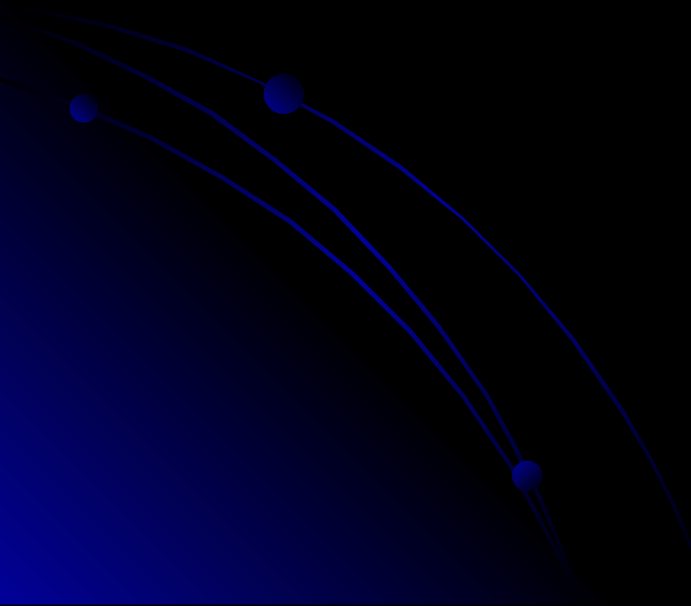


Нелинейные геометрии. СТО. История создания ОТО



ОТО

В геометрии ничего не изменится, если слова «точка», «прямая и «плоскость» заменить словами «стол», «стул» и «пивная кружка».

Гильберт

Общая теория относительности (ОТО) — физическая теория пространства-времени и тяготения, основана на экспериментальном принципе эквивалентности гравитационной и инерционной масс и предположении о линейности связи между массой и вызываемыми ею гравитационными эффектами.

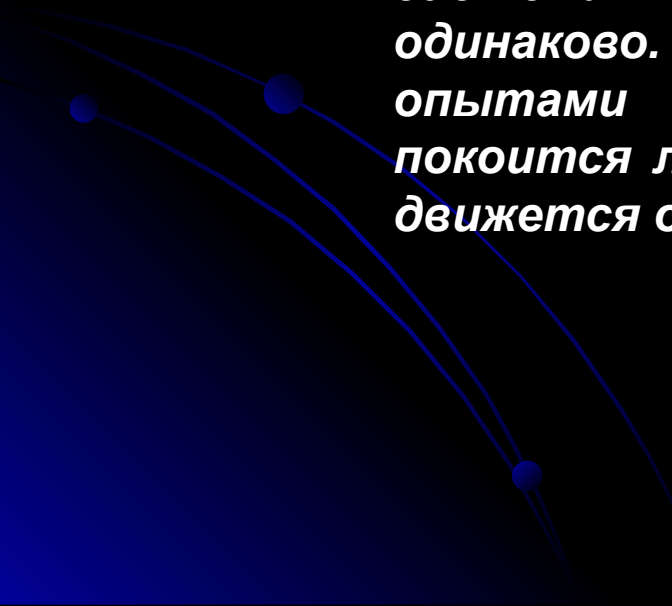
Представления о тяготении И.Ньютона

- абсолютно все оказывает воздействие на абсолютно все во Вселенной;
- воздействие представляет собой силу тяжести (тяготения), которая является силой притяжения;
- независимо от физической структуры, все оказывает и все испытывает воздействие силы тяготения;
- из анализа проведенного И.Кеплером изучения движения планет следует, что сила притяжения между двумя телами больше для тел большей масс; она увеличивается при уменьшении расстояния;
- Сила тяготения — далекодействующая, действует мгновенно на любом расстоянии

Классические представления о пространстве и времени

- пространство – бесконечно, однородно, изотропно, пусто, трехмерно, евклидово;
- время – бесконечно, однородно, однонаправленно.

Принцип относительности Галилея: во всех инерциальных системах отсчета законы механики формулируются одинаково. Это значит, что никакими механическими опытами внутри лаборатории нельзя установить, покоится ли она относительно главной системы или же движется относительно нее равномерно-прямолинейно.



Геометрия Евклида

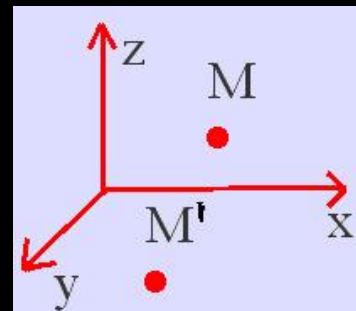


*Геометрия Евклида - параболическая,
радиус кривизны $R=0$*

Геометрия на плоскости (Евклидова) основывается на пяти основных постулатах:

1. Из каждой точки к каждой точке можно провести прямую линию, и притом только одну.
2. Отрезок можно непрерывно продолжить до прямой.
3. Из любого центра любым радиусом можно описать окружность.
4. Все прямые углы равны друг другу.
5. **Через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.**

Евклидово пространство - это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. Это n -мерное векторное пространство, в котором возможно ввести некоторые специальные координаты



Кривизна пространства Гаусса

Кривизна пространства Гаусса рассчитывается по формуле

$$K=1/R_1R_2$$

Если взять кривую поверхность и провести к какой-то точке касательную, затем построить в точку касания отрезок, перпендикулярный касательной плоскости, то получим нормаль.

Проведем через нормаль плоскость, точки пересечения двух плоскостей образуют часть окружности, наиболее плотно прилегающей к поверхности (для сферы – полную поверхность).

Т.к. можно провести сколько угодно плоскостей, то будут построены окружности с минимальным R_1 и максимальным R_2 радиусом.

Можно посчитать Гауссову кривизну пространства:

Если $K>0$, то поверхность в этой точке эллиптическая.

Если $K<0$, то гиперболическая.

Если $K=0$, то параболическая.

Метрикой какого-либо геометрического объекта — поверхности, пространства, гиперпространства — называется закон определения расстояния между двумя точками этого объекта. Она определяет те главные свойства геометрического объекта, которые связаны с измерениями, - и

Пространства Гаусса

- ✓ Сечение плоскости плоскостями всегда дает прямые. Кривизна прямой всегда равна нулю. Значит, кривизна плоскости тоже всегда равна нулю.
- ✓ Полная кривизна цилиндрической поверхности тоже равна нулю, т.к. одно из взаимно перпендикулярных сечений будет окружностью (сечение, перпендикулярное образующей цилиндра), а второе — прямой (сечение по образующей). Кривизна первой положительна, а второй — нулевая, их произведение даст нуль.
- ✓ У шара обе кривизны всегда положительны. Значит, будет положительной и полная кривизна.
- ✓ Поверхность постоянной отрицательной кривизны — псевдосфера («ложная сфера», «антисфера») два главных радиуса всегда имеют противоположные знаки — один «плюс», а другой «минус», произведение их всегда будет отрицательным. Еще одна из псевдосферических поверхностей похожа на седло - одна кривая сечения будет выпуклой, с положительной кривизной, то перпендикулярная ей кривизна окажется обязательно вогнутой — с отрицательной кривизной.

Главное свойство гауссовой кривизны — величина ее не меняется при любом изгибании поверхности, если та при этом не будет растягиваться или сжиматься. Цилиндр можно разрезать по образующей и развернуть — он превратится в кусок плоскости, где кривизна, равна нулю.

Нелинейные геометрии Лобачевского-Римана

*Геометрия Лобачевского,-
гиперболическая, радиус кривизны $R=-1$*

Аксиома о параллельных Н.И.Лобачевского: Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.

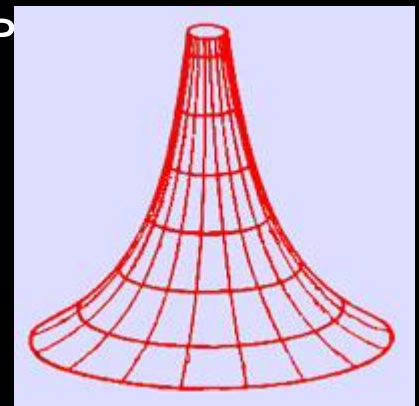


Лобачевский Н.И.

Геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны (псевдосфере).

Геометрия Лобачевского в пространстве может быть определена как геометрия внутри шара:

- Хорды – «прямые»;
- Плоские сечения внутри шара – "плоскости";
- Фигуры, которые переводятся одна в другую преобразованиями, переводящими шар в себя и хорды в хорды, – "равные фигуры";
- Сумма внутренних углов любого треугольника меньше двух прямых.



Псевдосфера

Нелинейная геометрия Лобачевского

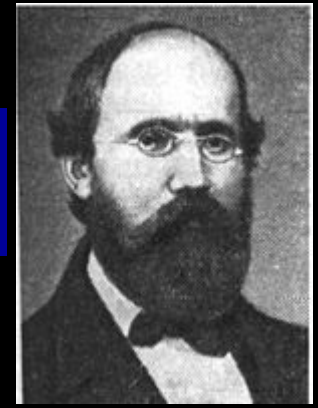
- Если прямые имеют общий перпендикуляр, то они бесконечно расходятся в обе стороны от него. К любой из них можно восстановить перпендикуляры, которые не достигают другой прямой.
- Не существует подобных, но неравных треугольников; треугольники равны, если их углы равны.
- Сумма углов всякого треугольника меньше 2π и может быть сколь угодно близкой к нулю.
- Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или *гиперциклом*.
- Предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса не есть прямая, а особая кривая, называемая *предельной окружностью*, или *орициклом*.
- Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растёт быстрее. В частности, в геометрии Лобачевского число π не может быть определено как отношение длины окружности к её диаметру.

Нелинейные геометрии Лобачевского-Римана

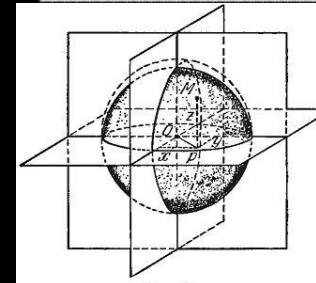
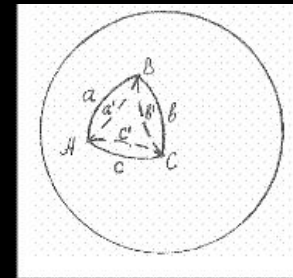
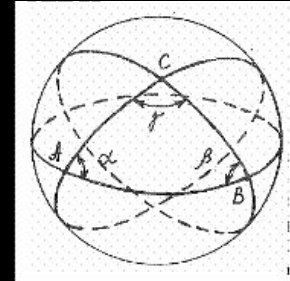
Геометрия Римана – эллиптическая, радиус кривизны $R=+1$

Через точку, лежащую вне прямой, невозможно провести ни одной прямой, параллельной первой”.

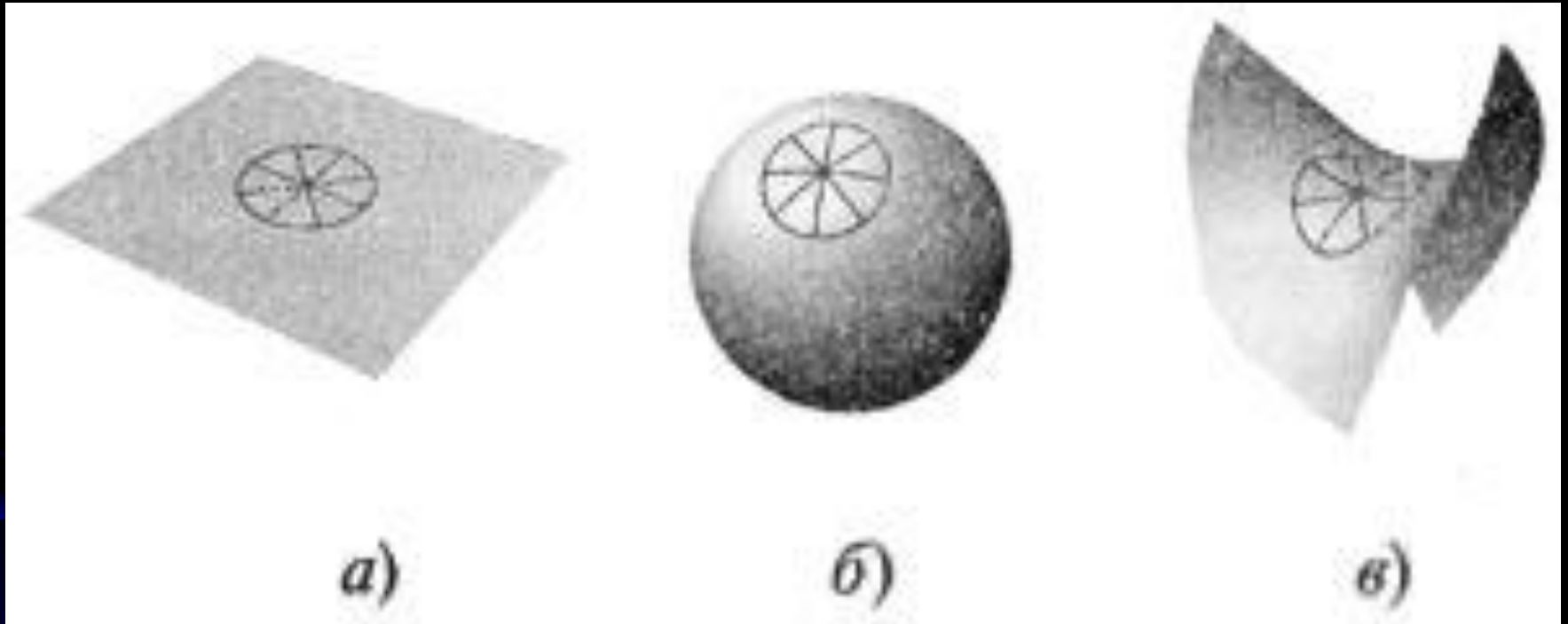
Риман: метрические отношения следует искать и фиксировать в бесконечно малой области пространства



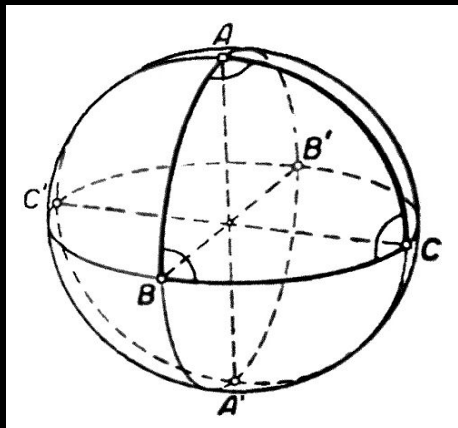
- Две прямые всегда пересекаются, параллельных прямых нет. Риман Георг Ф. Б.
- Сумма углов прямолинейного треугольника больше 180° .
- Прямая имеет конечную длину, плоскость – конечную площадь.
- Расстояние между двумя точками на сфере - длина меньшей из 2х дуг большой окружности, соединяющей эти точки.
- Роль прямых линий на сфере (самых коротких линий, соединяющих две точки сферы) играют большие окружности - сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр.
- Углы между большими окружностями, как и углы между любыми другими линиями на сфере, равны углам между касательными к этим линиям в точках пересечения.
- Роль треугольников и многоугольников в сферической геометрии играют сферические треугольники и многоугольники, образованные дугами больших окружностей.
- Окружности в сферической геометрии - малые окружности, сечения сферы плоскостями, не проходящими через ее центр.



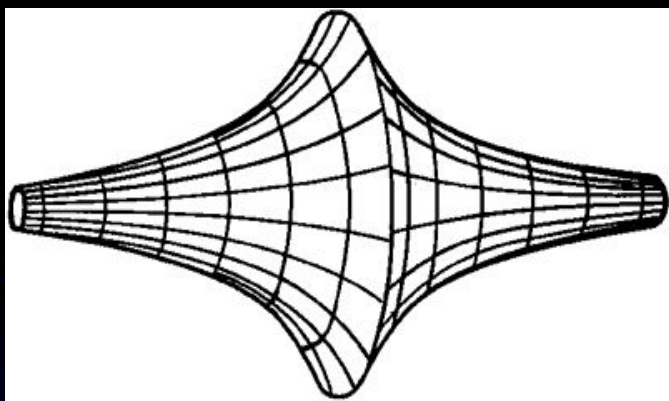
Окружность в евклидовом, сферическом и гиперболическом пространствах



Модели Б. Римана, Н.И. Лобачевского



Модель пространства Б. Римана обладает положительной кривизной. В данной космологической модели прямая определяется двумя точками, плоскость - тремя, две плоскости пересекаются по прямой и т.д., но через данную точку нельзя провести к прямой ни одной параллельной.



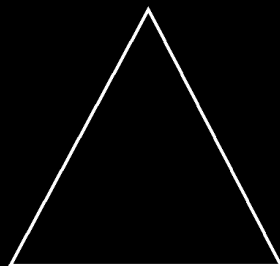
Модель пространства Н. И. Лобачевского, также известна как пространство - псевдосфера, описываемой неевклидовой геометрией (геометрией Н. И. Лобачевского). Характеризуется отрицательной кривизной.

Наглядное сравнение степеней кривизны пространства:

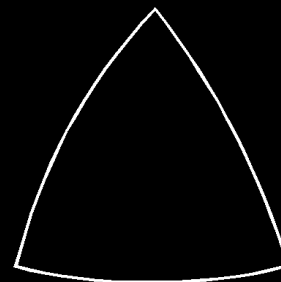
а - геометрия Эвклида, сумма углов $\triangle = 180^\circ$

б - пространство Б.Римана, сумма углов $\triangle > 180^\circ$

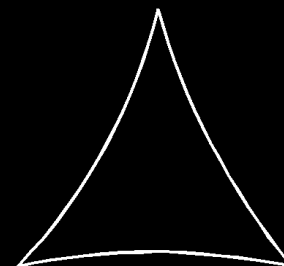
в - пространство Н.И.Лобачевского, сумма углов $\triangle < 180^\circ$



а



б



в

Сопоставление геометрий Евклида, Лобачевского, Римана

Риман: метрические отношения следует искать и фиксировать в бесконечно малой области пространства

| Евклид | Лобачевский | Риман |
|--|---|---|
| 2 точки определяют единственную прямую. | | |
| 2 прямые пересекаются в единственной точке. | | |
| Через точку вне прямой проходит одна параллельная прямая | Через точку вне прямой проходит сколько угодно параллельных прямых | Параллельных прямых нет - все прямые пересекаются |
| Сумма углов треугольника: | | |
| Равна 180 | Меньше 180 | Больше 180 |
| Существуют подобные треугольники; стороны не выражаются через углы | Не существует подобных треугольников; стороны выражаются через углы | |
| Площадь треугольника: | | |
| Не выражается через углы | $S = k(p - s)$, где s - сумма углов треугольника | $S = k(s - p)$, где s - сумма углов треугольника |

Пространство Минковского

Введено А. Пуанкаре и Г. Минковским в 1907-08 гг.

Пространство Минковского - четырёхмерное пространство, объединяющее физическое трёхмерное пространство и время.

Точки в пространстве Минковского соответствуют «событиям» специальной теории относительности.

А. Пуанкаре первым установил и детально изучил одно из самых важных свойств преобразований Лоренца — их групповую структуру, и показал, что "преобразования Лоренца представляют не что иное, как поворот в пространстве четырех измерений, точки которого имеют координаты

Положение события в пространстве Минковского задаётся четырьмя координатами — **тремя пространственными и одной временной**: x, y, z, ct , где x, y, z — прямоугольные декартовы координаты события в некоторой инерциальной системе отсчёта, и координата ct , где t — время события, c — скорость света.

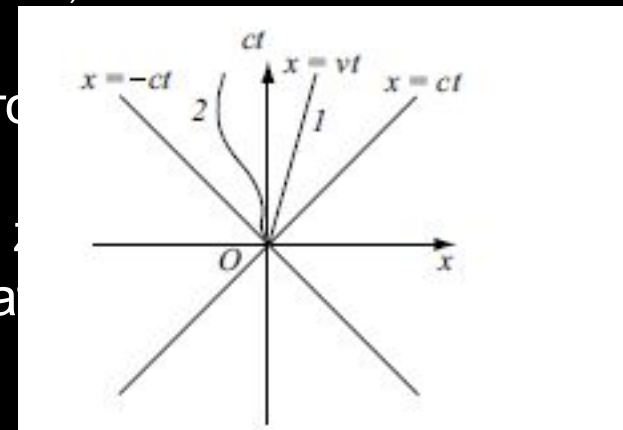


Диаграмма Минковского и мировые линии

Термины гиперболической геометрии

Множество мировых точек, описывающее движения частицы (материальной точки) во времени, называется **мировой линией**.

Интервал в пространстве Минковского $s = \sqrt{(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$ играет роль, аналогичную роли расстояния в геометрии евклидовых пространств. Квадрат интервала не всегда положителен, также между различными событиями интервал может быть равен нулю. Множество всех векторов с нулевым квадратом интервала образует коническую поверхность и называется **световым конусом**.

Основной инвариант пространства Минковского — квадрат длины четырёхмерного вектора, соединяющего две точки — события, не меняющийся при вращениях в пространстве, и равный по величине (но противоположный по знаку) квадрату четырёхмерного инварианта специальной теории относительности: $s^2 = c^2 t^2 - x^2$ (для одномерного случая)

Вектор, лежащий внутри светового конуса, называется **временеподобным вектором**, вне светового конуса — **пространственноподобным**.

Интервал между двумя событиями, через которые проходит мировая линия инерциального наблюдателя, делённый на c , называется его **собственным временем** (совпадает со временем, измеренным движущимися вместе с наблюдателем часами). Для неинерциального наблюдателя собственное время между двумя событиями соответствует интегралу от интервала вдоль мировой линии.

Термины гиперболической геометрии

Если вектор, соединяющий мировые точки, *времениподобен*, то существует система отсчета, в которой **события происходят в одной и той же точке трёхмерного пространства**.

Если вектор, соединяющий мировые точки двух событий, *пространственноподобен*, то существует система отсчета, в которой эти два **события происходят одновременно**; они не связаны причинно-следственной связью; модуль интервала определяет простран-ственное расстояние между этими точками (событиями) в этой системе отсчета.

Множество всех мировых линий света, исходящих из данной мировой точки, как правило, рассматриваемые в совокупности со всеми входящими, образует **двухполостную коническую гиперповерхность**, инвариантную относительно преобразований Лоренца, называемую **изотропным** или **световым конусом**. Эта гиперповерхность разделяет причинное прошлое данной мировой точки, её причинное будущее и причинно независимую с данной мировой точкой (пространственноподобную) область пространства Минковского.

Касательный вектор к мировой линии любого обычного физического тела является **времениподобным вектором**. Касательный вектор к мировой линии света (в вакууме) является **изотропным вектором**. Кривая, касательный вектор к которой в каждой ее точке *времениподобен*, называется **времениподобной линией**. Аналогично определяются **пространственноподобные** и **изотропные линии**.

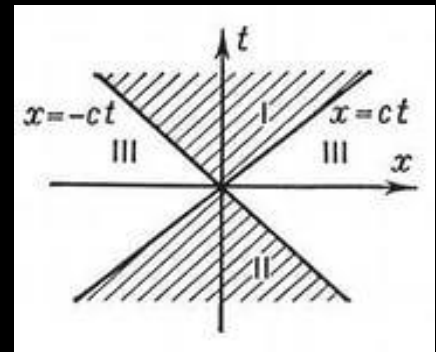
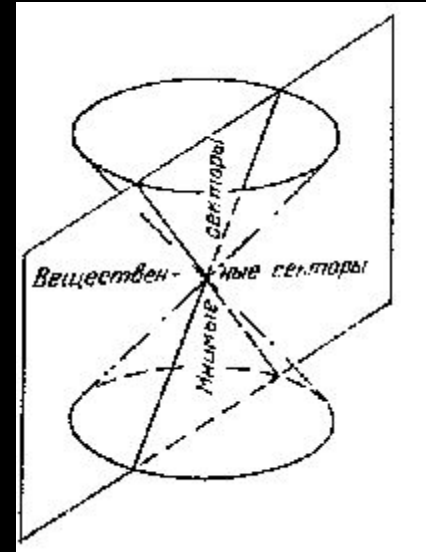
Гиперповерхность, все касательные векторы которой *пространственноподобны*, называется **пространственноподобной гиперповерхностью** (на ней задаются начальные условия), если же в каждой точке гиперповерхности найдется *времениподобный* касательный вектор, такая поверхность называется

Пространство Минковского

В геометрии Минковского уравнению $t^2 - x^2 - y^2 = 0$

соответствуют две чашеобразные поверхности, расположенные на «единичном расстоянии» от начала координат («расстоянию» в геометрии Минковского соответствует реальное время, т. е. время, измеряемое в физическом эксперименте при помощи движущихся часов). Внутренняя геометрия является гиперболической -

группой движений пространства Минковского, то есть группой преобразований, сохраняющих метрику, является 10-параметрическая *группа Пуанкаре*, состоящая из 4 трансляций — 3 пространственных и 1 временной, 3 чисто пространственных вращений и 3 пространственно-временных вращений, иначе называемых *бустами*. Последние 6, взятые вместе, образуют подгруппу группы Пуанкаре — *группу преобразований Лоренца*. Таким образом, пространство Минковского является четырёхмерным метрическим пространством наивысшей возможной степени симметрии.



События в пространстве Минковского

Событие находящееся за пределом светового конуса относительно данного, не связано с ним причинно-следственными связями.

На рис. все точки верхнего сектора, исходящего из точки А, включая ограничивающие его изотропные прямые $y = x$ и $y = -x$, находятся в области абсолютного будущего по отношению к точке А, а все точки нижнего сектора вместе с ограничивающими его изотропными прямыми - в области абсолютного прошлого. Из каждой точки псевдоевклидовой плоскости исходят два сектора: сектор абсолютного прошлого и сектор абсолютного будущего.

Точки, лежащие на одной мировой линии, находятся во временной последовательности. Для точек, не лежащих на одной мировой линии, последовательность событий нарушается.



Траектория частицы с отличной от нуля массой времениподобна - такая кривая в случае пространства Минковского целиком лежит внутри светового конуса с вершиной в любой точке на ней.