Белорусский национальный технический университет

Кафедра ЮНЕСКО “Энергосбережение и возобновляемые источники энергии”

ТЕПЛОМАССООБМЕН

Лекция 7. Нестационарная теплопроводность неограниченной пластины

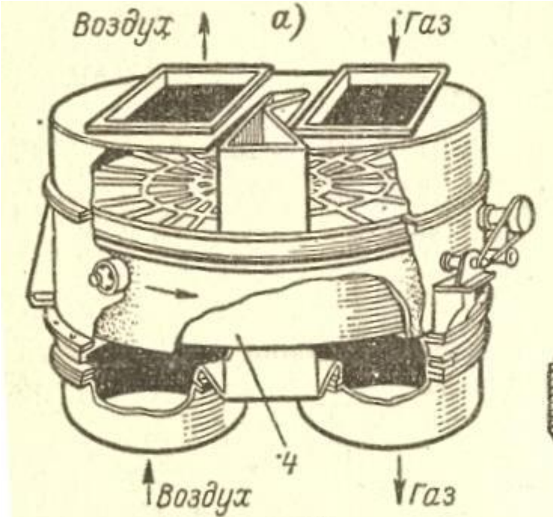
Общие положения нестационарной теплопроводности

Нестационарная теплопроводность – это процесс *молекулярного* переноса теплоты, при котором температура тела (системы) изменяется не только от точки к точке (т.е. *по пространству*), но и с течением времени (т. е. *во времени*).

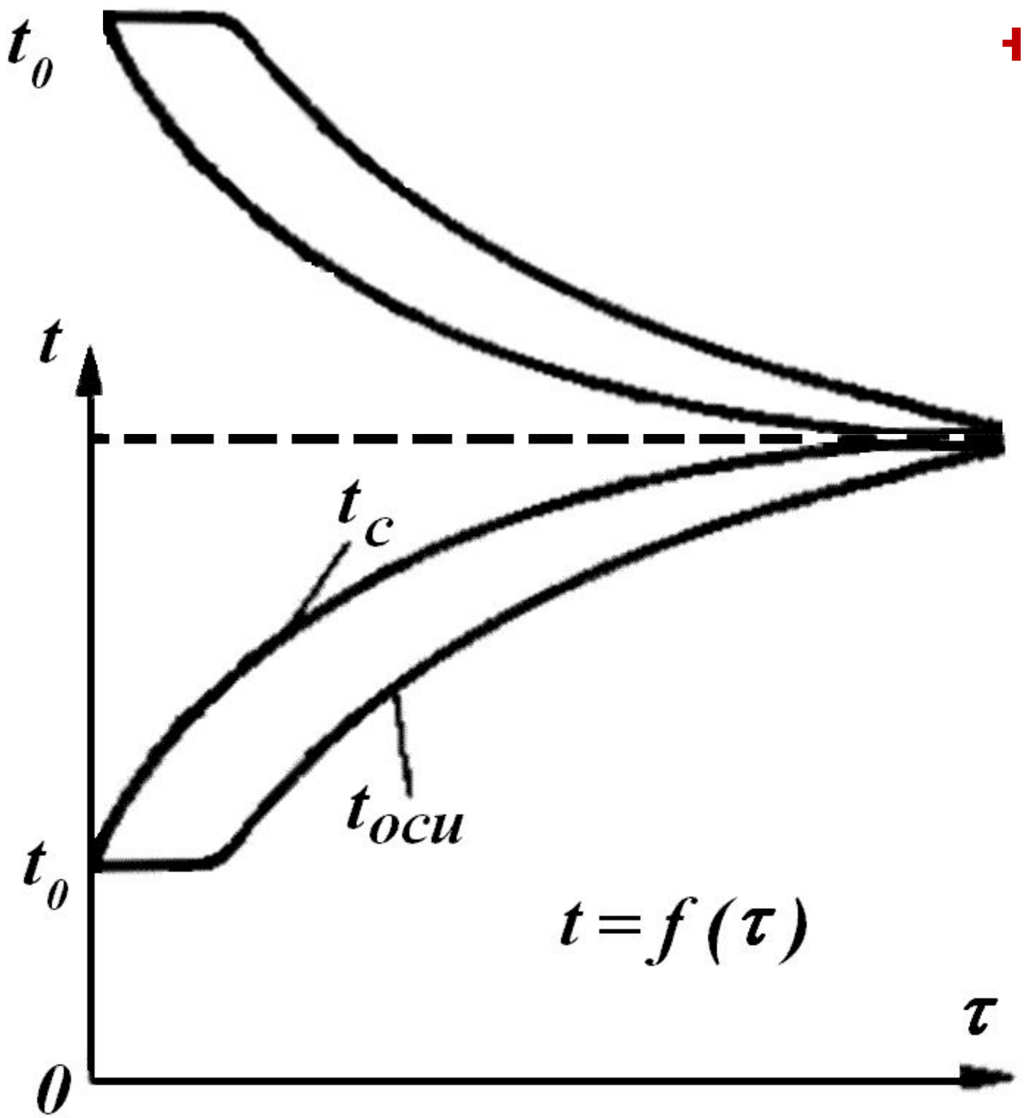
Такие процессы встречаются при охлаждении продуктов в холодильниках, нагревании обрабатываемых заготовок и изделий в технологических процессах, обжиге кирпича, вулканизации резины, пуске/останове энергетических и холодильных агрегатов и т.п.

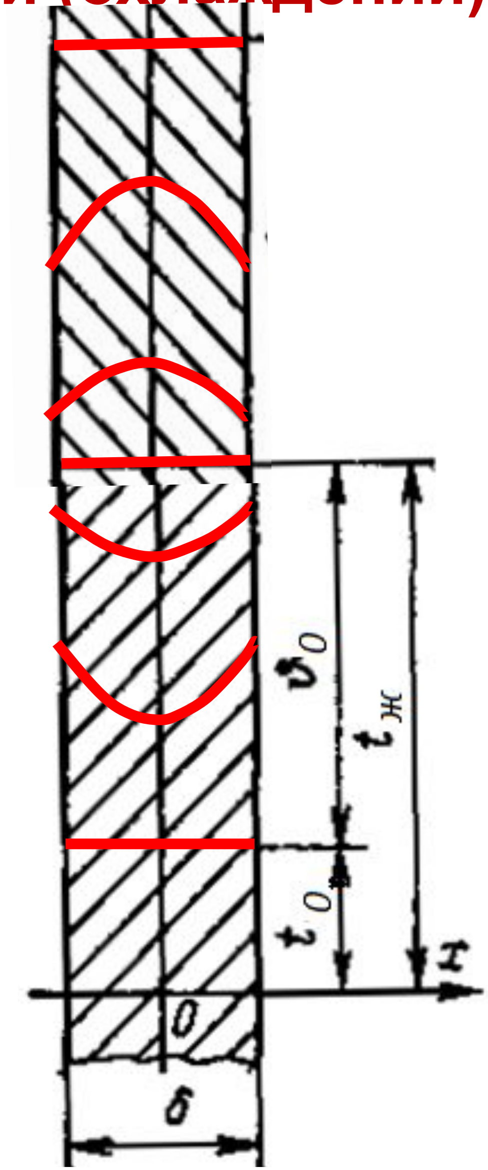
Среди практических задач нестационарной теплопроводности особо следует выделить две группы процессов:

1. Тело стремится к тепловому равновесию (нагревание/охлаждение тел, помещённых в среду с заданными свойствами, в процессе которого разность температур между телом и средой уменьшается);
2. Процессы в периодически действующих регенеративных теплообменниках, насадка которых попеременно нагревается горячим теплоносителем и охлаждается нагреваемой средой.



Изменение температуры при нагревании (охлаждении)
ны



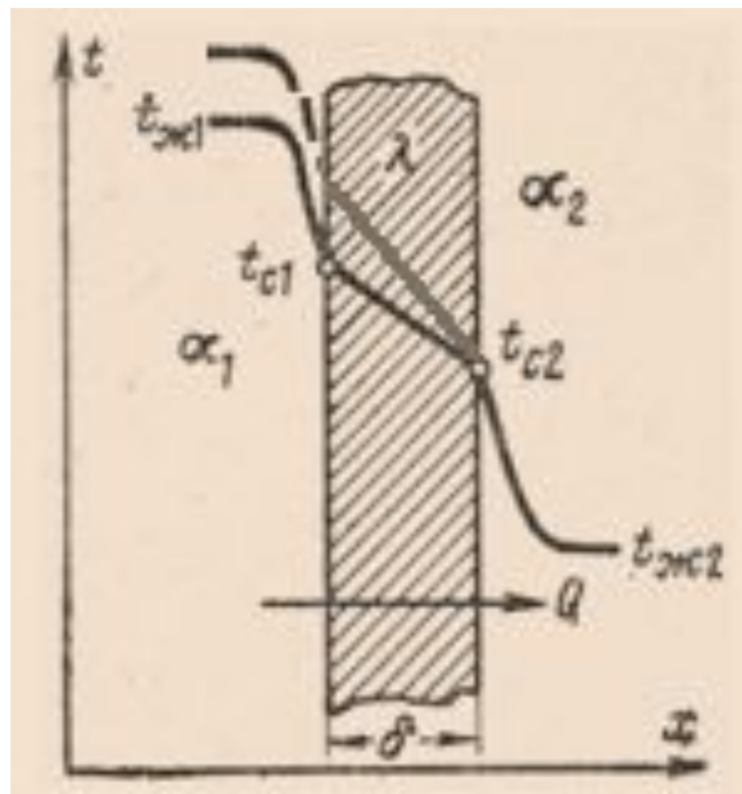


С течением времени температура в каждой точке тела ***ассимптотически*** приближается к $t_ж$, т.е. $\vartheta \to 0$.

Нестационарная теплопередача

В условиях теплопередачи через стенку внезапное изменение (например, повышение) температуры горячего теплоносителя приведёт к тому, что *сначала* не вся теплота будет передаваться к холодному теплоносителю: часть её уйдёт на нагрев самой стенки (повышение её внутренней энергии и температуры), и только по достижении теплового равновесия (при выходе на стационарный режим) вся теплота опять будет передаваться через стенку.

Приведённый пример отражает тот факт, что нестационарные тепловые процессы ***всегда*** связаны с изменением внутренней энергии объекта (т.н. ***аккумуляцией теплоты***).



Охлаждение (нагревание) неограниченной пластины

Постановка задачи. Плоская *неограниченная* пластина (*толщина* **2δ** << *высоты и ширины*), имеющая ***начальную*** температуру $t_0 = f(x)$, мгновенно попадает в охлаждающую жидкость с постоянной температурой $t_ж = \mathrm{const}$. Теплофизические свойства пластины (c_p, λ, ρ) известны и постоянны.

ГУ III рода: На обеих поверхностях пластины задан *постоянный по поверхности и во времени* коэффициент теплоотдачи $\alpha = \mathrm{const}$. При таких условиях температура пластины в процессе охлаждения будет изменяться только по толщине и во времени $t = f(x, \tau)$ ***– 1-мерная нестационарная теплопроводность***.

Найти распределение (поле) температуры в пластине и количество теплоты, отданное ею, в любой момент времени.

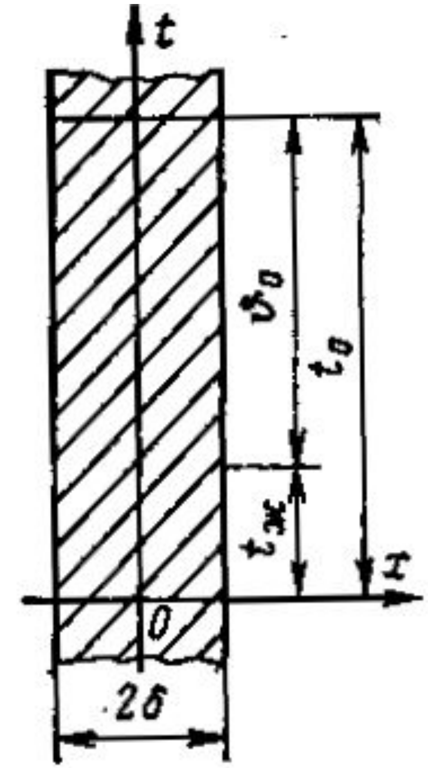


Рис. 3.2. К охлаждению плоской неограниченной пластины (при $\tau = 0$ задано $t_0 = \mathrm{const}$ и $\vartheta_0 = \mathrm{const}$).

Математитическая формулировка задачи

В отсутствие внутренних источников теплоты ($q_v = 0$) сводится к ***уравнению Фурье***

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t, \qquad = \frac{\lambda}{c_p \rho}$$

где оператор Лапласа от температуры для одномерной задачи

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

.

$$\vartheta = t - t_{ж}$$

Вводя вместо t избыточную температуру ,

получаем

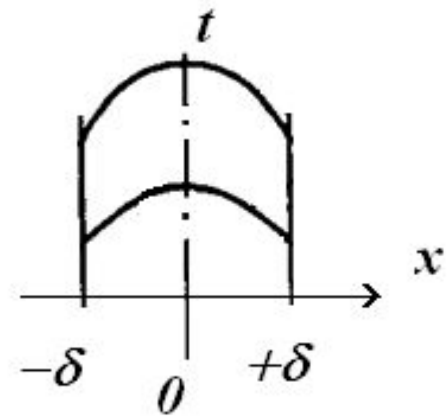
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

Начальные и граничные условия

Начальные условия: $$при \quad \tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = f(x) - t_{ж} = F(x)$$

Граничные условия отражают **симметрию** профиля температуры (максимум / минимум на оси)

$$при \quad x = 0 \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0;$$



и равенство тепловых потоков **теплоотдачей** (з-н Ньютона-Рихмана) и **теплопроводностью** (з-н Фурье) на поверхности:

$$\vartheta = t - t_{ж}$$

$$при \quad x = \pm\delta \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta_{x=\delta}.$$

Дифф. уравнение Фурье вместе с начальными и граничными условиями, а также заданными физическими и геометрическими характеристиками однозначно формулируют поставленную задачу.

Общее решение задачи представляет собой сумму бесконечного ряда

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n\to\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n{}^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right)$$

или

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n\to\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n{}^2\,\mathrm{Fo}\right),$$

где в показатель экспоненты входит ***безразмерное число*** (***критерий***) **Фурье**, представляющее собой безразмерное время

$$\mathrm{Fo} \equiv \frac{a\tau}{\delta^2}$$

Оценка (по порядку величины) *характерного времени* охлаждения/нагревания пластины

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\tau}{\tau_o} \quad \Rightarrow \quad \tau_o \sim \frac{\delta^2}{a}$$

Входящий в полученное общее решение параметр $\mu = k\delta$ является корнем ***характеристического*** уравнения, получаемого в процессе решения

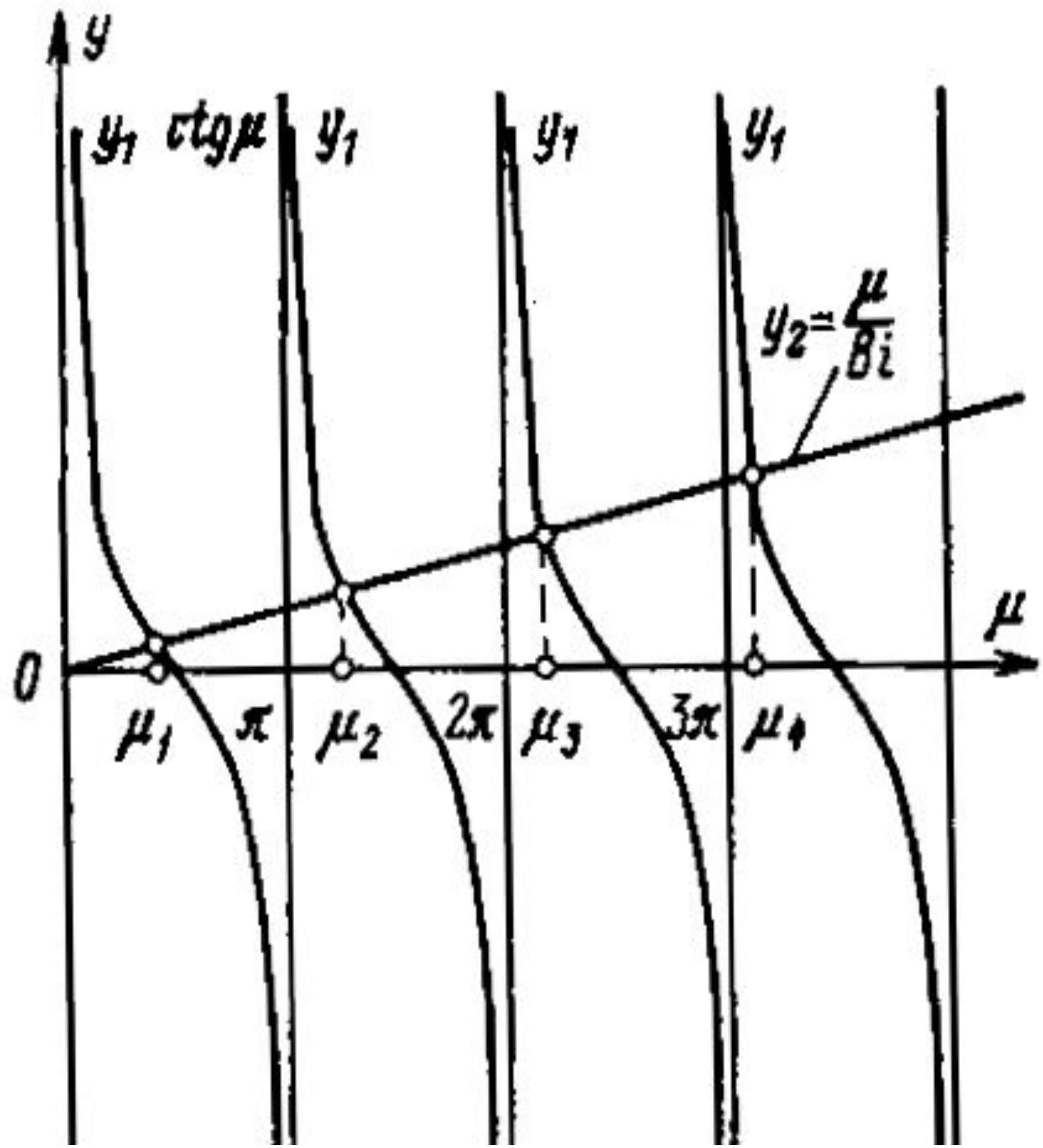
$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}$$

где $\mathrm{Bi} \equiv \frac{\alpha\delta}{\lambda}$ – **безразмерное число (критерий) Био**, *однозначная* характеристика системы, содержащая заданные в условиях задачи геометрические (δ) и физические (λ) свойства пластины и коэффициент теплоотдачи α.

Характеристическое уравнение при каждом конкретном значении **Bi** имеет бесчисленное множество решений, которые удобно получить графическим способом.

Обозначим левую часть $y_1 = \operatorname{ctg}\mu$, а правую $y_2 = \mu / \mathrm{Bi}$ (линейная функция).

Пересечение *котангенсоиды* y_1 с *прямой* y_2 даёт значения корней μ характеристического уравнения при заданном условиями задачи числе Bi.



Из приведённого графика следует, что характеристическое уравнение

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}.$$

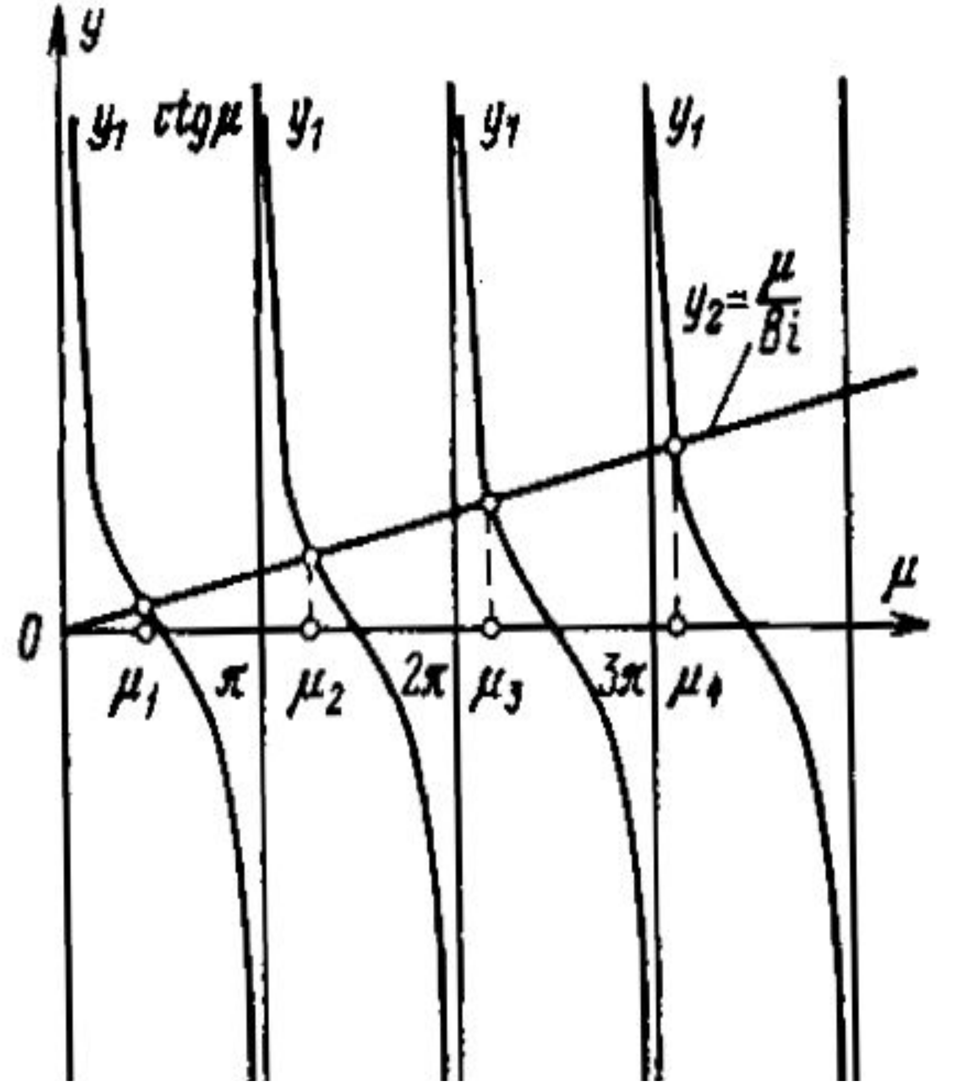
имеет для каждого **Bi** бесчисленное множество значений $\boldsymbol{\mu_n}$, каждое последующее из которых больше предыдущего:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \ldots$$

Значения первых 4-6 корней хар. уравнения обычно затабулированны.

Значения μ_n для пластины

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775
0,6	0,7051	3,2304	6,3770	9,4879
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190



При Bi $\to \infty$ прямая $y_2 = \mu/\mathrm{Bi}$ совпадает с осью абсцисс и корни уравнения будут равны:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2};\quad \mu_2 = \frac{3}{2}\pi;\quad \mu_3 = \frac{5}{2}\pi;\ \ldots;\ \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

При **Bi → 0** прямая y_2 совпадает с осью ординат (**0*y***) и корни характ. уравнения стремятся к точкам разрыва функции котангенса

$$\mu_1 = 0;\ \mu_2 = \pi;\ \mu_3 = 2\pi;\ldots;\ \mu_n = (n-1)\pi;\ldots \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Для 0 < Bi < ∞ величины μ_n имеют промежуточные значения.

Каждому корню μ_n соответствует своё частное распределение температуры

$$\vartheta_n = A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n{}^2 \frac{\tau}{\delta^2}\right),$$

но ни одно из них не соответствует действительному начальному распределению $\vartheta = \vartheta_o$ при $\tau = 0$.

Только путём сложения бесконечного числа частных распределений ϑ_n можно воспроизвести начальное поле температур.

Постоянная A_n, входящая **в общее решение**, определяется из ***начального условия***.

Для простейшего типичного случая, когда начальная температура по толщине пластины постоянна

$$при \quad \tau = 0 \quad t = t_0 , \qquad F(x) = \vartheta_0 = t_0 - t_{ж} = const .$$

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2\sin\mu_n}{(\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n)},$$

что дает **частное решение задачи** – выражение для расчёта распределения температуры в любой точке пластины в любой момент времени

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n\to\infty} \vartheta_0 \frac{2\sin\mu_n}{(\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n)} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n{}^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right),$$

Вводя безразмерные переменные:

– безразмерную температуру $$\Theta \equiv \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}};$$

– безразмерную координату $$X \equiv \frac{x}{\delta};$$

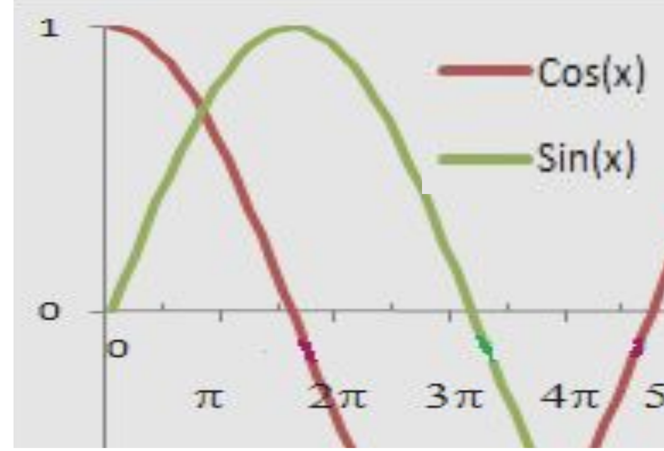
и обозначая $D_n = \dfrac{A_n}{\vartheta_0} = \dfrac{2\sin\mu_n}{\left(\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n\right)}$ – **"*начальная тепловая амплитуда*"** , зависящая только от числа Био, – получаем **решение задачи в безразмерном виде**

$$\Theta = \sum_{n=1}^{n\to\infty} D_n \cos\left(\mu_n X\right) \exp\left(-\mu_n{}^2 \mathrm{Fo}\right)$$

С учётом того, что $\mu = \mathrm{Bi}\cdot \mathrm{ctg}\,\mu = f(\mathrm{Bi})$, безразмерное решение нестационарного уравнения теплопроводности можно записать **в общем виде**

$$\Theta = \Phi\left(X, \mathrm{Bi}, \mathrm{Fo}\right)$$

Анализ полученного решения



$$\Theta \equiv \sum_{n=1}^{n\to\infty} D_n \cos\left(\mu_n X\right)\exp\left(-\mu_n{}^2\mathrm{Fo}\right),$$

$$\mu_n = f_1\left(\mathrm{Bi}\right),$$

$$D_n = \frac{2\sin\mu_n}{\left(\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n\right)} = f\left(\mu_n\right) = f_2\left(\mathrm{Bi}\right).$$

Распределение температуры по толщине пластины описывается функцией косинуса (положительный гребень, симметричный относительно вертикальной оси, при охлаждении), а изменение температуры во времени – экспоненциальной функцией

$$\exp\left(-\mu_n{}^2\mathrm{Fo}\right) = 1/e^{\mu_n{}^2\mathrm{Fo}}$$

Т.к. ***$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$***, чем больше ***n***, тем меньше вклад следующего члена ряда. Чем больше **число Фурье**, тем быстрее сходится ряд. При **Fo ≥ 0.3** можно ограничиться 1–ым членом ряда

$$\Theta \approx D_1\cos\left(\mu_1 X\right)\exp\left(-\mu_1{}^2\mathrm{Fo}\right) = \quad\left(\quad,\mathrm{Bi}\right)\exp\left(-\mu_1{}^2\mathrm{Fo}\right)$$

Логарифмирование полученного выражения при фиксированной координате X (например, X = 0 – на оси пластины, X = 1 – на поверхности пластины)

$$\Theta_X \approx \varPhi\left(\mathbf{Bi}\right)\mathbf{exp}\left(-\mu_1^{\,2}\,\mathbf{Fo}\right)$$

показывает, что натуральный ***логарифм*** безразмерной температуры является ***линейной функцией*** безразмерного времени (числа Фурье):

$$\ln\Theta_X = \ln\varPhi\left(\mathbf{Bi}\right) - \mu_1^{\,2}\,\mathbf{Fo}$$

или $$\ln\Theta_X = a - \mu_1^{\,2}\,\mathbf{Fo}$$

что позволяет представить решение задачи в удобном графическом виде *в полулогарифмических координатах*.

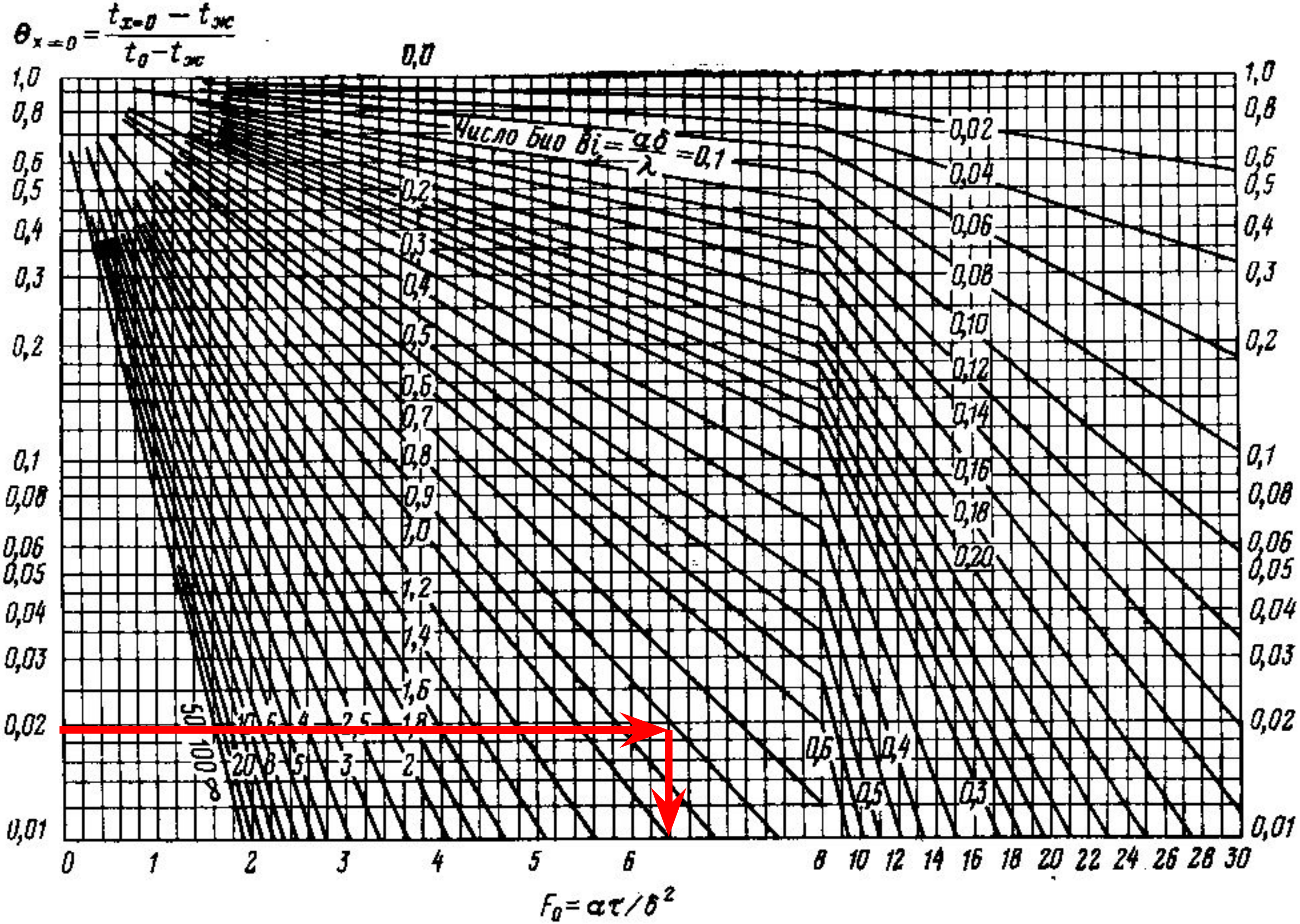


Рис. 3.4. Зависимость $\Theta = f_1$ (Fo, Bi) для середины пластины.

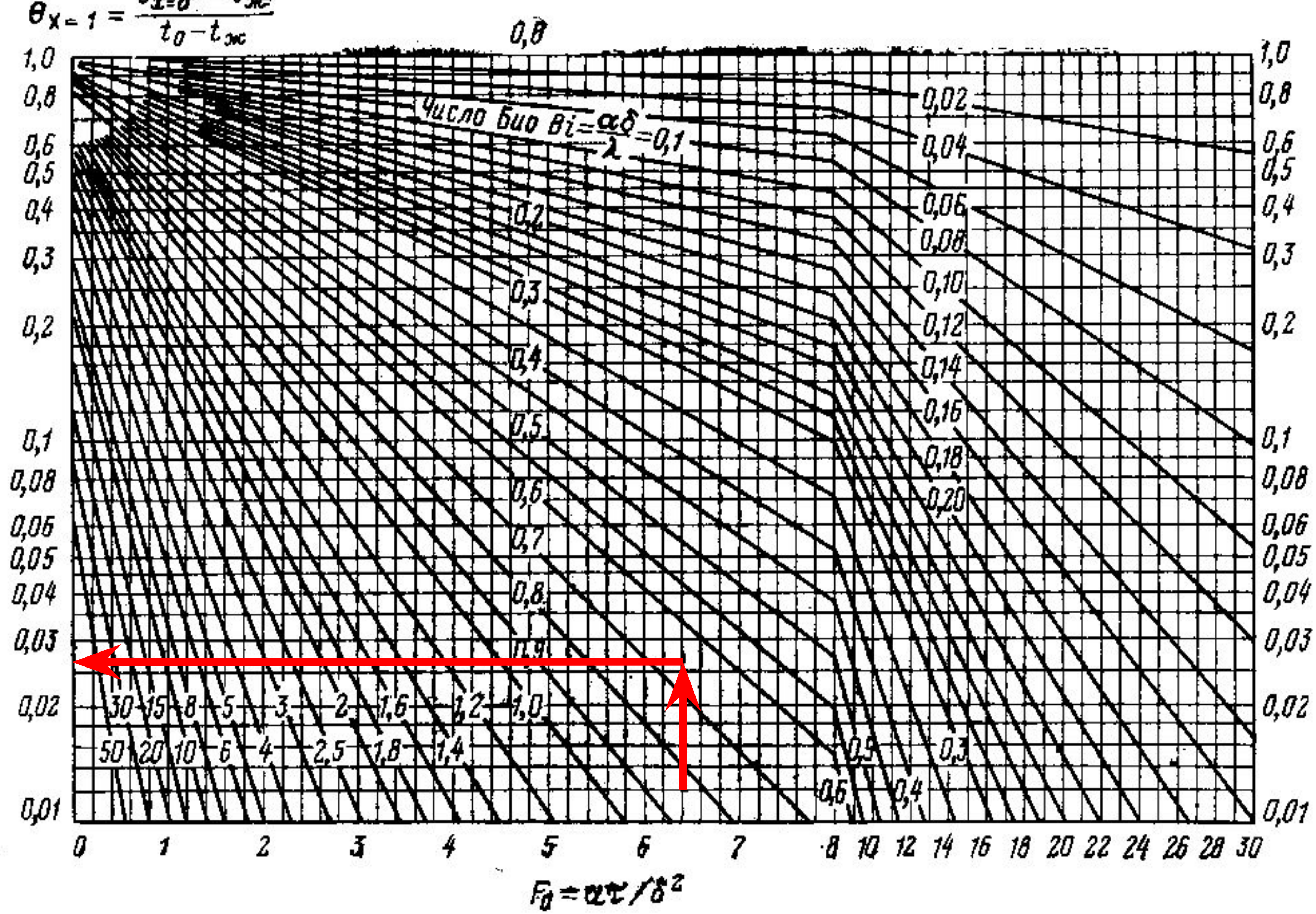


Рис. 3.5. Зависимость $\Theta = f_2$ (Fo, Bi) для поверхности пластины.

Как пользоваться диаграммами

Если стоит задача определения времени охлаждения (прогрева) центра (**X = 0**) или поверхности пластины (**X = 1**) до заданной температуры ***t*** рассчитываем соответствующее значение **Θ**, число **Био**, идём вправо от **Θ** по горизонтали до пересечения с кривой **Bi** и спускаемся по вертикали до *оси абсцисс*, т.е. до искомого числа **Фурье**. Подставляя в **Fo** значения к-та температуропроводности a и квадрата толщины δ^2, находим время процесса

$$\tau = \mathrm{Fo}\frac{\delta^2}{a}.$$

Если нужно узнать, насколько охладится центр или поверхность пластины за заданное время ***τ***, рассчитываем соответствующее число **Фурье**, идём от него вертикально вверх до пересечения с нужным числом **Био**, а затем горизонтально влево до пересечения с осью ординат, т.е. до искомого значения **Θ**.

При *нагревании* пластины решение не изменяется, только в безразмерной температуре меняются знаки (от большего значения отнимаем меньшее)

$$\Theta \equiv \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t_{ж} - t}{t_{ж} - t_0},$$

т.е. в обоих случаях $0 \le$ **Θ** ≤ 1 и уменьшается (по экспоненте) с ростом числа Фурье (безразмерного времени), асимптотически стремясь к нулю

$$\Theta \to 0 \quad при \quad \mathrm{Fo} \to \infty.$$

Согласно полученному решению поле температуры при нагревании (охлаждении) пластины в любой момент времени имеет вид симметричной кривой (положительного гребня косинусоиды при *охлаждении* и перевёрнутого – при *нагревании*) с максимумом (минимумом) на оси пластины (X = 0).

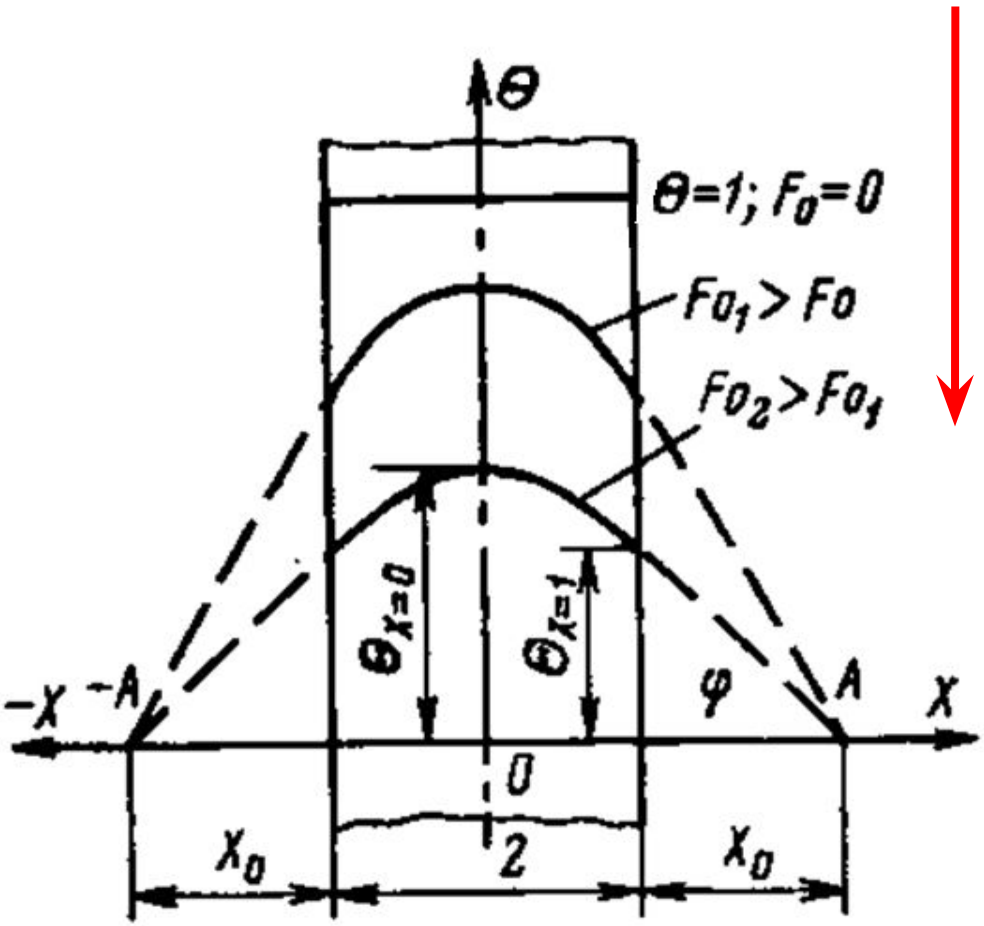


Рис. 3.6. Изменение температурного поля в плоской неограниченной стенке при ее охлаждении.

Для каждого момента времени **Fo > 0** будет своя кривая, всё более близкая к оси абсцисс (**Θ = 0**).

Касательные ко всем кривым в точках **X = ± 1** (на поверхностях) сходятся в ***полюсах A*** и ***–A***, расположенных на расстоянии $X_0 = 1/Bi$, что следует *из граничного условия III рода* на поверхности пластины.

Влияние *критерия Био* на распределение температуры в пластине

$$1)\ \mathrm{Bi} \to \infty \quad (\textit{практически} \quad \mathrm{Bi} > 100).\ \mathbf{Bi} = \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha}$$

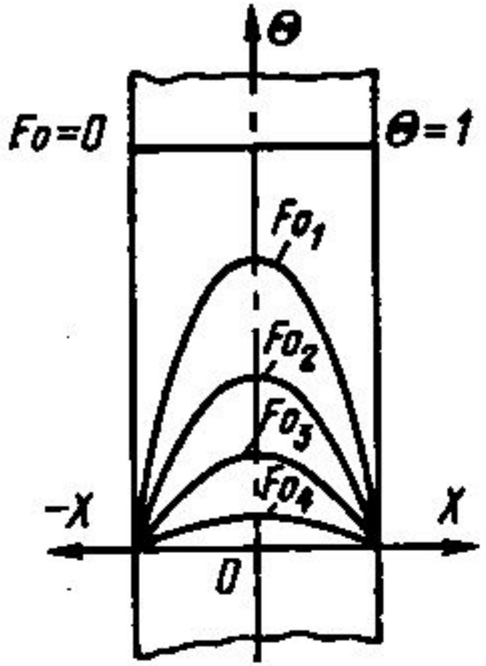
при $\mathrm{Bi} \to \infty$, $\alpha \to 0, \infty$ $\lambda \to$ $\delta \to \infty$

При **больших** числах Био **внутреннее** термическое сопротивление теплопроводности намного больше **внешнего** сопротивления теплоотдачи.

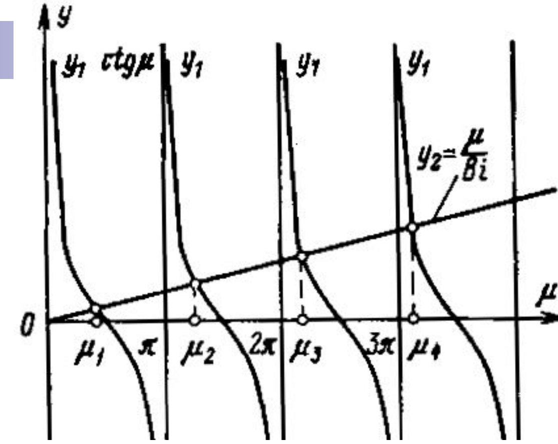
Вследствие этого интенсивность (скорость) отвода теплоты от поверхности тела к жидкости намного больше, чем скорость её распространения внутри тела. Принято говорить, что при этом внутренний перенос теплоты – **лимитирующая стадия** процесса охлаждения (нагревания). Поверхность пластины практически равна температуре окружающей среды (жидкости), что следует из условия

$$\mathrm{X}_0 = \frac{1}{\mathrm{Bi} \to \infty} \to 0.$$

$$\mathbf{Bi} > 100; \quad \frac{1}{\alpha} << \frac{\delta}{\lambda}$$



1) Распределение температуры в плоской стенке при ее охлаждении в условиях $Bi \to \infty$; $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$.



$$\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$D_n = \frac{2\sin\mu_n}{(\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n)} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

При Fo ≥ 0.3

$$\Theta_{X=0} = \frac{4}{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{Fo}\right],$$

откуда время нагревания пластины

$$\tau = (2\delta/\pi)^2 \frac{1}{a}\ln\left(\frac{4}{\pi\Theta_{X=0}}\right).$$

2) $Bi \to 0$ (*практически* $Bi < 0{,}1$)

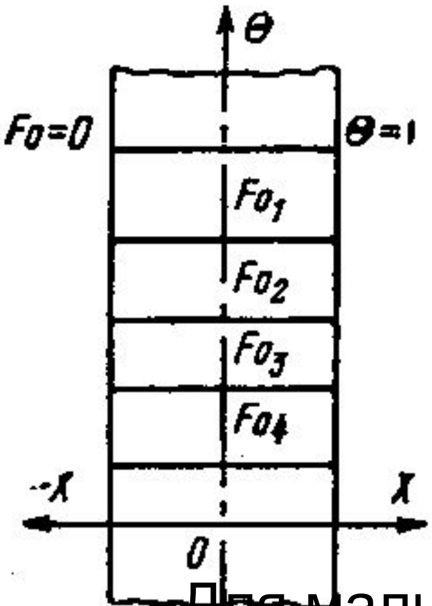
$$\frac{\delta}{\lambda} << \frac{1}{\alpha}$$

При **очень малых** числах Био **внутреннее** термическое сопротивление теплопроводности намного меньше **внешнего** сопротивления теплоотдачи.

Вследствие этого интенсивность (скорость) отвода теплоты от поверхности тела намного меньше, чем скорость её распространения внутри тела. Принято говорить, что при этом **внешний теплообмен (теплоотдача) – лимитирующая стадия** процесса охлаждения (нагревания).

Температура внутри тела в любой момент времени распределена практически равномерно, а расстояние между поверхностью и полюсами, в которых пересекаются касательные к профилям температуры, стремится к бесконечности (профили температуры параллельны оси 0x и друг другу)

$$X_0 = \frac{1}{Bi \to 0} \to \infty.$$



$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{\delta/\lambda}{1/\alpha} << 1$$

При Био → 0 $\quad \mu_n = (n-1)\pi$

$$D_1 = \frac{2\sin\mu_1}{\left(\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1\right)_{\mu_1\to 0}} = 1, \text{ при } n > 1 \quad D_n \to 0$$

Для малых **$\mu_1 \to 0$:** **tg $\mu_1 \approx \mu_1$** и **sin $\mu_1 \approx \mu_1$**, тогда характеристическое уравнение принимает вид

$$\mathrm{ctg}\,\mu_1 = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\mu_1} \approx \frac{1}{\mu_1} = \frac{\mu_1}{\mathrm{Bi}} \Rightarrow \boxed{\mu_1^{\,2} = \mathrm{Bi} \Rightarrow \mu_1 = \sqrt{\mathrm{Bi}}}$$

$$\Theta_{X=0} = \exp\left(-\mathrm{BiFo}\right)$$

$$\Theta_{X=1} = \cos\left(\sqrt{\mathrm{Bi}}\right)\exp\left(-\mathrm{BiFo}\right) \approx \Theta_{X=0}$$

$$3)\ 0.1 < \mathrm{Bi} < 100. \qquad \frac{\delta}{\lambda} \sim \frac{1}{\alpha}$$

При числах Био порядка 1…10 внутреннее термическое сопротивление соизмеримо с внешним, и оба должны учитываться при решении задачи с помощью полученного ранее полного решения для температурного поля

$$\Theta \equiv \sum_{n=1}^{n\to\infty} D_n \cos(\mu_n X)\exp\left(-\mu_n^{\,2}\,\mathrm{Fo}\right),$$

$$D_n = \frac{2\sin\mu_n}{(\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n)}.$$

Для **Fo ≥ 0.3**

$$\Theta \approx D_1 \cos(\mu_1 X)\exp\left(-\mu_1^{\,2}\,\mathrm{Fo}\right) = \varPhi(X, \mathrm{Bi})\exp\left(-\mu_1^{\,2}\,\mathrm{Fo}\right).$$

Количество теплоты, отданное пластиной в процессе охлаждения

Полное количество теплоты ***$Q_п$, Дж***, которое отдаёт (воспринимает) пластина *с внешней поверхности* за время ***τ*** от ***0*** до **∞**, равно изменению внутренней энергии (энтальпии) пластины за период полного её охлаждения (нагревания)

$$Q_{п} = 2\delta F \cdot \rho \cdot c \cdot \left(t_0 - t_{ж}\right).$$

(Теплота = объём × плотность × уд.теплоёмкость × разность т-р)

Тогда за любой промежуток времени от ***τ = 0*** до ***τ*** (или от **Fo = *0*** до **Fo**) внутренняя энергия (энтальпия) пластины изменится на

$$Q = Q_{п} - Q_1 = 2\delta F \rho c \left(t_0 - t_{ж}\right)\left(1 - \frac{\bar{t} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}\right) = Q_{п}\left(1 - \bar{\Theta}\right)$$

или $$Q / Q_{п} = \left(1 - \bar{\Theta}\right),$$

где ***Q_1*** – "остаточная" *избыточная* энергия пластины в момент ***τ*** , а

$\bar{t}$, $\bar{\Theta} = \left(\bar{t} - t_{ж}\right) / \left(t_0 - t_{ж}\right)$ – средняя по толщине температура пластины в этот же момент.

По теореме о среднем средняя температура определяется как интеграл по (полу-) толщине пластины, делённый на интервал интегрирования

$$\overline{\Theta} = \frac{\bar{t} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \Theta dX.$$

Подставляя под знак интеграла решение для температурного поля и интегрируя, получим

$$\overline{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin^2\mu_n}{\left(\mu_n^{\ 2} + \mu_n \sin\mu_n \cos\mu_n\right)} \exp\left(-\mu_n^{\ 2}\,\mathrm{Fo}\right),$$

что позволяет рассчитать количество теплоты, отданное (полученное) на момент времени *τ*. При **Fo ≥ 0.3** можно ограничиться 1-ым членом ряда; значения коэффициента при экспоненте затабулированы как функция Bi.

При Bi →0 (Bi < 0.1) $$\overline{\Theta} = \exp\left(-\mathrm{Bi}\,\mathrm{Fo}\right).$$

При Bi →∞ (Bi > 100) $$\overline{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} \exp\left[-\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi^2\,\mathrm{Fo}\right].$$

Диаграмма для расчета количества теплоты, отданного пластиной в процессе охлаждения

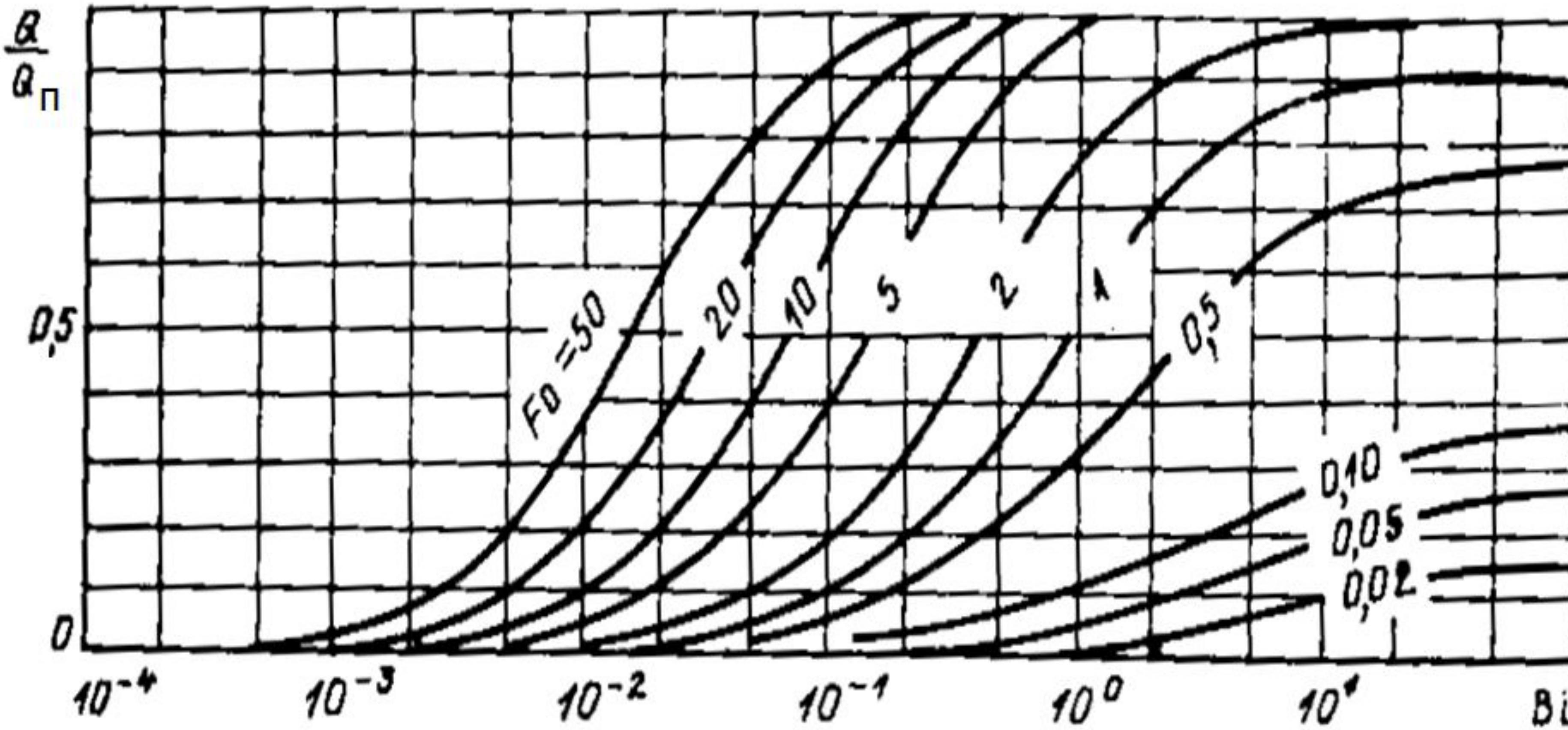


Рис. 3.3. Относительная теплоотдача неограниченной пластины при T_0=const

$$Q_п = 2\delta F \cdot \rho \cdot c \cdot \left(t_0 - t_{ж}\right).$$

(объём × плотность × уд.теплоёмкость × разность т-р)