находят двойным интегрированием дифференциального уравнения упругой линии балки с учетом граничных условий рассматриваемой задачи.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки при изгибе

θ - угол поворота поперечного сечения балки

$$\frac{dy(z)}{dz} = \operatorname{tg} \theta \approx \theta$$

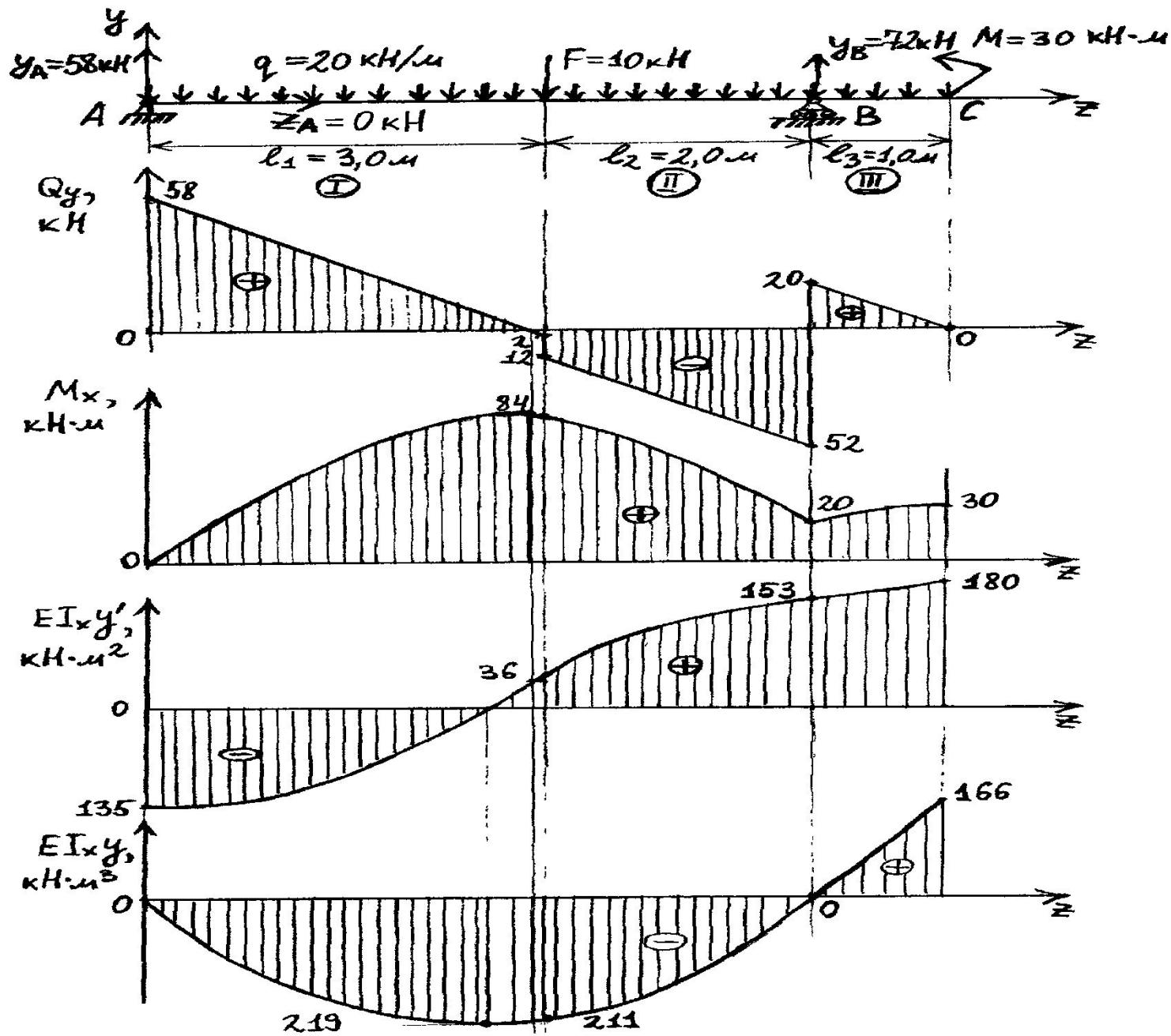
Величину углов поворота поперечных сечений балки находят интегрированием дифференциального уравнения упругой линии балки с учетом граничных условий рассматриваемой задачи.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки при изгибе

$$y''' E I_x = M \quad \text{- уравнение изгибающих моментов}$$

$$y' E I_x = \int M dz + C \quad \text{- уравнение углов поворота}$$

$$y E I_x = \int dz \int M dz + C + D \quad \text{- уравнение прогибов}$$



Универсальное уравнение.

$$EI_x y'' = M_z,$$

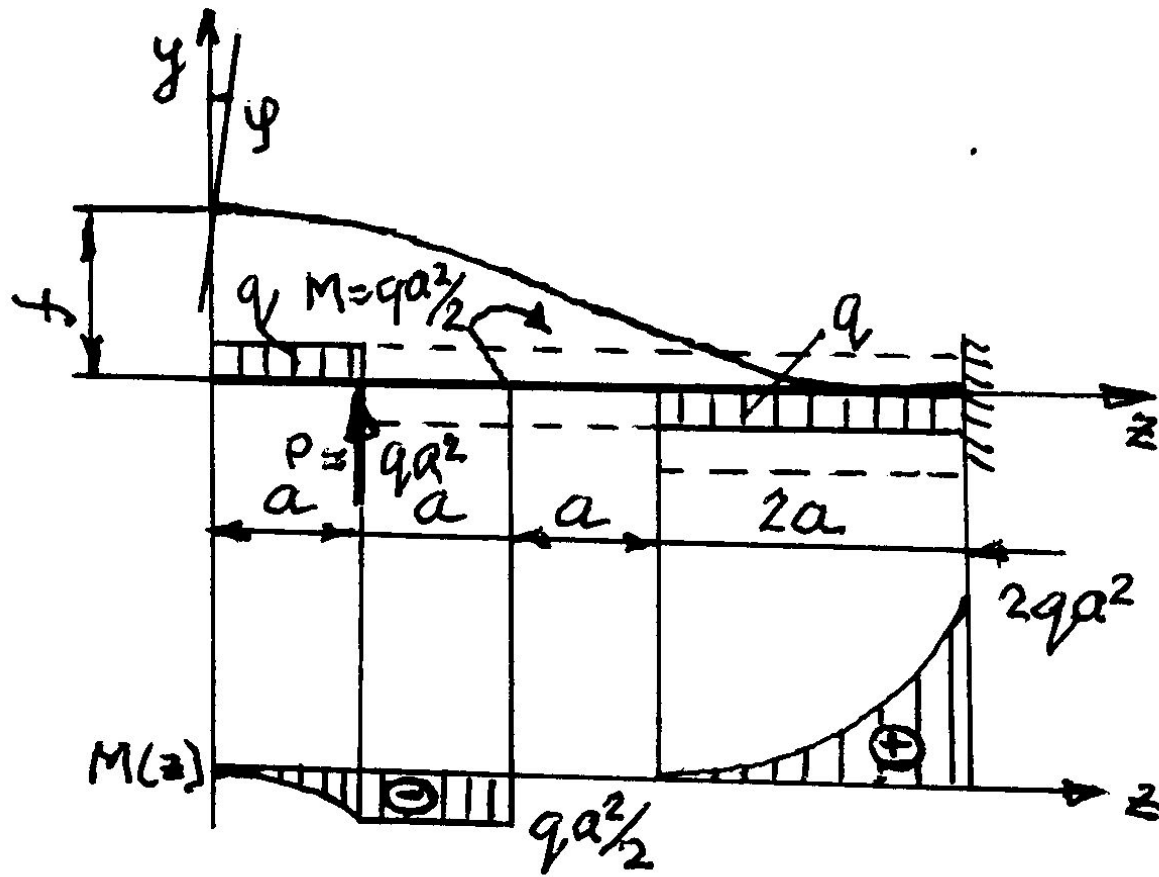
$$EI_x y'' = y_A z - qz^2 / 2 \Big|_I - F(z - l_1) \Big|_{II} + y_B (z - l_1 - l_2) \Big|_{III},$$

Уравнение углов поворота

$$EI_x y' = C + y_A z^2 / 2 - qz^3 / 6 \Big|_I - F(z - l_1)^2 / 2 \Big|_{II} + \\ + y_B (z - l_1 - l_2)^2 / 2 \Big|_{III},$$

Уравнение прогибов

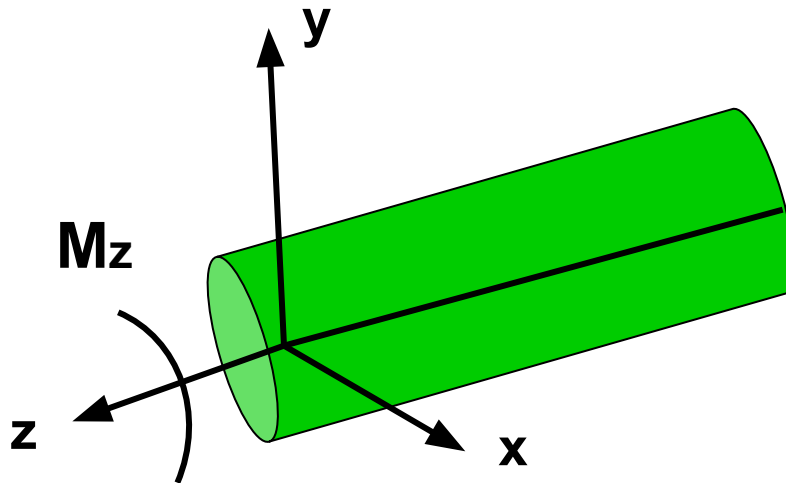
$$EI_x y = D + Cz + y_A z^3 / 6 - qz^4 / 24 \Big|_I - F(z - l_1)^3 / 6 \Big|_{II} + \\ + y_B (z - l_1 - l_2)^3 / 6 \Big|_{III},$$



$$M(z) = -\frac{qz^2}{2} \Big|_I + P(z-a) + \frac{q(z-a)^2}{2} \Big|_{II} + M(z-2a) \Big|_{III} + \frac{q(z-3a)^2}{2} \Big|_{IV}$$

Кручение

- Кручение – вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один силовой фактор – **крутящий момент** – M_z (Мк).



Кручение

- Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними **скручивающими моментами** (парами сил).
- Если прямой брус находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех внешних **скручивающих моментов**, приложенных к брусу = 0.

Кручение

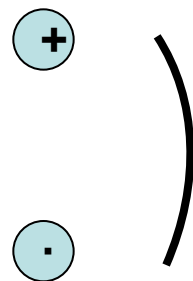
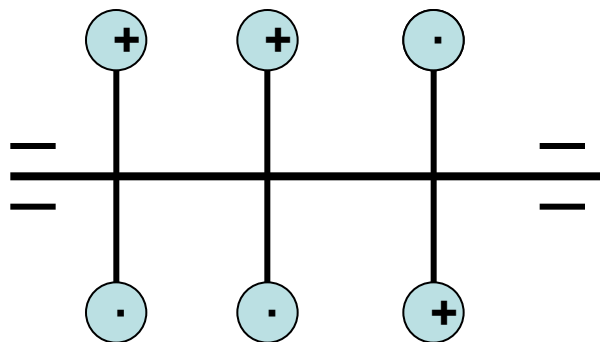
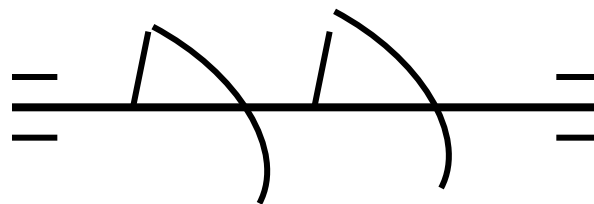
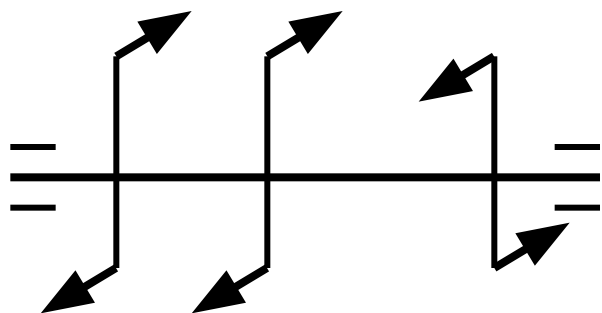
- Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях бруса, определяют по внешним скручивающим моментам **методом сечений**.
- Крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от сечения.

Кручение

- Изменение крутящих моментов по длине бруса выражают графически с помощью эпюры (графика) крутящих моментов.
- В сечении, где к бруску приложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину = значению этого момента.

Кручение

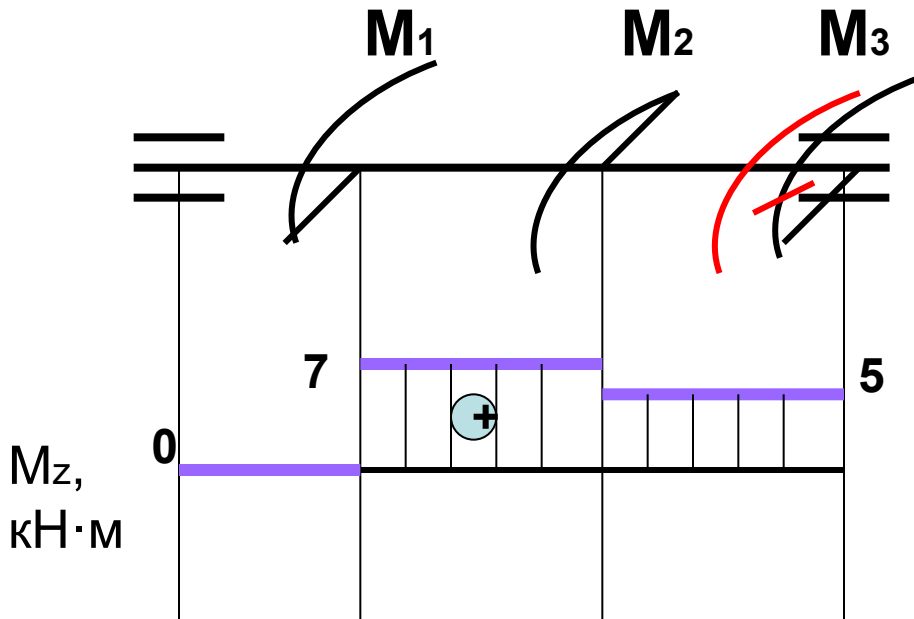
- **Обозначения:**



Кручение

- **Принятое правило знаков необходимо выдержать на всем протяжении эпюры.**

Кручение



$$M_1 = 7 \text{кН}\cdot\text{м}; M_2 = -2 \text{кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = ?$$

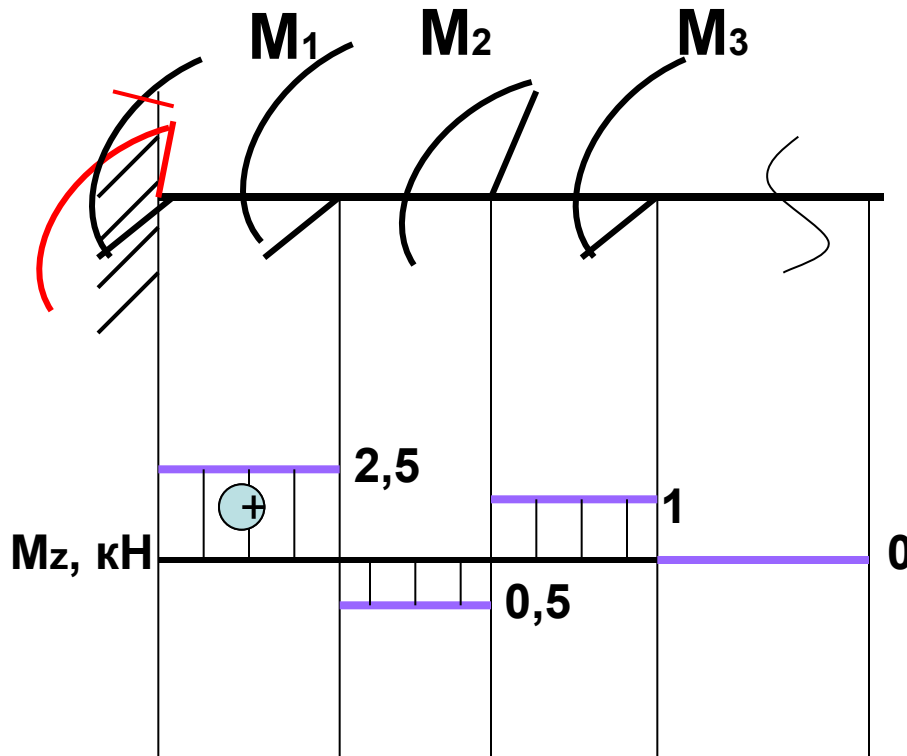
$$\sum M_z = 0$$

$$M_1 - M_2 + M_3 = 0$$

$$M_3 = -5 \text{кН}\cdot\text{м}$$

Вращающиеся и работающие на кручение стержни называют валами..

Кручение



$$M_1 = 3 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -1,5 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 1 \text{ кНм}$$

$$\sum M_z = 0 = M + M_1 - M_2 + M_3$$

$$M = -3 + 1,5 - 1 = -2,5 \text{ кНм}$$

При расчете брусьев, имеющих один конец в заделке, крутящие моменты в их поперечных сечениях удобнее выразить через внешние моменты, приложенные со стороны свободного конца.

Расчет на прочность при кручении

- В поперечном сечении скручиваемого стержня действуют непрерывно распределенные внутренние касательные напряжения. Формула для определения касательных напряжений при кручении:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_K \rho}{I_{\rho}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K \rho_{\max}}{I_{\rho}} = \frac{M_K}{W_{\rho}} \leq [\tau]$$

Подбор круглого сечения стержня по полярному моменту сопротивления сечения

$$W_{\rho} = \frac{\max M_K}{[\tau]}$$

Для круга: $W_{\rho} = 0,2 d^3$

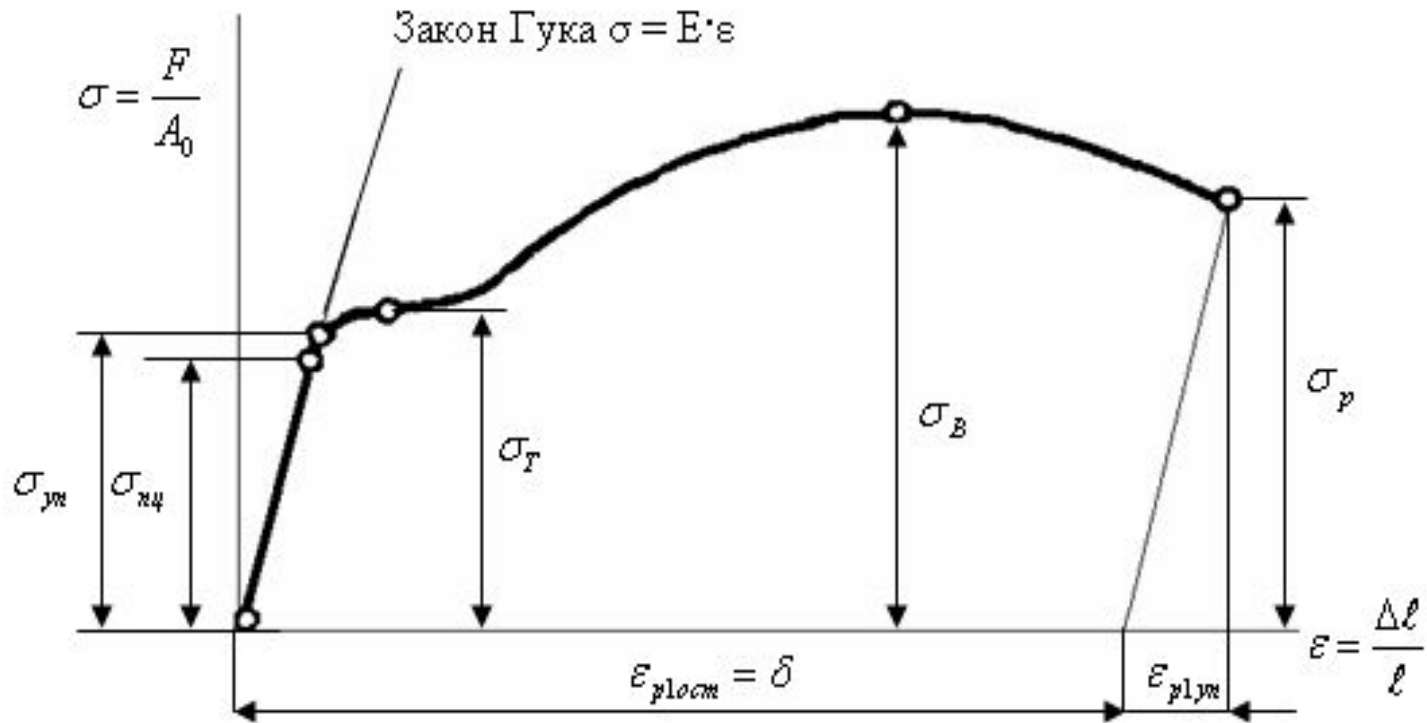
$$d = \sqrt[3]{\frac{\max M_K}{0,2[\tau]}}$$

$[\tau]$

- зависит от свойств материала и конструкции;
определяется опытным путем; для сталей составляет 30 – 40 МПа.

Теории прочности

- Теории прочности – гипотезы об основной причине перехода материала в опасное напряженное состояние текучести или хрупкого разрушения.



Составление условия прочности для линейного напряженного состояния

$$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad - \text{условие прочности при растяжении (сжатии)}$$

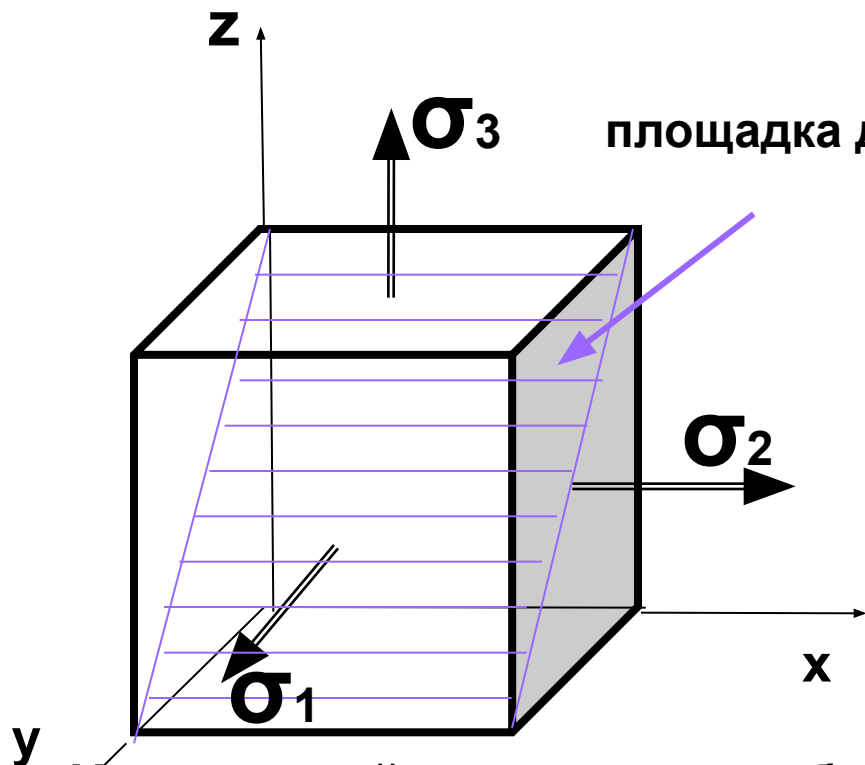
$$[\sigma] = \frac{\sigma}{n} \quad - \text{допускаемое напряжение}$$

σ_B - предельное напряжение для хрупких материалов

σ_T - предельное напряжение для пластичных материалов

σ_B и σ_T -устанавливают опытным путем

Условие прочности для сложного напряженного состояния



площадка действия τ_{\max}

Определить при каких значениях напряжений наступит предельное состояние материала (разрушение или возникновение пластических деформаций) весьма сложно.

Идея теорий прочности: из большого числа факторов, влияющих на прочность материала выбирают один (критерий прочности), не учитывая остальные. Надежность теорий прочности проверяют опытным путем

Эквивалентное напряжение

$\sigma_{ЭКВ}$

- напряжение, при котором образец материала в условиях одноосного напряженного состояния оказывается в равноопасном состоянии (одинаковые коэффициенты запаса прочности) с рассматриваемым сложноподпряженным состоянием, называется эквивалентным напряжением.

Опасная точка – точка бруса, в которой достигается максимальное значение эквивалентного напряжения. Эта точка принадлежит **опасному сечению бруса**.

Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений)

- Предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее по модулю нормальное напряжение достигает опасного значения (критерий прочности – наибольшее нормальное напряжение).

$$\sigma_{ЭКВ} = \sigma_1 \leq [\sigma]$$

Теория удовлетворительно справедлива для хрупких материалов; частично подтверждается опытным путем; в практических расчетах не применяется.

Вторая теория прочности (теория относительных удлинений)

- Опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее относительное удлинение достигает опасного значения (критерий прочности – наибольшая линейная деформация).

$$\varepsilon_1 \leq [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

Экспериментально теория не подтверждается

Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)

- Опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает опасного значения (критерий прочности – наибольшее касательное напряжение).
- **Предпосылка создания теории:** пластическая деформация в металлах возникает в результате необратимых сдвигов в кристаллической решетке. Наибольшие касательные напряжения имеют место в сечениях, расположенных под углом 45° направлению главных напряжений σ_1 и σ_3 .

Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)

- В наклонном сечении при растяжении (сжатии) в двух направлениях:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

При линейном напряженном состоянии:

$$[\tau] = \frac{1}{2} [\sigma]$$

Тогда по 3 теории прочности, условие прочности при которой: $\tau_{\max} \leq [\tau]$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)

Формула для определения главных нормальных напряжений (1):

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{M}{W_x} \quad (2) \quad \tau = \frac{M_k}{2W_x} \quad (3) \quad \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (4)$$

Подставим (1); (2) и (3) в (4):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$W_x = \frac{\sqrt{M^2 + M_k^2}}{[\sigma]} \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Теория подтверждается экспериментально для пластичных материалов.

Четвертая теория прочности (энергетическая)

- Прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается в том случае, если удельная потенциальная энергия деформации не превосходит допускаемой удельной потенциальной энергии, установленной для линейного напряженного состояния.

$$u \leq [u]$$

Потенциальная энергия деформации это величина равная работе внутренних сил, но с противоположным знаком. Потенциальную энергию, отнесенную к единице объема, называют удельной потенциальной энергией.

Четвертая теория прочности (энергетическая)

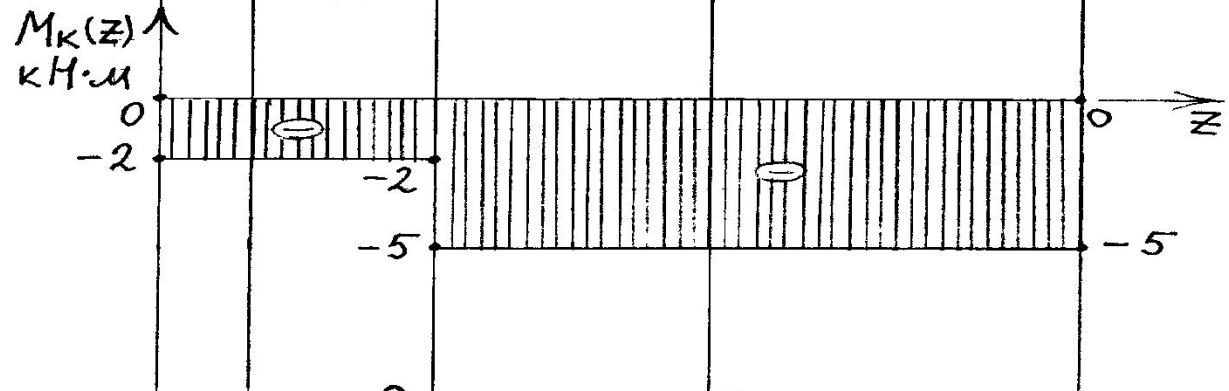
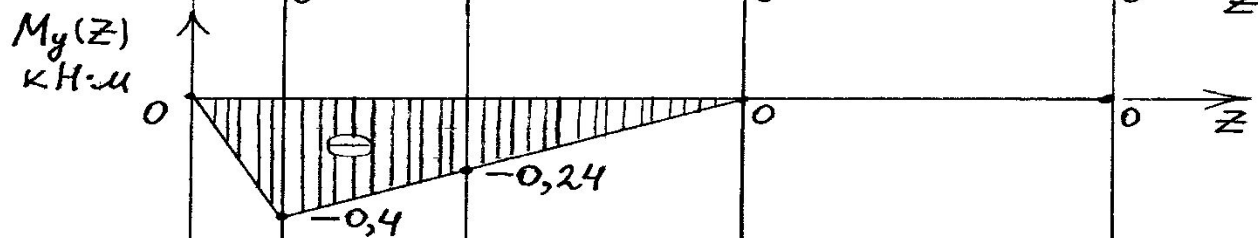
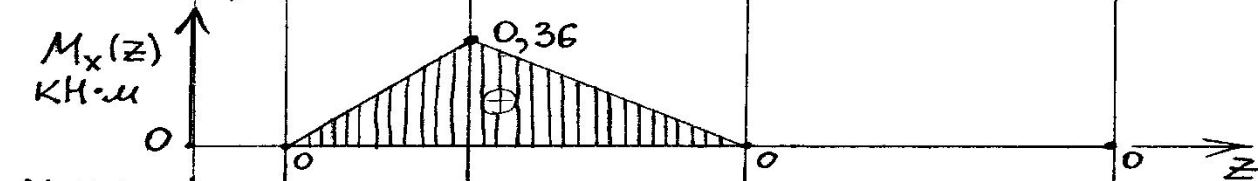
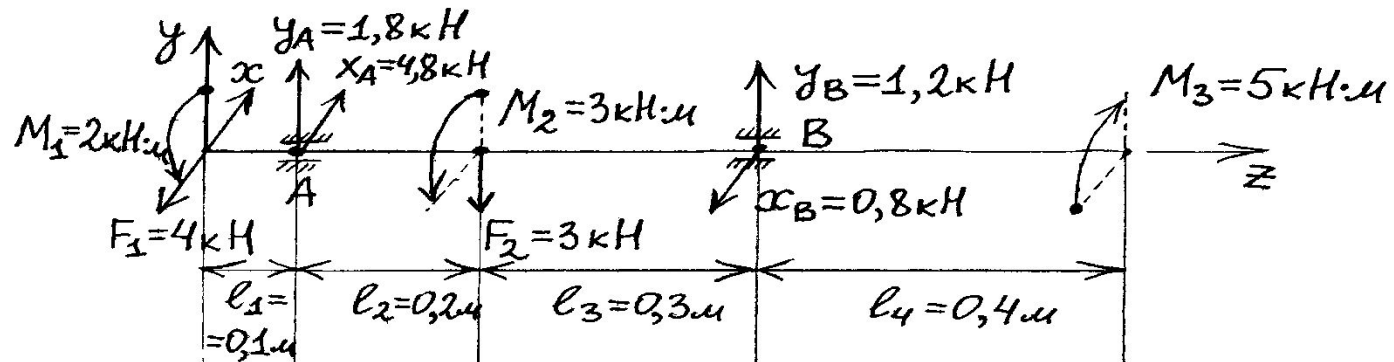
$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma]$$

Теория подтверждается экспериментально для пластичных материалов, так как не учитывает различия между растяжением и сжатием. Пользуясь этой теорией приходится принимать:

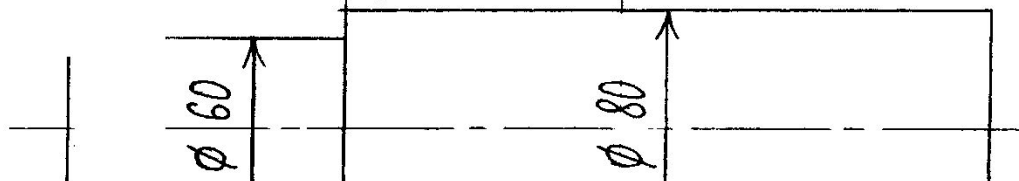
$$[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$$

Сложное сопротивление

- Сложное сопротивление – совместное действие на брус нескольких простых видов деформаций. Например изгиба и кручения.
- Сочетание деформаций изгиба и кручения характерно для работы валов машин. При расчетах валов учитывают касательные напряжения от изгибающих и крутящих моментов, пренебрегая сравнительно малыми касательными напряжениями от поперечных сил.



Ступенчатый вал



		M_x	M_y	M_z	M_ϑ	d_p	d_{cr}
1 участок	Начало						
	Конец						
2 участок	Начало						
	Конец						
3 участок	Начало						
	Конец						
4 участок	Начало						
	Конец						

Определение суммарного изгибающего момента:

$$M_{изг\Sigma} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Определение диаметров валов по участкам:

$$d_p = \sqrt[3]{\frac{M_\vartheta}{0,1 \cdot [\sigma]}}$$

Определение эквивалентного момента:

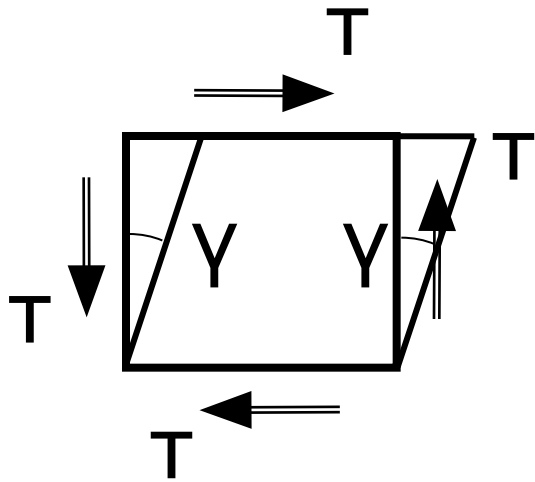
$$M_\vartheta = M_{изг\Sigma} + \sqrt{M_z^2}$$

$$[\sigma] = 100 \text{ МПа} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

РАСЧЕТЫ НА УСТАЛОСТЬ

Раздел 4. Сдвиг и кручение

Чистый сдвиг

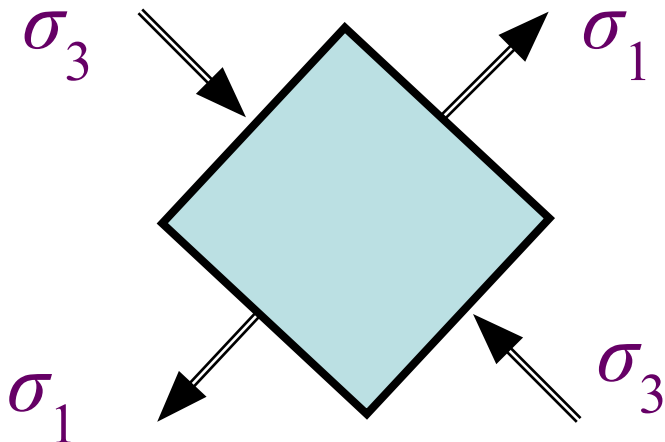


$$\tau = G\gamma \quad \text{- закон Гука}$$

τ - касательное напряжение;

G - **модуль сдвига**, МПа;

γ - угол сдвига.

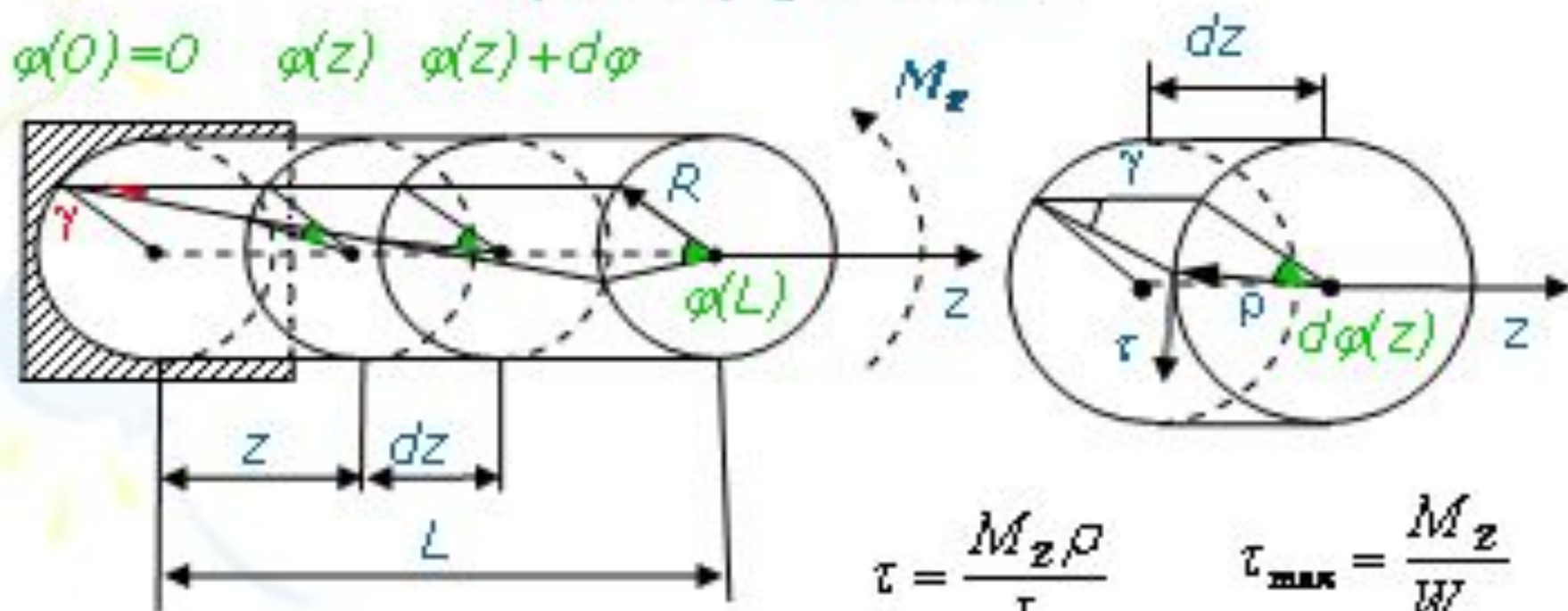


Главные напряжения
при чистом сдвиге

$$\sigma_1 = +\tau \quad \sigma_3 = -\tau$$

Напряжения и деформации при кручении

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(z) \quad \varphi(z) + d\varphi$$



$$\tau = \frac{M_z \rho}{I_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

$$\varphi(L) = \frac{M_z L}{GI_p}$$

- W_p – полярный момент сопротивления сечения

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{M_z}{W_p} \right) \leq [\tau]$$

- **проверочный расчет**

$$W_p = \frac{\max M_z}{[\tau]}$$

- **проектный расчет**

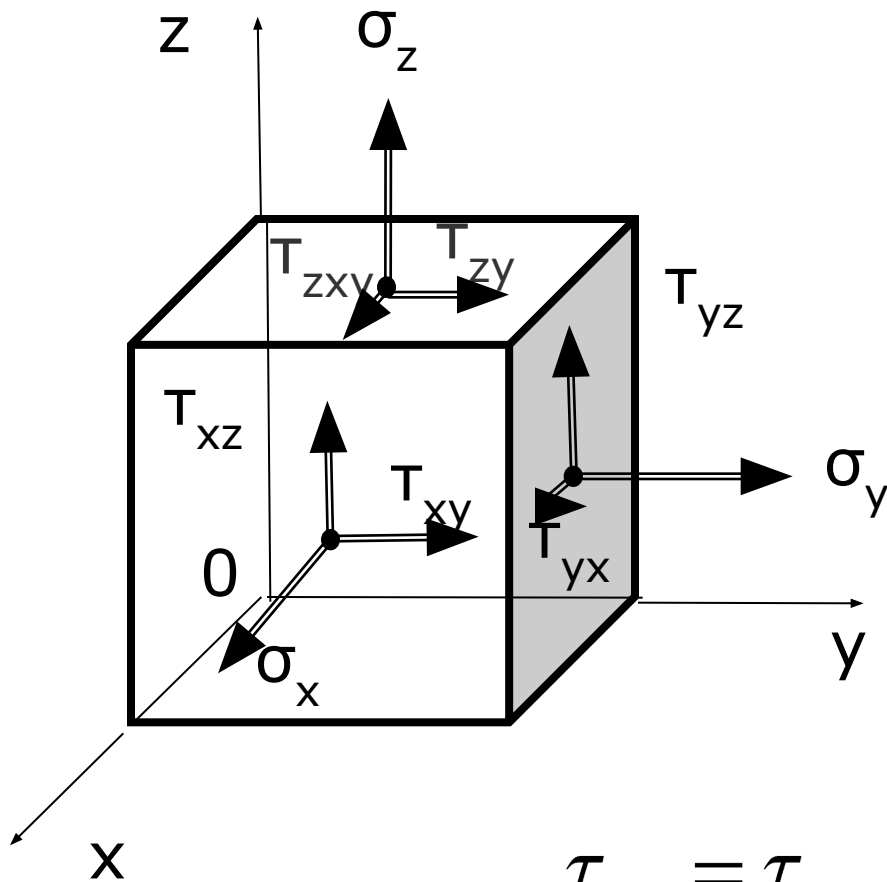
$$[\max M_z] = W_p [\tau]$$

- **определение допустимой нагрузки**

$$\max \theta = \max \left(\frac{M_z}{GI_p} \right) \leq [\theta]$$

- **условие жесткости при кручении**

Раздел 6. Напряженное и деформированное состояние



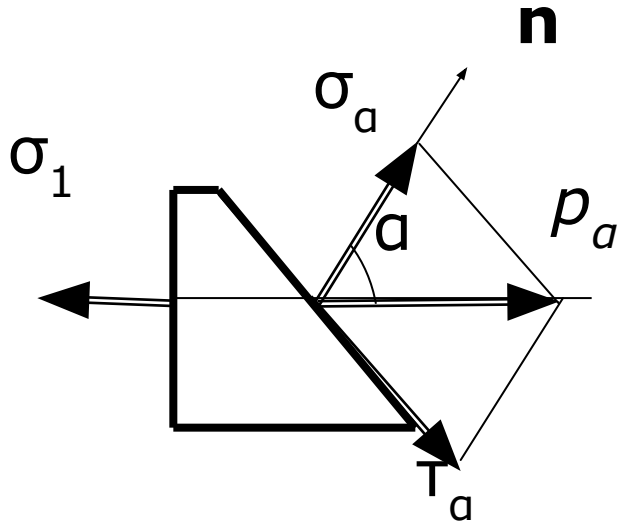
Тензор напряжений

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

**Закон парности
касательных
напряжений**

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Линейное напряженное состояние



На наклонной площадке

$$p_{\alpha} = \sigma_1 \cos \alpha \quad - \text{ полное}$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha \quad - \text{ нормальное}$$

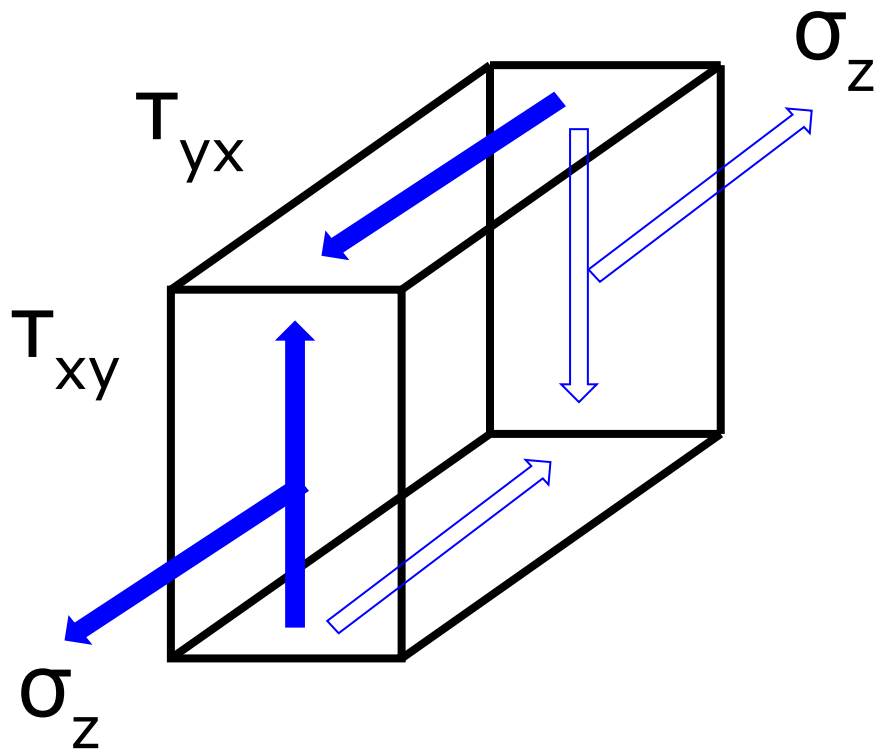
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \quad - \text{ касательное}$$

Максимальные касательные напряжения

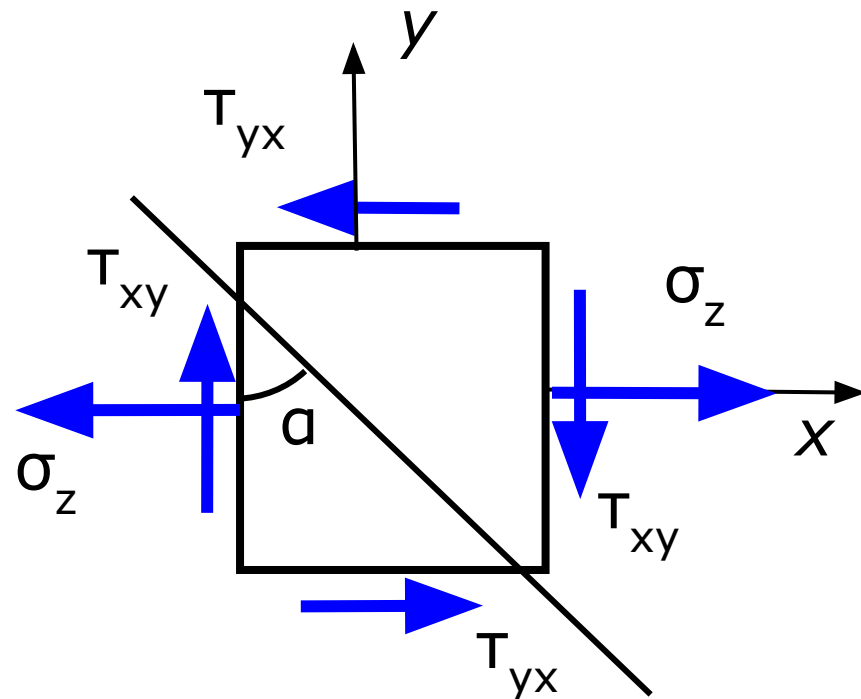
$$\alpha = \pi / 4, \quad \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2}, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} = \max \tau_{\alpha}$$

Упрощенное плоское напряженное состояние

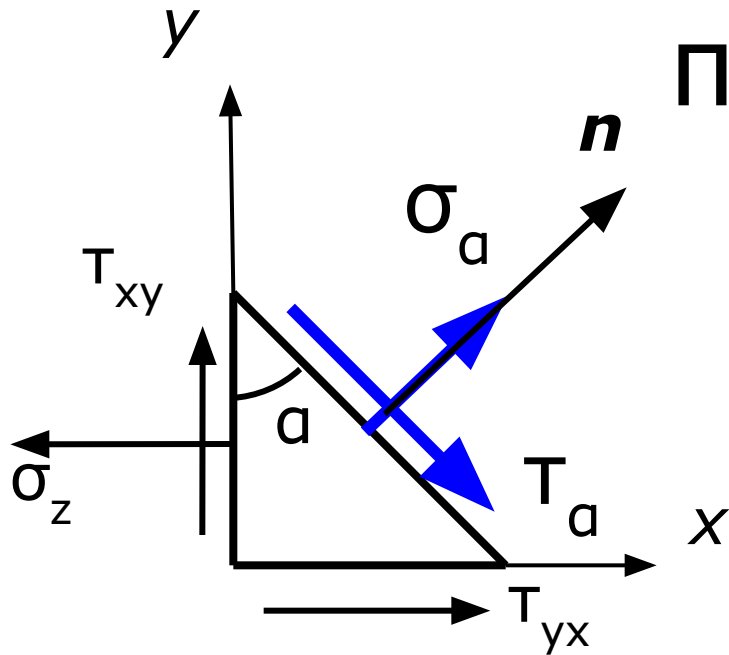
Общий вид



Схематичное
изображение



Напряжения на наклонной площадке



$$\sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = (\sigma_z / 2) \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha$$

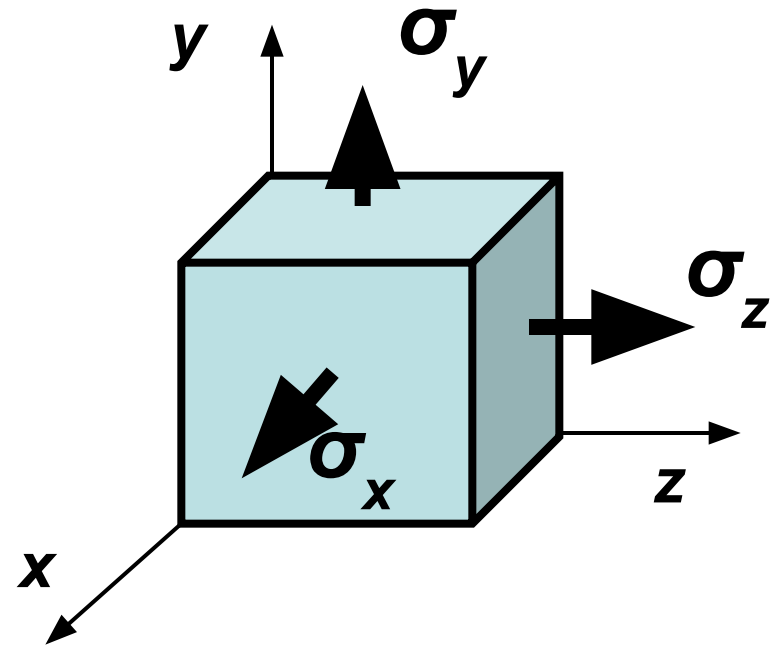
Главные напряжения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = -2\tau_{zy} / \sigma_z \quad \sigma_{1,3} = (\sigma_z / 2) \pm \sqrt{(\sigma_z / 2)^2 + (\tau_{zy})^2}$$

Максимальные касательные напряжения

$$\alpha_3 = \alpha_1 + 45^\circ \quad \tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sqrt{(\sigma_z / 2)^2 + (\tau_{zy})^2}$$

Обобщенный закон Гука



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

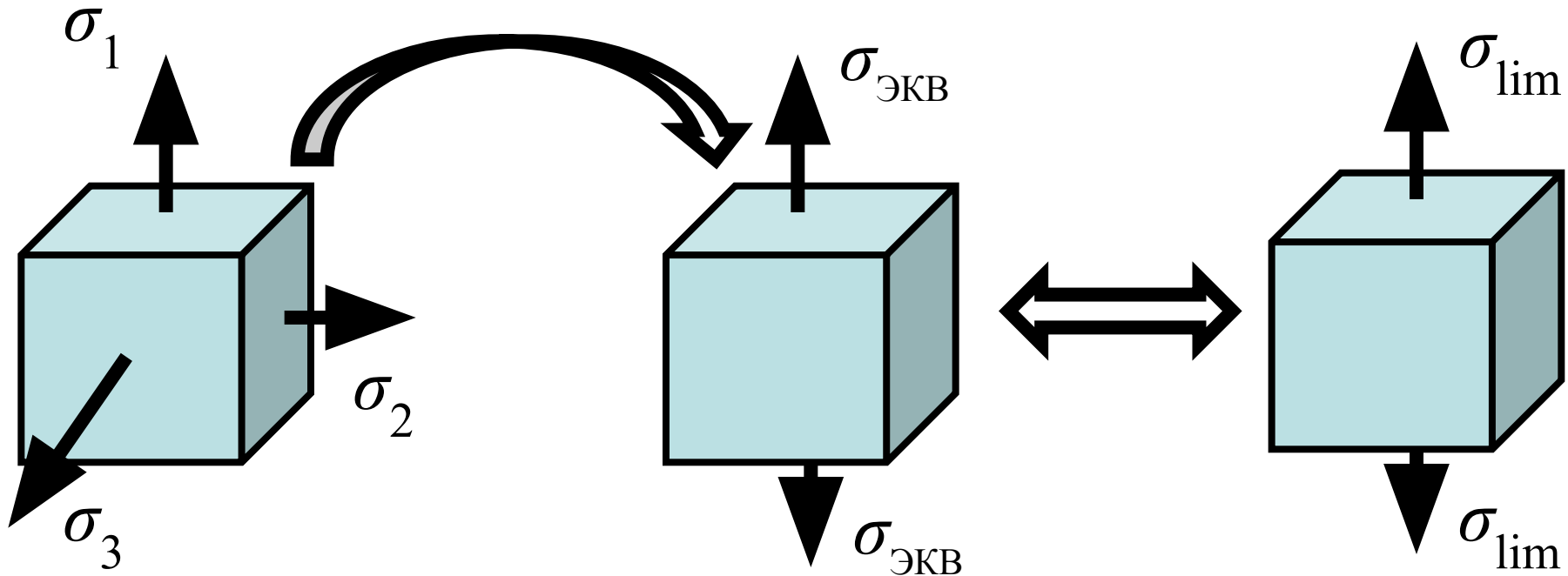
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Объемная относительная деформация

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Критерии предельного состояния материала



Заменяем исходное
напряженное состояние
эквивалентным

Определяем
коэффициент запаса
прочности

$$S = \sigma_{\text{lim}} / \sigma_{\text{ЭКВ}}$$

Критерии хрупкого разрушения

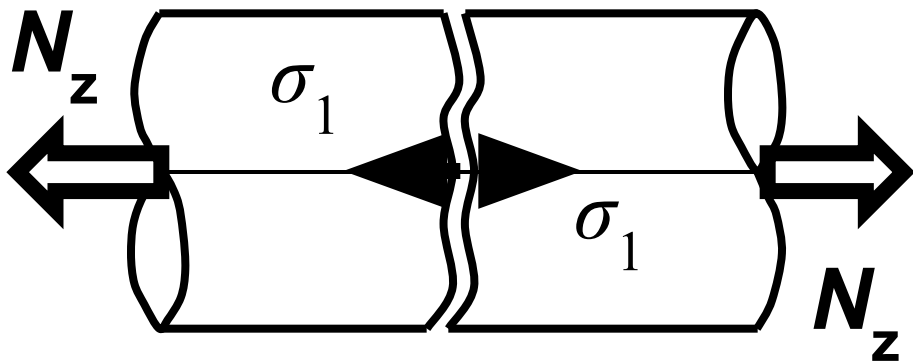
- наибольших нормальных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq [\sigma_p] \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}} = \sigma_3 \leq [\sigma_c]$$

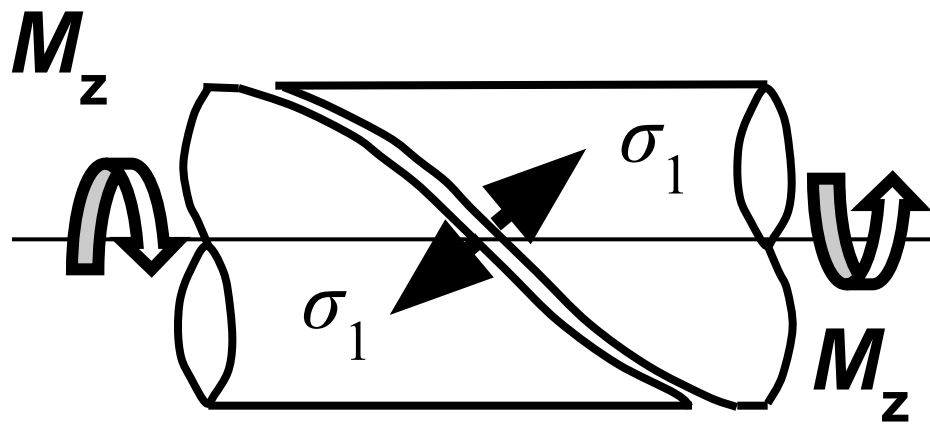
- наибольших относительных удлинений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

растяжение



кручение



Критерии появления пластических деформаций

- наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

- потенциальной энергии формоизменения

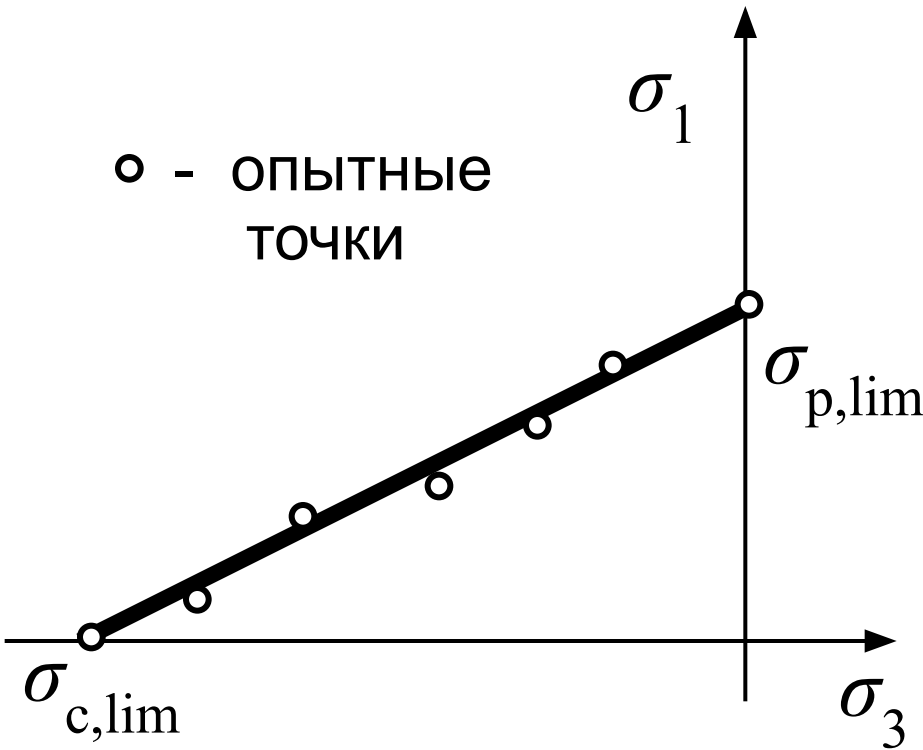
$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma]$$

- формулы для расчета валов

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Теория Мора

○ - ОПЫТНЫЕ
ТОЧКИ



Наступление опасного
(предельного) состояния

$$\sigma_{экв}^V = \sigma_1 - \frac{\sigma_{p,lim}}{\sigma_{c,lim}} \sigma_3 = \sigma_{p,lim}$$

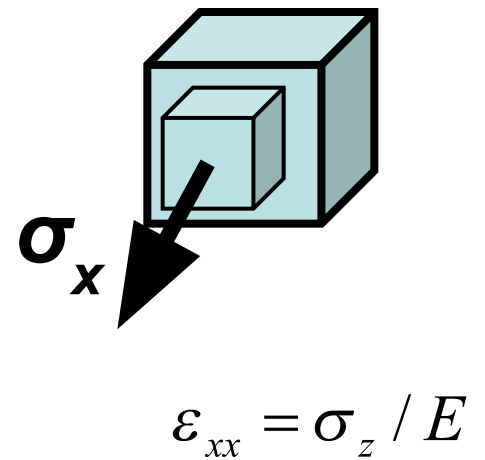
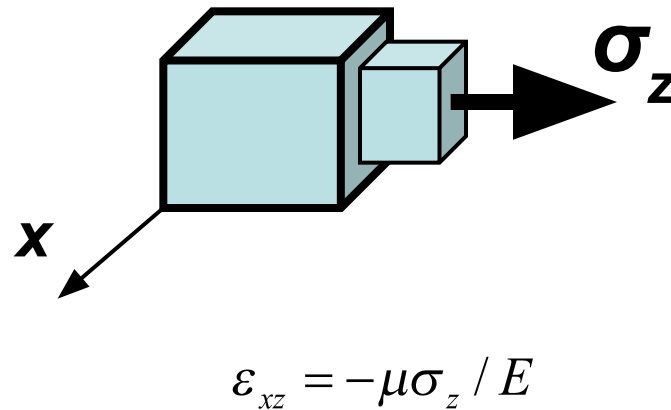
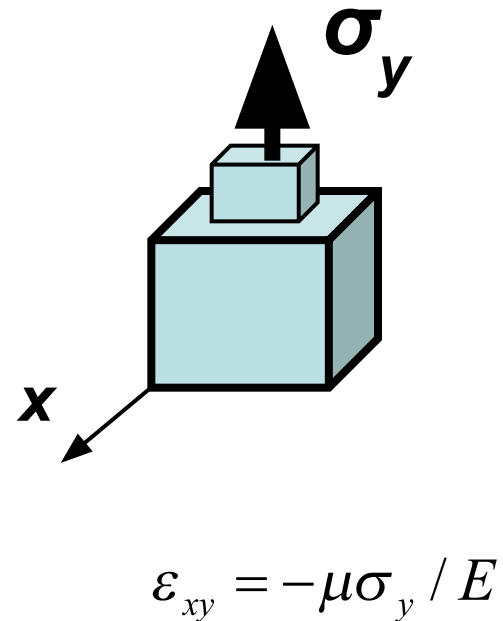
Условие прочности

$$\sigma_{экв}^V = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \leq [\sigma_p]$$

$\sigma_{p,lim}, \sigma_{c,lim}$ - опасные (предельные) напряжения
при растяжении и сжатии

$[\sigma_p], [\sigma_c]$ - опасные (предельные) напряжения
при растяжении и сжатии

Объемная относительная деформация



Геометрические характеристики плоских сечений

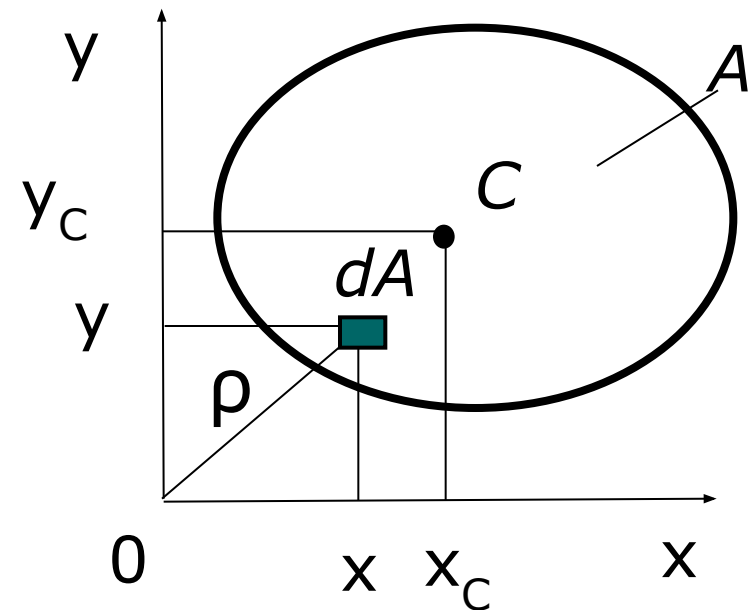
Площадь $A = \int_A dA$

Статические моменты

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA.$$

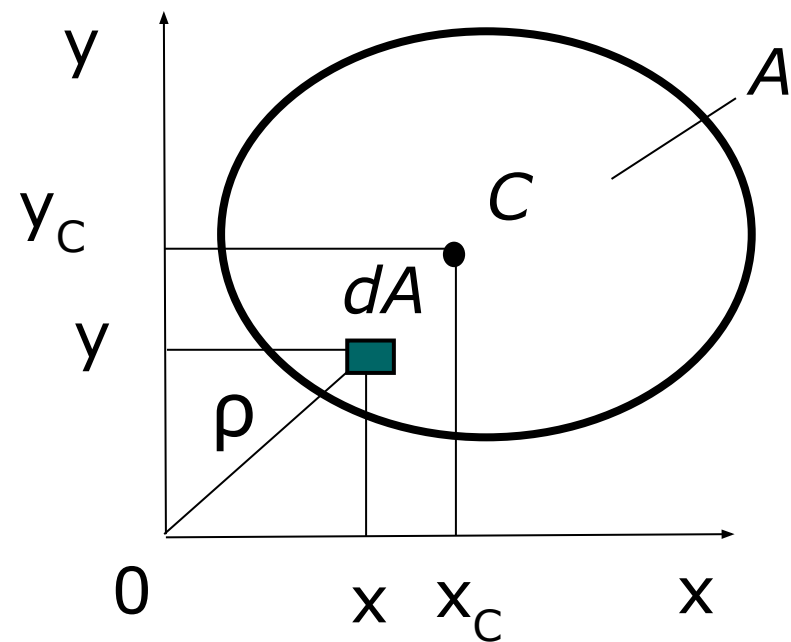
Координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A}, \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A},$$



Моменты инерции

Осевые $I_x = \int_A y^2 dA \geq 0, \quad I_y = \int_A x^2 dA \geq 0.$



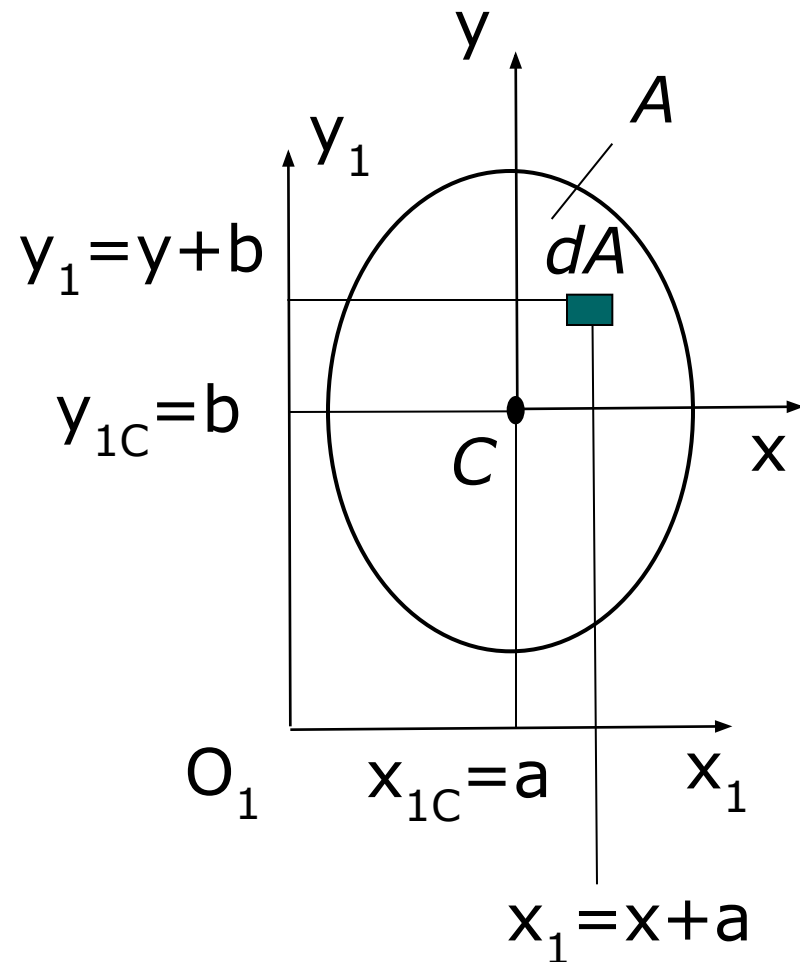
Полярный

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA \\ = (I_x + I_y) \geq 0,$$

Центробежный

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

Преобразование моментов при параллельном переносе осей



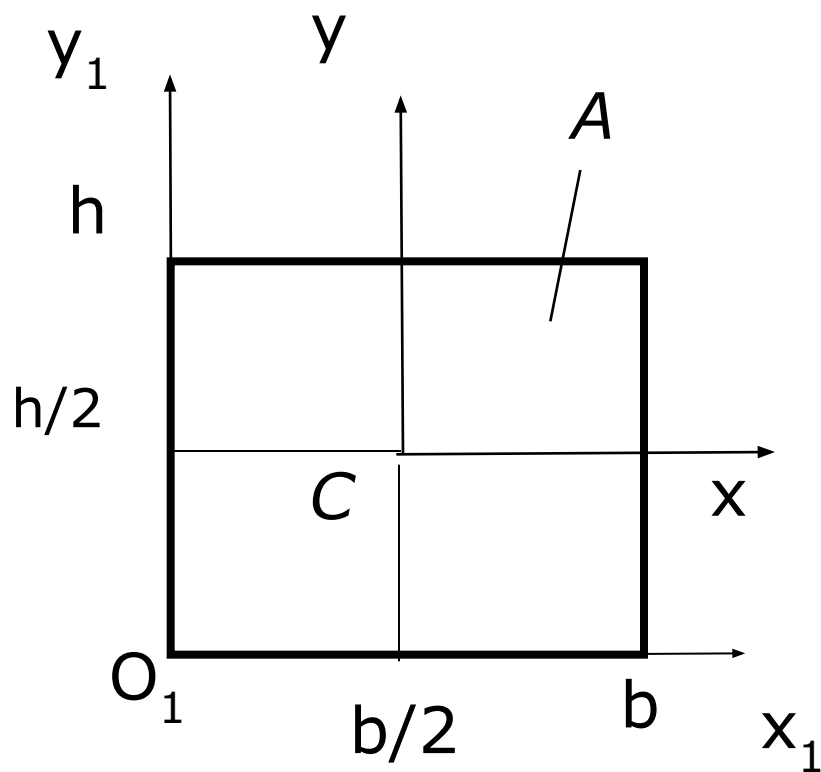
$$S_x = 0, \quad S_{x_1} = bA,$$

$$S_y = 0, \quad S_{y_1} = aA,$$

$$I_{x_1} = I_x + b^2 A$$

$$I_{y_1} = I_y + a^2 A$$

Моменты инерции прямоугольника

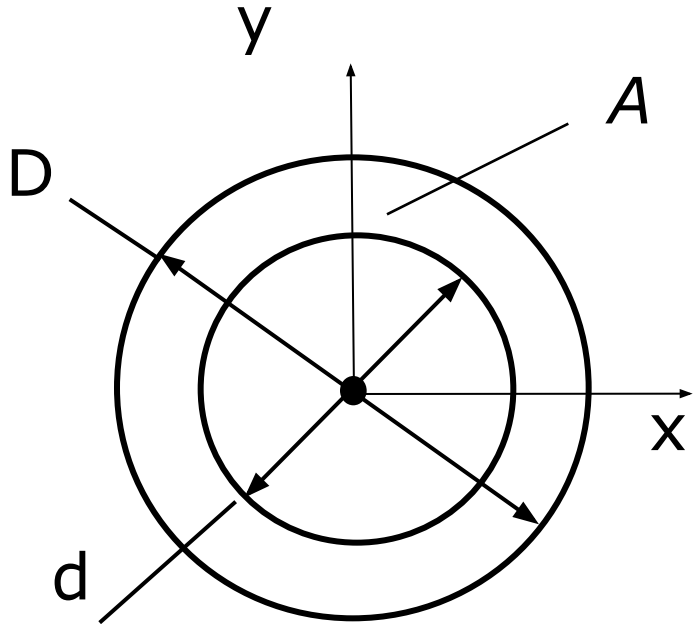


$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{b^3h}{12}.$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}, \quad I_{y_1} = \frac{b^3h}{3}.$$

Моменты инерции

Круга



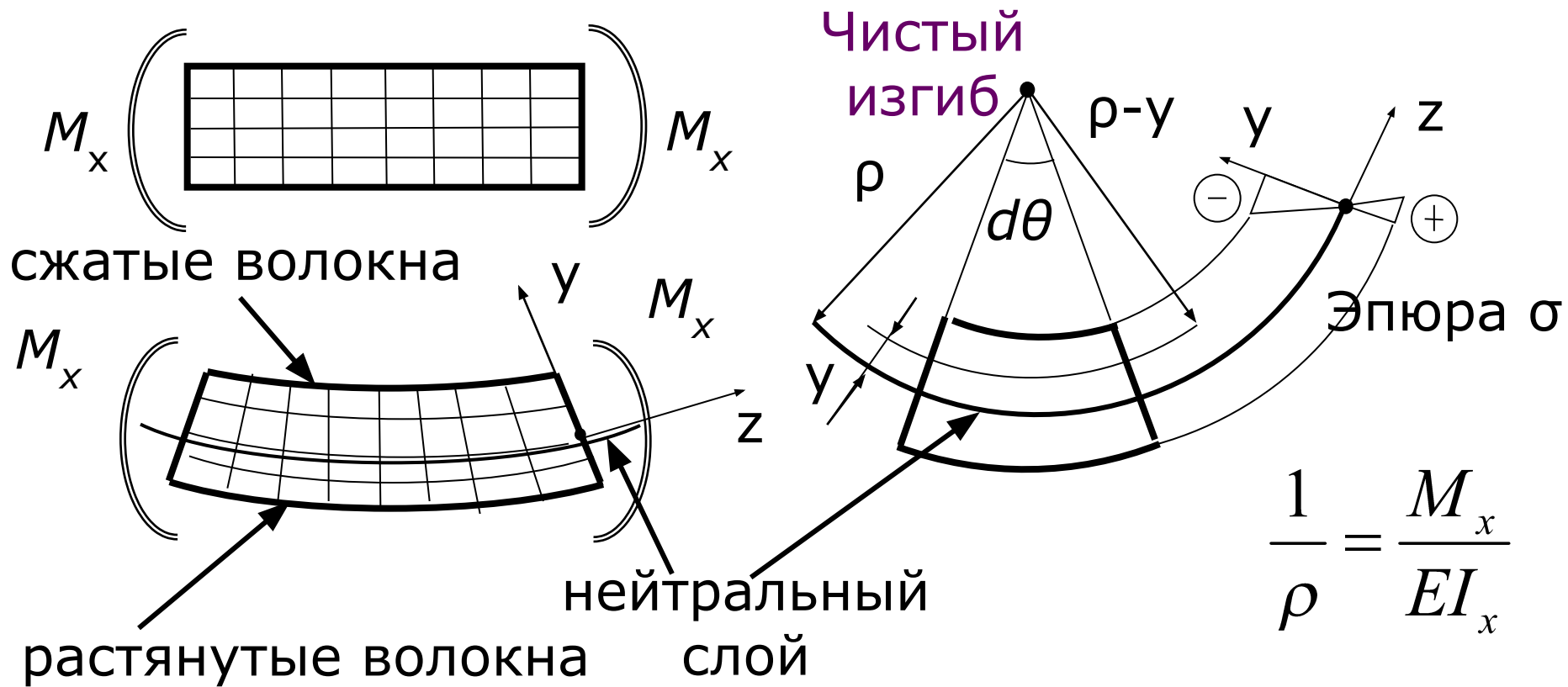
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4.$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4.$$

Кольца

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right), \quad I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right).$$

Изгиб прямых стержней



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$$

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \text{ - момент сопротивления при изгибе}$$