



Раздел 1: Механика

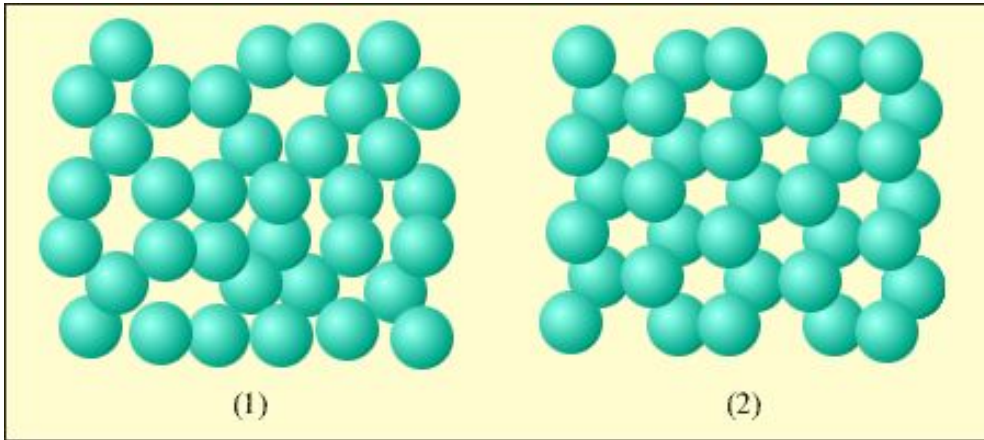
Тема1. Кинематика	2	2		
Тема2. ДПД	2	1		
Тема3. ДВД	3	2		
Тема4. Работа. Энергия		1	1	
Тема5. Элементы МСС		2	1	
Тема6. Релятивистская механика		1	1	

Тема 5. Элементы механики сплошных сред

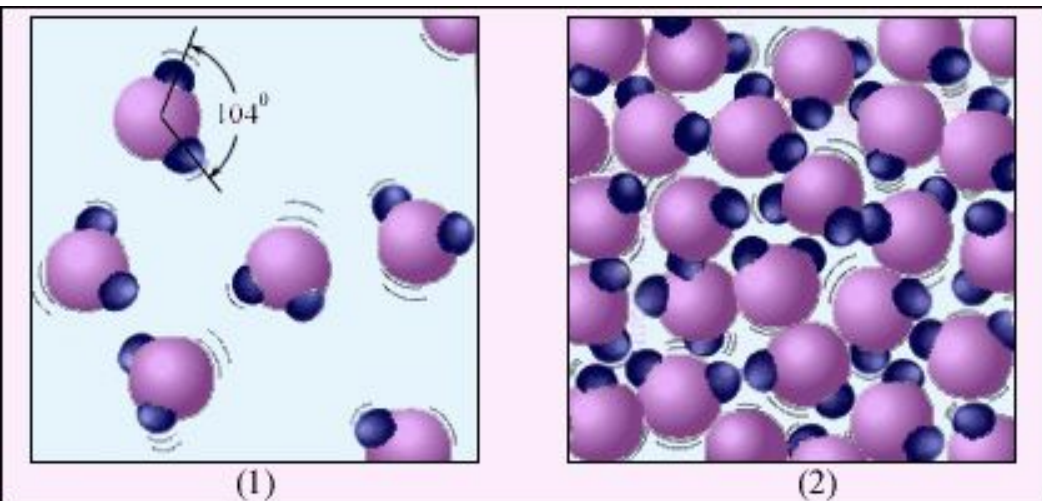


1. Общие свойства жидкостей и газов.
2. Статика жидкостей.
3. Течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли.
4. Режимы течения вязкой жидкости.
5. Упругие напряжения и деформации твердых тел.

1 учебный вопрос: Общие свойства жидкостей и газов.



Ближний порядок молекул жидкости и кристаллического вещества: 1 – вода; 2 – лед.



Водяной пар и вода. Молекулы воды увеличены в $5 \cdot 10^7$ раз

Сплошные среды: жидкость, газ, твердое тело.

*Классическая механика – дискретный подход
В МСС рассматривается движение составных
частей среды друг по отношению к другу –
континуальный подход.*

*Движение в МСС: течение жидкостей и газов,
деформации твердых тел.*

Особенности течения жидкостей и газов

МСС использует единый подход к изучению жидкостей и газов: они рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные в занятой ими области пространства; их движение описывается одинаковыми уравнениями.

Отличительной особенностью течения жидкостей и газов является их текучесть, связанная с малыми силами трения при относительном движении соприкасающихся слоев. Отсутствие силы трения покоя.

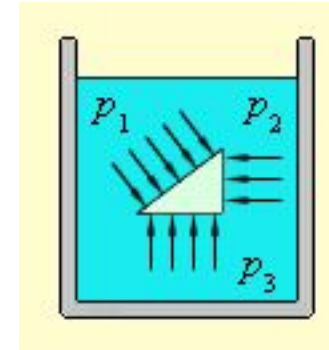
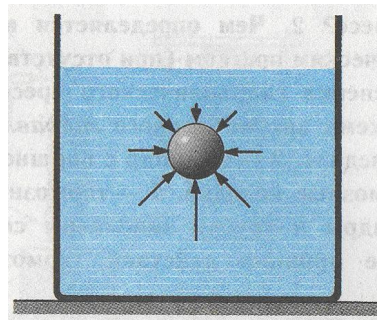
Разделы МСС:

- 1) динамика и статика жидкости и газа – гидродинамика, гидростатика (гидромеханика);*
- 2) теория деформации твердых тел.*

Гидромеханика сжимаемой и несжимаемой жидкости.

*Несжимаемой считается жидкость, плотность которой постоянна ($\rho = \text{const}$).
Это физическая абстракция.*

2 учебный вопрос: Статика жидкостей (гидростатика)



Жидкость действует на каждый элемент стенки сосуда ΔS с силой $\Delta \vec{F}$, направленной по нормали к ΔS .

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется давлением жидкости

p :

$$p = \Delta F / \Delta S \quad (1)$$

Единица измерения давления – паскаль (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к поверхности площади 1 м², 1 Па = 1 Н/м².

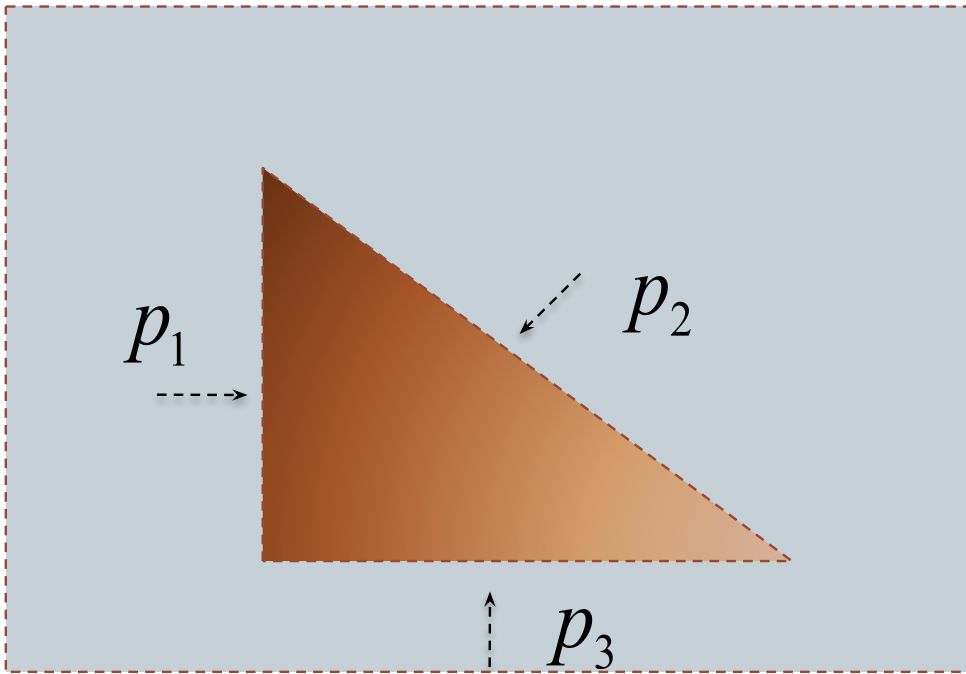
Внесистемные единицы измерения давления:

$$1 \text{ ат} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \approx 1 \frac{9,8}{10^{-4}} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \approx 10^5 \text{ Па}$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$$

*Давление при равновесии жидкостей подчиняется
закону Паскаля*

*Давление в любом месте покоящейся жидкости
одинаково по всем направлениям, причем давление
одинаково передается по всему объему, занятому
данной жидкостью.*



$$p_1 = p_2 = p_3$$

Давление в жидкости, находящейся в силовых полях (например в поле силы тяжести), увеличивается с глубиной.

Давление, обусловленное весом верхних слоев жидкости называется гидростатическим.

Для несжимаемой жидкости на глубине h действует гидростатическое давление

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h \quad (2)$$

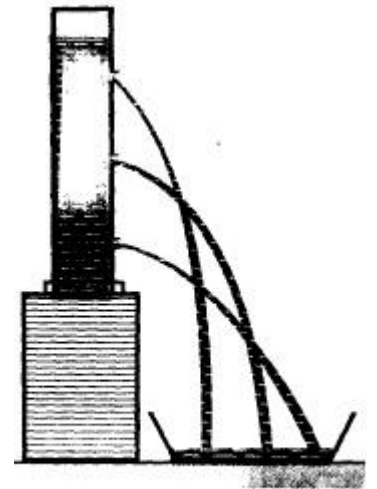
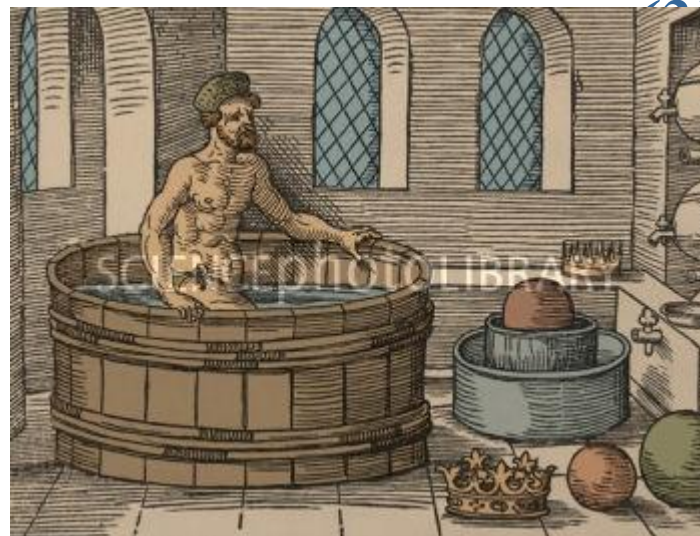
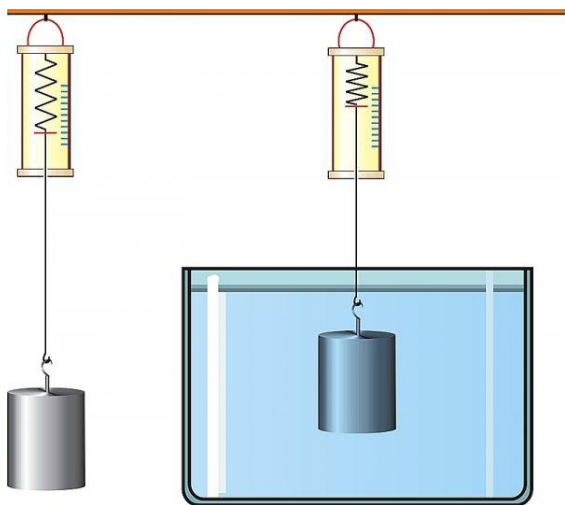


Рис. 100

Сила давления на нижние слои больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, определяемая законом Архимеда:

На тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа)

$$F_A = \rho g V$$



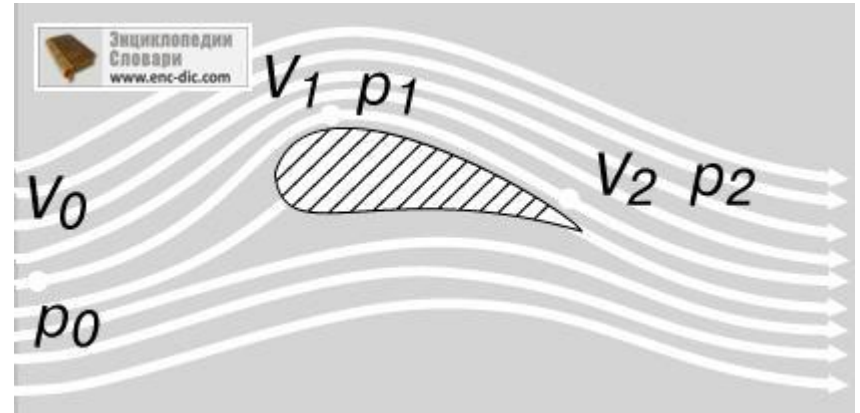
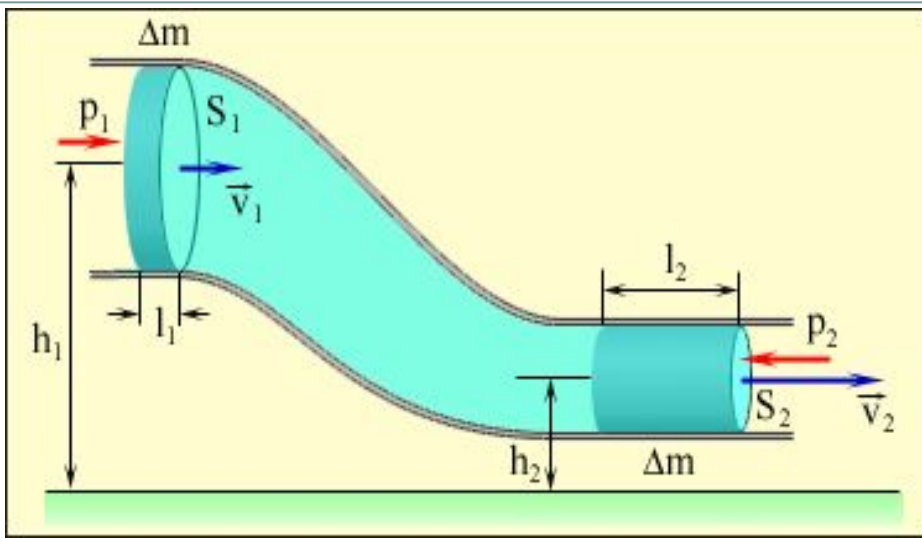
3 учебный вопрос: Течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли.



Воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, называется идеальной.



Данное приближение используется в отношении волн на поверхности жидкости, в гидравлике, в гидродинамических процессах с околосвуковыми скоростями и т.д.



Линии тока - линии, касательные к которым совпадают с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется трубкой тока.

Для идеальной жидкости можно получить уравнение, связывающее скорость и давление жидкости в различных сечениях трубки тока – закон Бернулли.

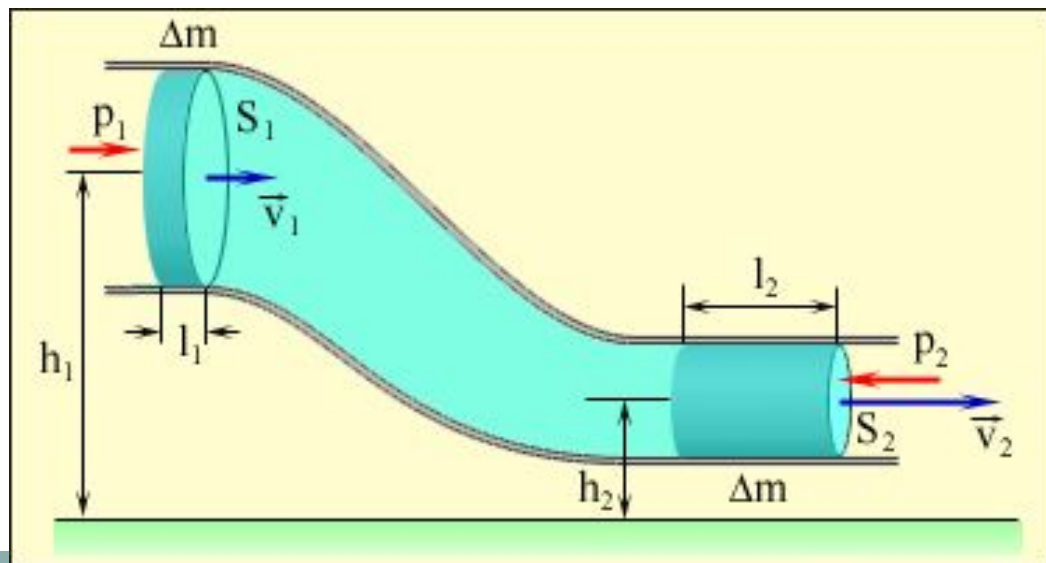
Выделим трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 .

Закон сохранения энергии $E_2 - E_1 = A$ (4)

$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2 = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 \quad (5)$$

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \quad (7)$$



(5), (6), (7) → (4):

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t \quad (8)$$

Объем несжимаемой жидкости постоянный

$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$. *Делим (8)/ ΔV :*

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2$$

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}}$$

(9)

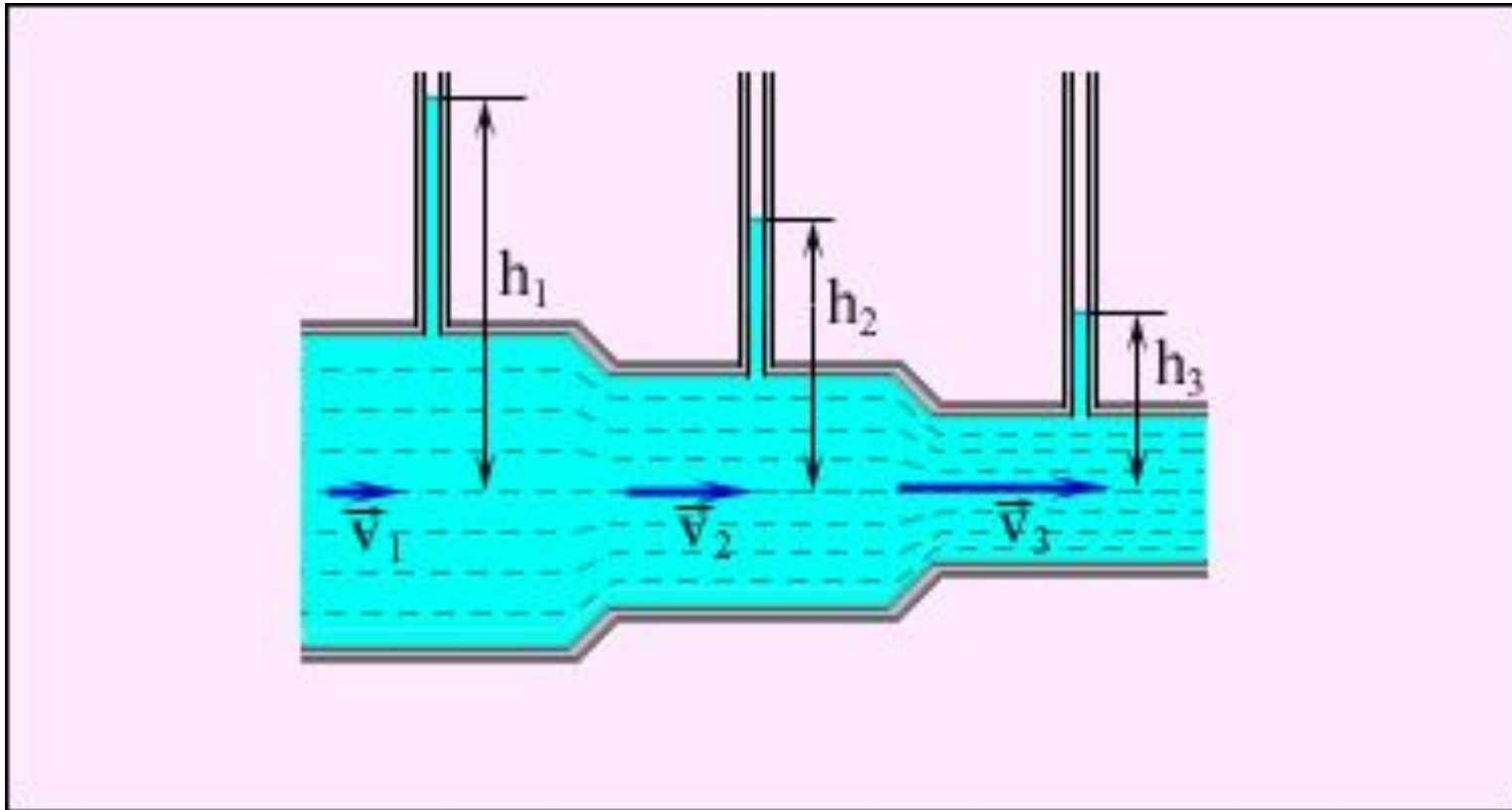
Уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости:

В потоке идеальной несжимаемой жидкости полное давление, состоящее из статического давления p , гидростатического давления $\rho g h$ и динамического давления $\rho v^2 / 2$, сохраняется постоянным.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$):

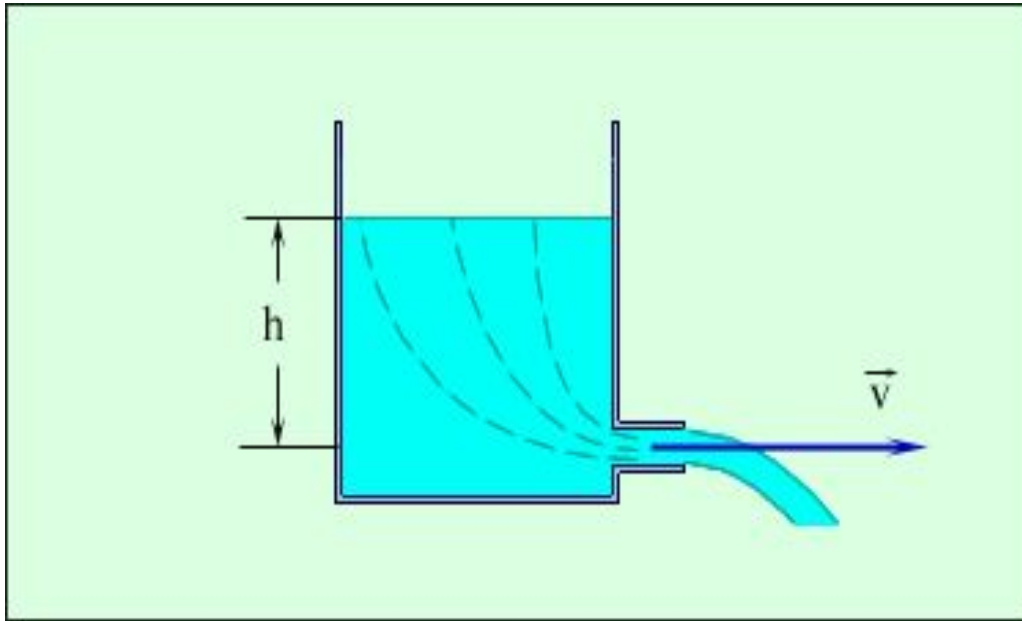
$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} \quad (10)$$

Пример 1. Измерение давления в потоке жидкости с помощью манометров.



С увеличением скорости в потоке жидкости давление падает: $v_1 < v_2 < v_3$; $h_1 > h_2 > h_3$

Пример 2. Определение скорости истечения из широкого сосуда (формула Торричелли)



$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const}$$

$$gh = \frac{v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} \quad (11)$$

Уравнения движения жидкости

1. Уравнение импульса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

2. Уравнение энергии

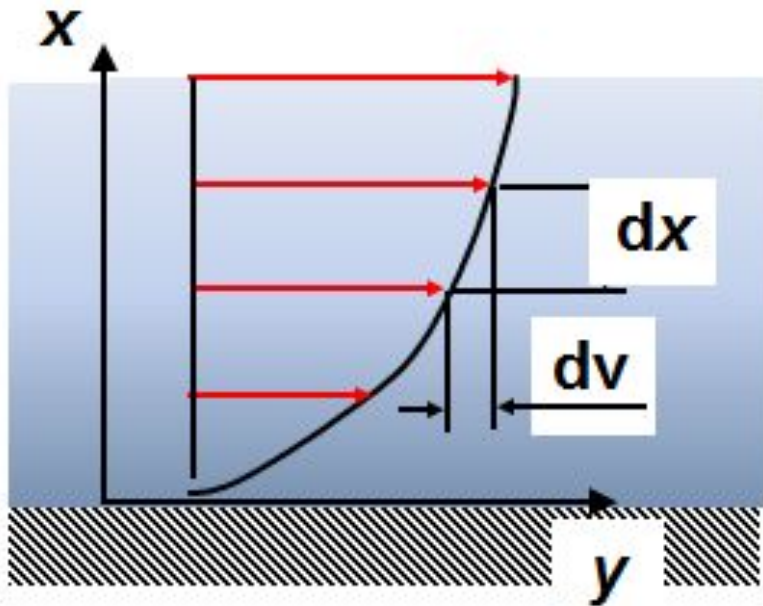
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T$$

3. Уравнение переноса массы (непрерывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

4 учебный вопрос: Режимы течения вязкой жидкости

Вязкость или внутреннее трение – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости или газа относительно другой.



Модуль силы трения между слоями жидкости – формула Ньютона

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dx} S \quad (12)$$

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dx} S$$

*η – коэффициент динамической вязкости,
[Па·с = Н·с/м²].*

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right] \quad \text{– коэффициент кинематической вязкости.}$$

Режимы течения вязкой жидкости зависят от соотношения сил вязкого трения $F_{тр}$ и сил инерции $F_{и}$:

$$F_{тр} = \eta \frac{dv}{dx} S$$

$$F_{и} = ma = \rho V \frac{dv}{dt} = \rho V \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \rho V v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{F_{и}}{F_{тр}} = \frac{\rho V v \frac{dv}{dx}}{\eta \frac{dv}{dx} S} = \frac{V/S \cdot v}{\eta/\rho} = \frac{l \langle v \rangle}{\nu} = Re$$

$$Re = \frac{l \langle v \rangle}{\nu}$$

– число Рейнольдса, характеризует отношение сил инерции к силам вязкого трения.

Режимы течения

$Re < 1000$,

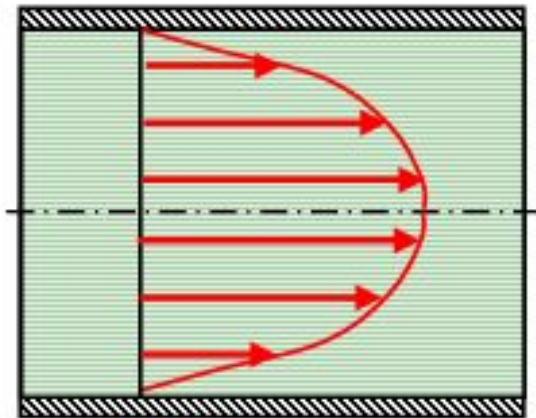
$F_{тр} > F_u$ – ламинарный

$1000 < Re < 2000$

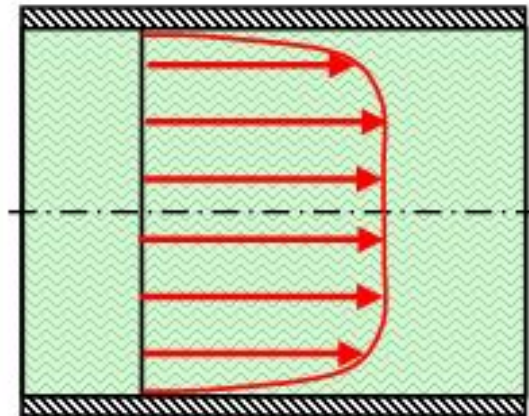
$F_{тр} \approx F_u$ – переходный

$Re > 2000$,

$F_{тр} < F_u$ – турбулентный

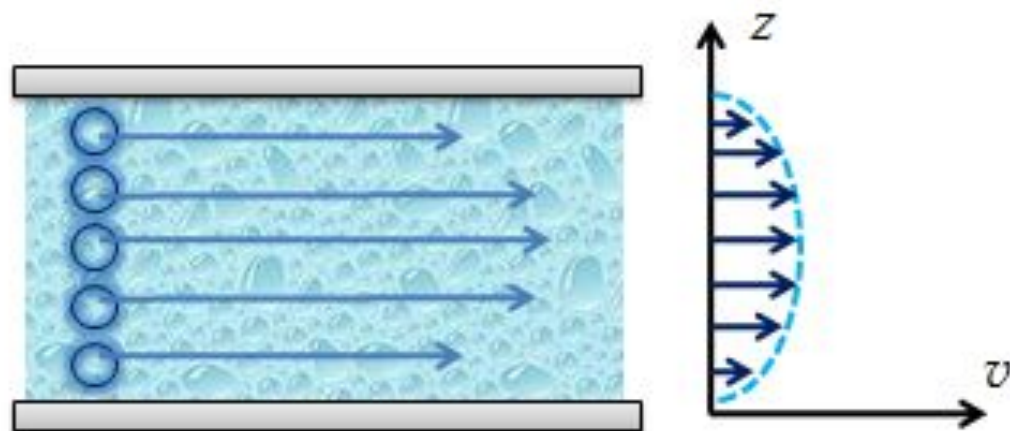


Ламинарный режим, $F_{тр} > F_u$

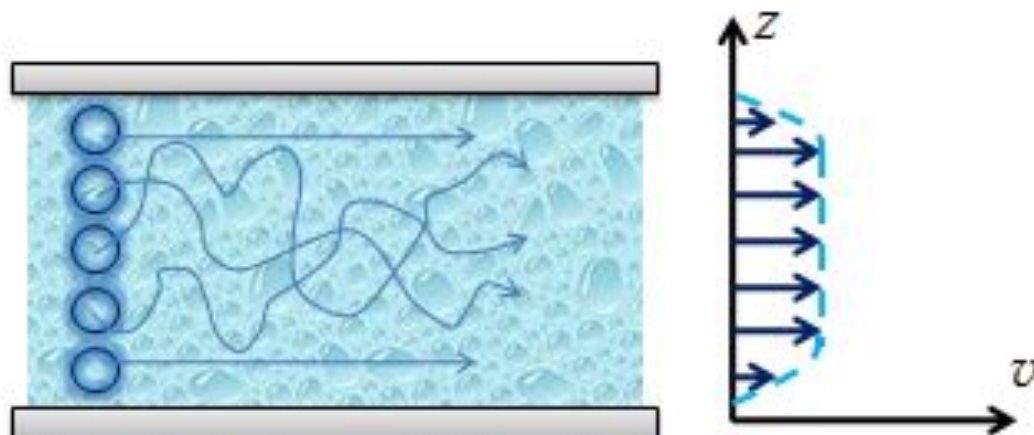


Турбулентный режим, $F_{тр} < F_u$

- **Ламинарным** называется течение, при котором каждый выделенный тонкий слой потока скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.



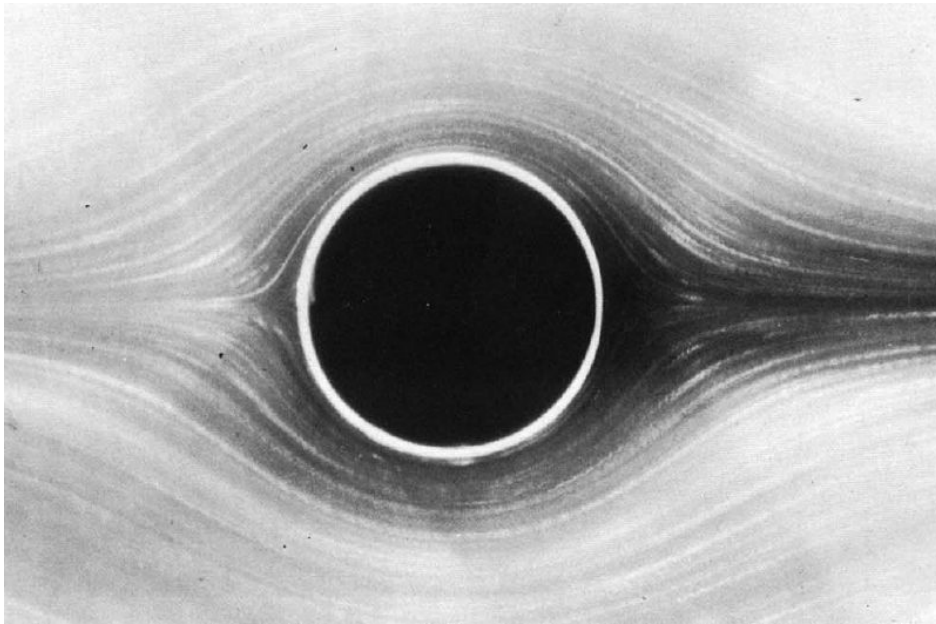
- При **турбулентном** течении происходит интенсивное перемешивание жидкости



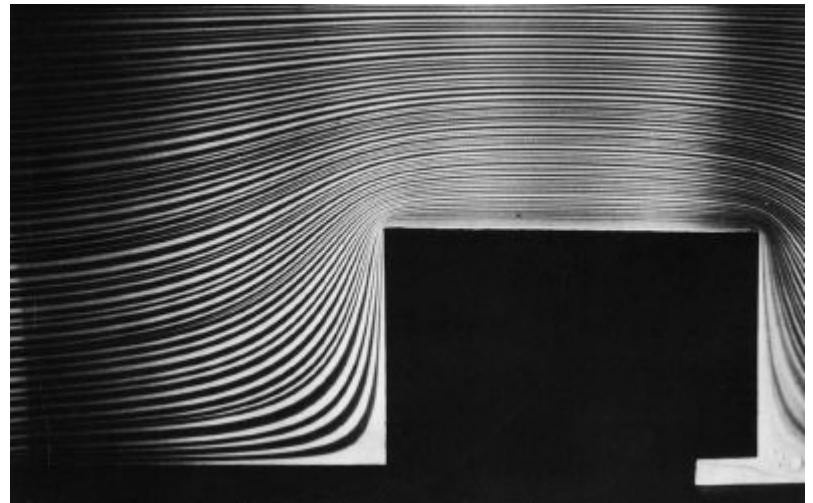
Ламинарное течение

- Обтекание кругового цилиндра однородным потоком жидкости при $Re = 0,16$.

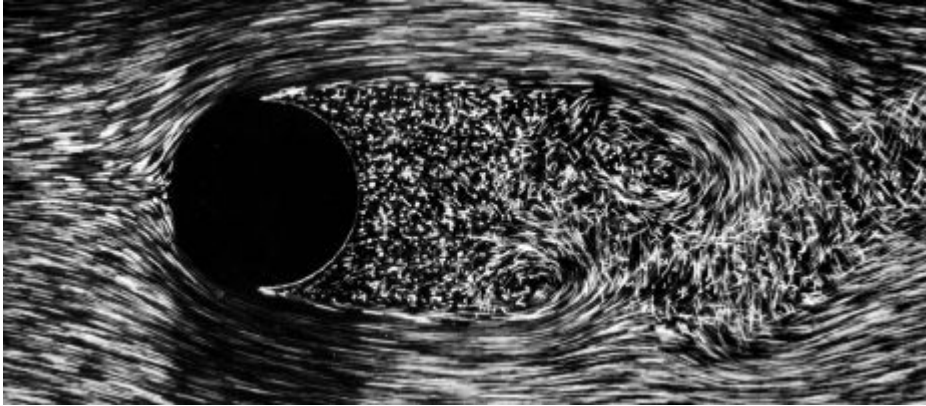
Для визуализации течения воды применен алюминиевый порошок.



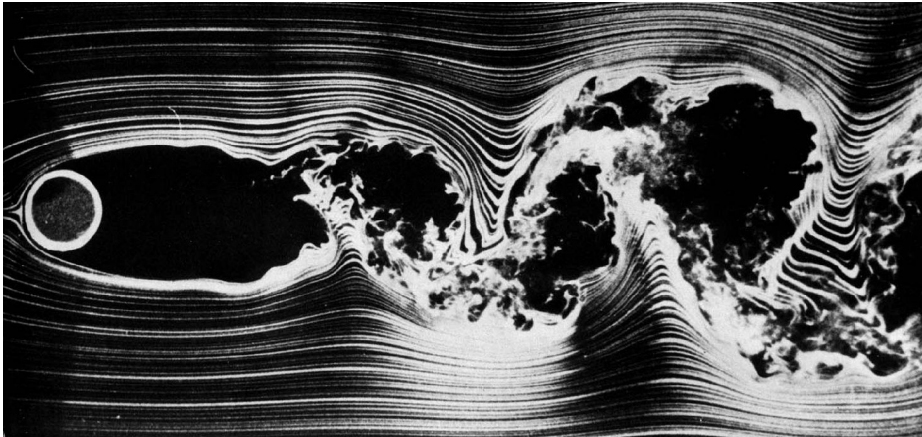
- Обтекание прямоугольного выступа на пластинке в лотке Хилл-Шоу. Краска в потоке масла выявляет линии тока плоского потенциального обтекания.



Турбулентное течение жидкости



- Обтекание кругового цилиндра при $Re = 2000$. В передней части слой ламинарен, затем он отрывается и разрушается, превращаясь в турбулентный.



- Обтекание кругового цилиндра при $Re = 10\ 000$.

Турбулентная затопленная струя воды

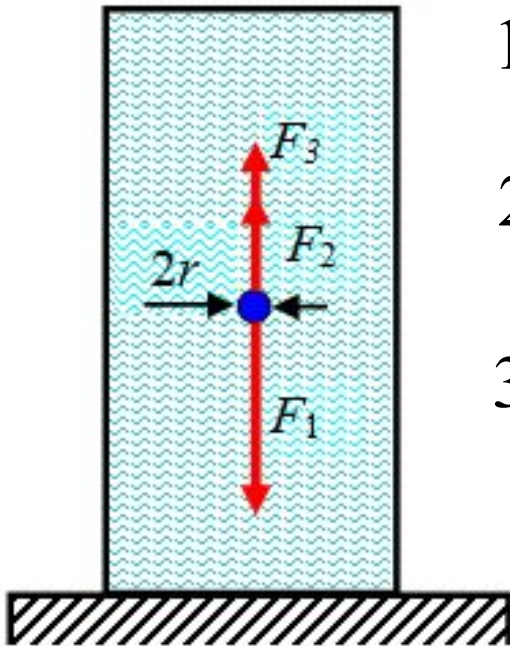
- Внедрение жидкой струи в окружающую жидкость в плоскости симметрии осесимметричной водяной струи, направляемой сверху вниз в воду.
- Число Рейнольдса равно приблизительно 2300.



Методы определения вязкости

Метод Стокса

Метод, предложенный английским физиком, математиком Д. Стоксом (1819 - 1903 г.г.), основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.



1. Сила тяжести $F_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{ш}} g$
2. Сила Архимеда $F_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{ж}} g$
3. Сила сопротивления $F_3 = 6\pi\eta r v$

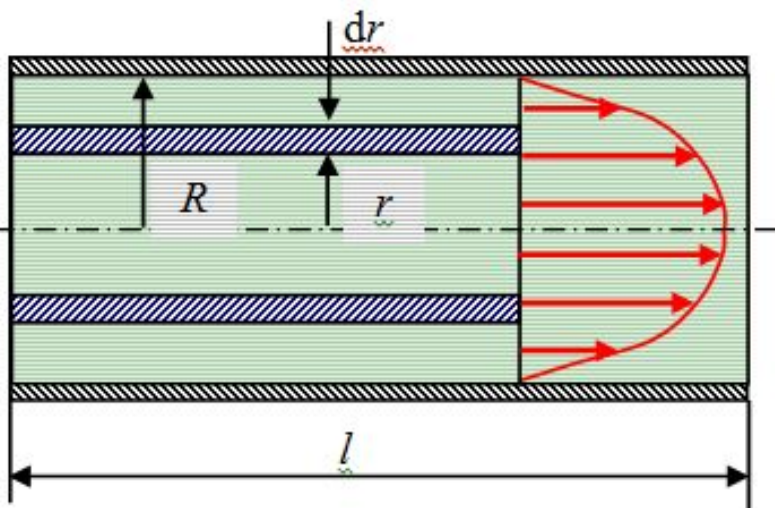
При равномерном движении $F_1 = F_2 + F_3$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ш}} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ж}} g + 6\pi\eta r v$$

$$\eta = \frac{2 (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) g r^2}{9v} \quad (13)$$

Метод Пуазейля

Метод, предложенный французским физиком, Пуазейлем (1799 - 1868 г.г.), основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре.



Равновесие сил трения и внешнего давления

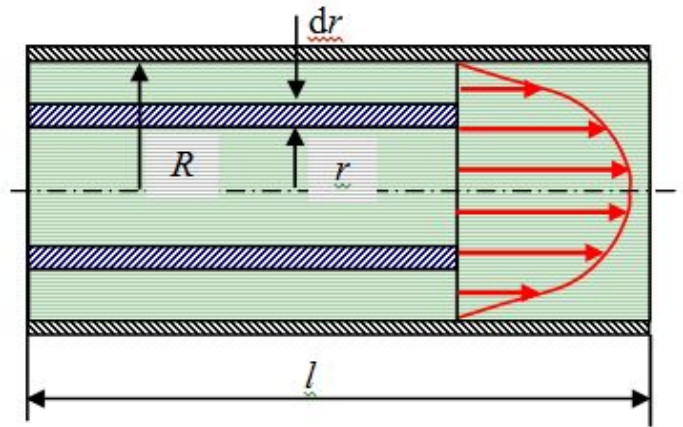
$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dr} S = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l =$$
$$= \Delta p \pi r^2$$

$$\int_v^0 dv = -\int_r^R \frac{\Delta p}{2\eta l} r dr$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Объем вытекающей из капилляра жидкости за время t

$$V = \int_0^R v \cdot t \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi\Delta p t}{4\eta l} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr =$$
$$= \frac{\pi\Delta p t}{2\eta l} \left(\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l}$$



$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8Vl} \quad (14)$$

Приборы для измерения вязкости называются вискозиметрами.

5 учебный вопрос: Упругие напряжения и деформации твердых тел



Деформация твердого тела является результатом изменения под действием внешних сил взаимного расположения частиц, из которых состоит тело, и расстояний между ними.

Упругими называют такие деформации, при которых после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

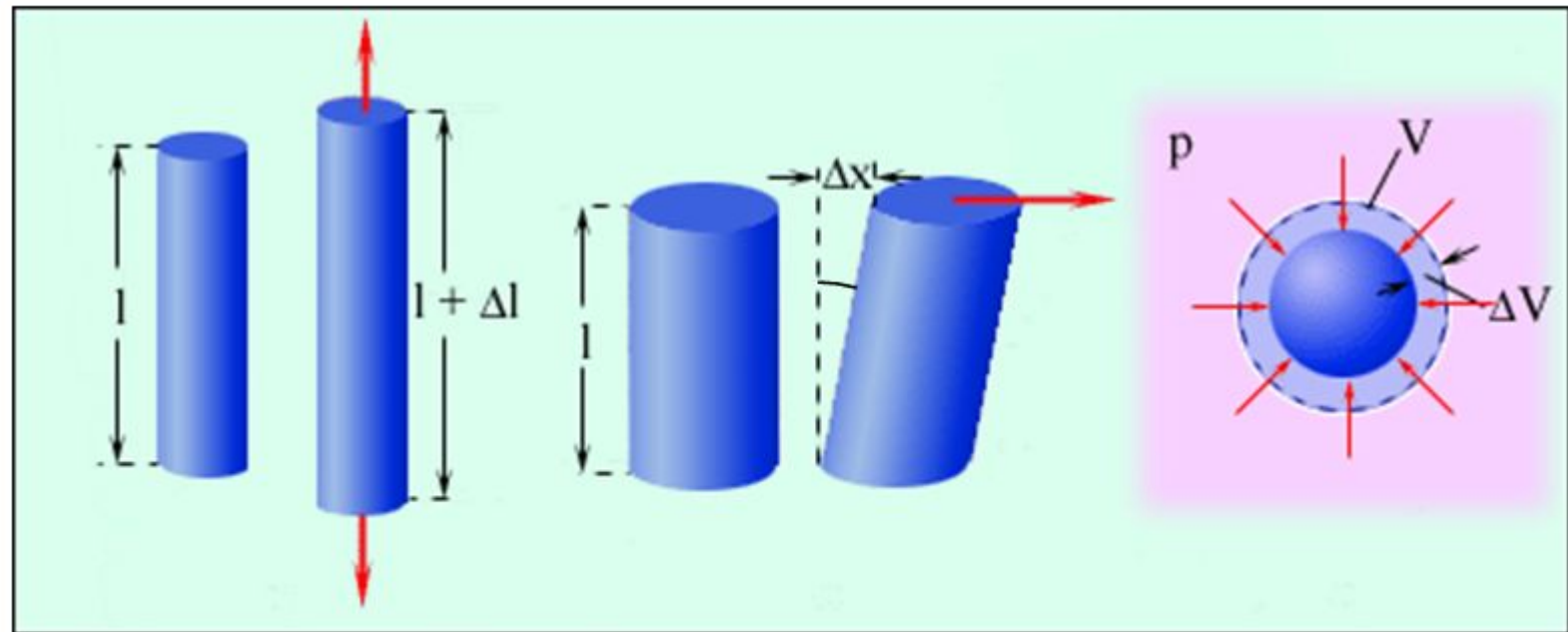


Рис. 9. Некоторые виды деформаций твердых тел:
1 – деформация растяжения; 2 – деформация сдвига;
3 – деформация всестороннего сжатия.

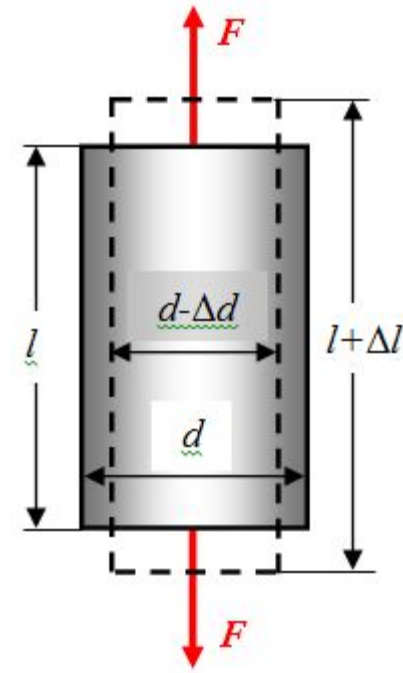
Кинематические характеристики

$\varepsilon = \Delta l / l$ – продольная относительная деформация;

$\varepsilon' = \Delta d / d$ – поперечная относительная деформация;

$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$ где μ – коэффициент Пуассона, характеризует отношение поперечной деформации к продольной

Для стали $\mu = 0,25$, для резины $\mu = 0,49$



Динамические характеристики

$$\sigma = F/S, \text{ Н/м}^2 \rightarrow \text{Па}$$

– нормальное напряжение, характеризует отношение силы, действующей по нормали к поверхности, к площади этой поверхности

Для упругих деформаций выполняется закон Гука:

Напряжение прямо пропорционально относительной деформации

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (15)$$

где E , [Па] – модуль упругости (модуль Юнга).

Для стали $E = 200$ ГПа, для резины $E = 5$ МПа.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad F = \frac{E \cdot S}{l} \Delta l = k \cdot \Delta l \quad (16)$$

$(\sigma = F/S, \quad \varepsilon = \Delta l/l)$

k – коэффициент упругости

Потенциальная энергия упругого деформирования

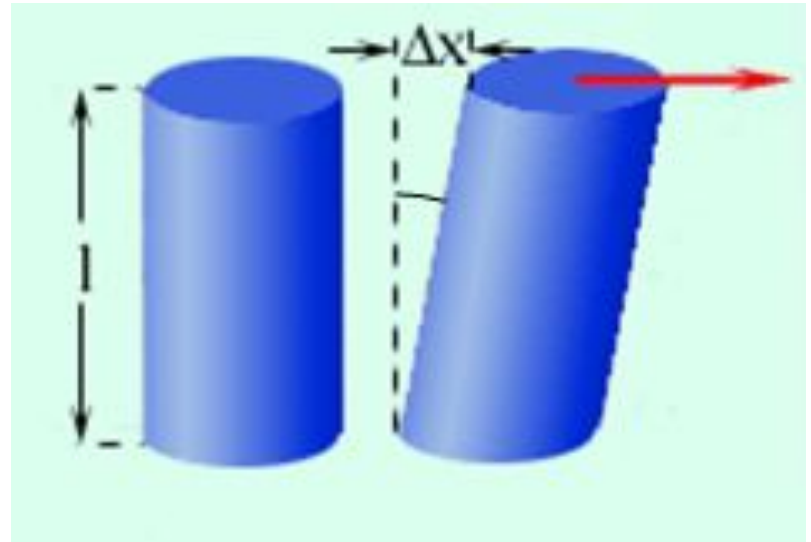
$$\begin{aligned} \Pi = A &= \int_0^{\Delta l} F dx = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{ES}{2l} (\Delta l)^2 = \\ &= \frac{ES \cdot l}{2l^2} (\Delta l)^2 = \frac{E \cdot V}{2} \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Pi_V = \frac{\Pi}{V} = \frac{E \cdot \varepsilon^2}{2} \quad (18)$$

Деформация сдвига

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{l}, \quad \text{при} \quad \Delta x/l \ll 1$$

$$\tau = F/S$$



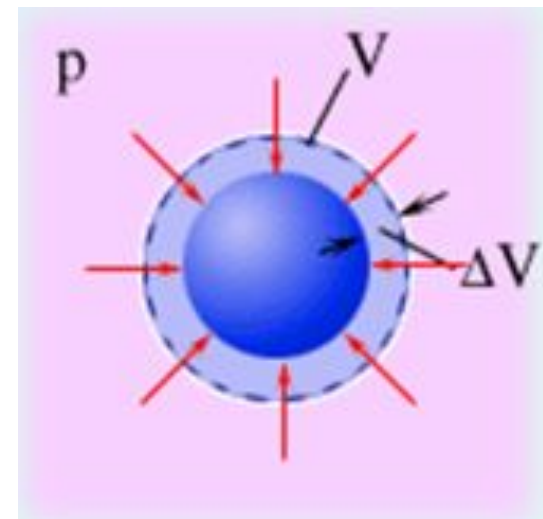
– касательное напряжение, характеризует отношение силы, действующей по касательной к поверхности, к площади этой поверхности.

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{- закона Гука для деформации сдвига (19)}$$

где G , [Па] – модуль сдвига, обычно в 2-3 раза меньше модуля Юнга. У меди $E = 1,1 \cdot 10^{11}$ Па, $G = 0,42 \cdot 10^{11}$ Па.

Деформация всестороннего сжатия

Относительная деформация определяется как отношение изменения объема ΔV к первоначальному объему V тела.



При малых деформациях

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{B} p \quad (20)$$

где B – коэффициент пропорциональности, называемый модулем всестороннего сжатия.

У воды $B = 2,2 \cdot 10^9$ Па, у стали $B = 1,6 \cdot 10^{11}$ Па.