Плоские электромагнитные волны

Лекция 9

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- В области, достаточно удаленной от вибратора
  $R >> \lambda$ поле имеет волновой характер.
- Волны называются сферическими, так как поверхности равной фазы – сферы.
- При $R \to \infty$ небольшую часть сферической поверхности можно считать плоской и волну в этой области рассматривать как плоскую.
- Плоская волна называется однородной, если векторы поля E и H зависят от одной пространственной координаты и времени

Монохроматическая волна. Поляризация.

- Монохроматической или гармонической волной называется волна, у которой вектора E и H изменяются синусоидально

$$H = H_\psi = \frac{I_m l \omega}{4\pi \upsilon R} \cdot \sin\theta \, \sin\left(\omega t - \frac{\omega R}{\upsilon} + \frac{\pi}{2} + \xi\right)$$

$$E = E_\theta = \frac{I_m l \omega}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \upsilon^2 R} \cdot \sin\theta \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\omega R}{\upsilon} + \frac{\pi}{2} + \xi\right)$$

- Если плоская волна линейно поляризована, то направление векторов E во всем пространстве параллельно друг другу (аналогично – вектор H).

Уравнения однородной линейно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны

Тогда, направление вектора Е во всех точках поля одинаково, а углы, которые вектор Е образует с осями координат – постоянны:

$$\cos(E, x) = \frac{E_x}{E} = \mathrm{const}\ ,$$

$$\cos(E, y) = \frac{E_y}{E} = \mathrm{const}\ ,$$

$$\cos(E, z) = \frac{E_z}{E} = \mathrm{const}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} =$$

$$= E_x \sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

Уравнение плоской волны

- Рассмотрим распространение плоской волны в однородной среде: $\varepsilon, \mu, \gamma - \mathrm{const}$
- Расположим координатные оси так, чтобы вектор E имел только одну проекцию – E_x.
- E_x синусоидально зависит только от одной координаты Z и от времени t.
- Свободные заряды в рассматриваемом пространстве отсутствуют

2-е уравнение Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu\mu_0\dot{\mathbf{H}}_m \quad \begin{cases} 0 = -j\omega\mu\mu_0\dot{\mathbf{H}}_{xm} \\ \dfrac{\partial \dot{\mathbf{E}}_{xm}}{\partial z} = -j\omega\mu\mu_0\dot{\mathbf{H}}_{ym} \\ 0 = -j\omega\mu\mu_0\dot{\mathbf{H}}_{zm} \end{cases}$$

В рассматриваемом случае у вектора Н только одна проекция отлична от 0 – H_y . Комплексная амплитуда:

$$\dot{\mathbf{H}}_{ym} = \dot{\mathbf{H}}_m = -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0}\frac{\partial \dot{\mathbf{E}}_{xm}}{\partial z} \Rightarrow -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0}\frac{d\dot{\mathbf{E}}_{xm}}{dz}$$

1-е уравнение Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\dot{H}_m = (\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)\dot{E}_m$$

$$-\frac{d\dot{H}_{y\,m}}{dz} = (\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)\dot{E}_{x\,m}$$

Подставив $H_{y\,m}$ в 2-ое уравнение и отбросив индексы у проекций векторов, получим:

$$\dot{H}_{y\,m} = \dot{H}_m = -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0}\frac{\partial\dot{E}_{x\,m}}{\partial z} \Rightarrow -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0}\frac{d\dot{E}_{x\,m}}{dz}$$

$$\frac{d^2\dot{E}_m}{dz^2} = j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)\dot{E}_m$$

В
О
Л
Н
О
В
О
Е
У
Р
А
В

Решение волнового уравнения

$$\frac{d^2\dot{E}_m}{dz^2} - j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)\dot{E}_m = 0$$

- Назовем коэффициентом распространения

$$\Gamma = (\alpha + j\beta) = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)}$$

$$\frac{d^2\dot{E}_m}{dz^2} = -\Gamma^2\dot{E}_m = 0$$

- Решение этого уравнения имеет вид:

$$\boxed{\dot{E}_m = \dot{M}_1 e^{-\Gamma z} + \dot{M}_2 e^{\Gamma z}}$$

Коэффициент распространения

$$\Gamma = (\alpha + j\beta) = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)}$$

$$\alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2 = j\omega\mu\mu_0\gamma - \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 =$$

$$= \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\left(-1 + j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right) = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0(-1 + j\,\mathrm{tg}(\delta))$$

Тангенс угла диэлектрических потерь $\mathrm{tg}\,\delta = \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$

Он определяет соотношение активной и реактивной мощностей в диэлектрике. Чем меньше $\mathrm{tg}\,\delta$, тем лучше диэлектрик.

Коэффициент распространения

Решая систему уравнений, получим

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 = -\dfrac{\omega^2}{\upsilon^2} \\ 2\alpha\beta = \dfrac{\omega^2}{\upsilon^2} \cdot \dfrac{\gamma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\upsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 + 1} - 1 \right)},$$

$$\beta = \frac{\omega}{\upsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 + 1} + 1 \right)}$$

Уравнения прямой и отраженной волны для Е.

Мгновенное значение Е равно сумме ординат прямой и обратной волн. $E_{пад}$ – падающая волна распространяется в сторону возрастающих Z, а отраженная волна в сторону убывания Z

$$\mathbf{E = M_1 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \psi_1) + M_2 e^{az} \sin(\omega t + \beta z + \psi_2)}$$

$$\mathbf{E = E_{пад} + E_{отр}}$$

Уравнения прямой и отраженной волны для H.

- Мгновенное значение напряженности магнитного поля равно разности ординат падающей и отраженной волн.

$$H = \frac{M_1}{z_B} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \psi_1 - \xi_B) - \frac{M_2}{z_B} e^{\alpha z} \sin(\omega t + \beta z + \psi_2 - \xi_B)$$

$$H = H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}}$$

Уравнения плоских электромагнитных волн

$$\begin{cases} E = M_1 e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z + \psi_1) + M_2 e^{\alpha z}\sin(\omega t + \beta z + \psi_2) \\ E = E_{пад} + E_{отр} \\ H = \dfrac{M_1}{z_В} e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z + \psi_1 - \xi_В) - \dfrac{M_2}{z_В} e^{\alpha z}\sin(\omega t + \beta z + \psi_2 - \xi_В) \\ H = H_{пад} - H_{отр} \end{cases}$$

Мгновенное значение вектора Пойнтинга:

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}\,\vec{H}\right]$$

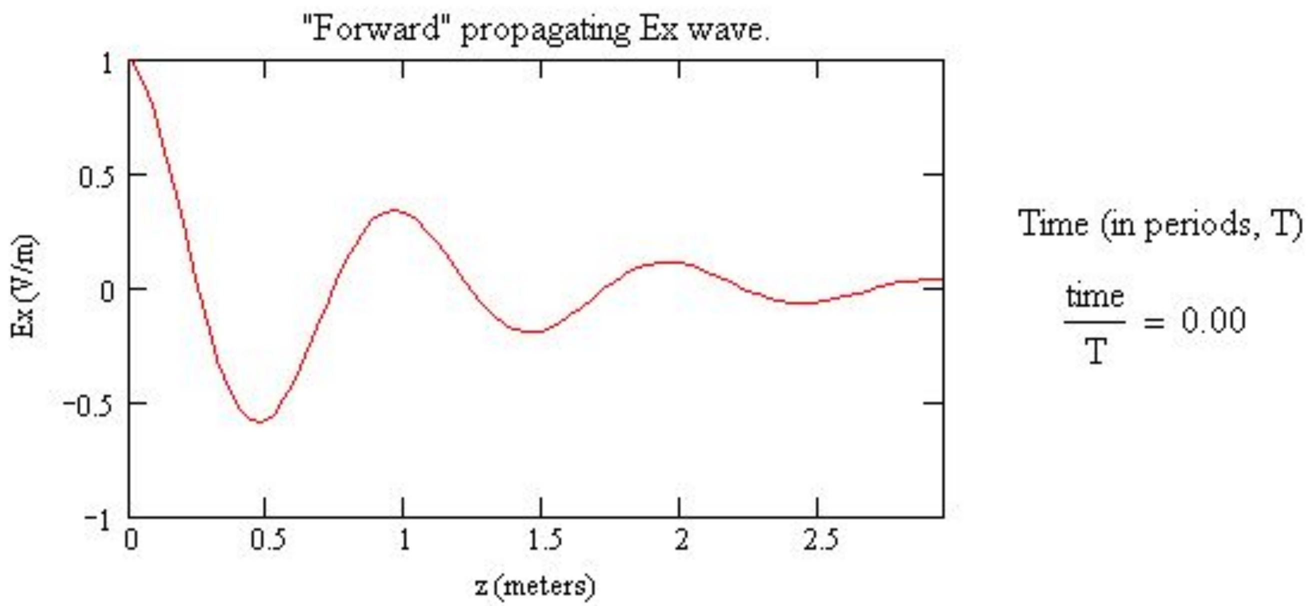
Амплитуды падающей и отраженной волн:

$$E_{пад} = M_1 e^{-\alpha z} \qquad E_{отр} = M_2 e^{\alpha z}$$

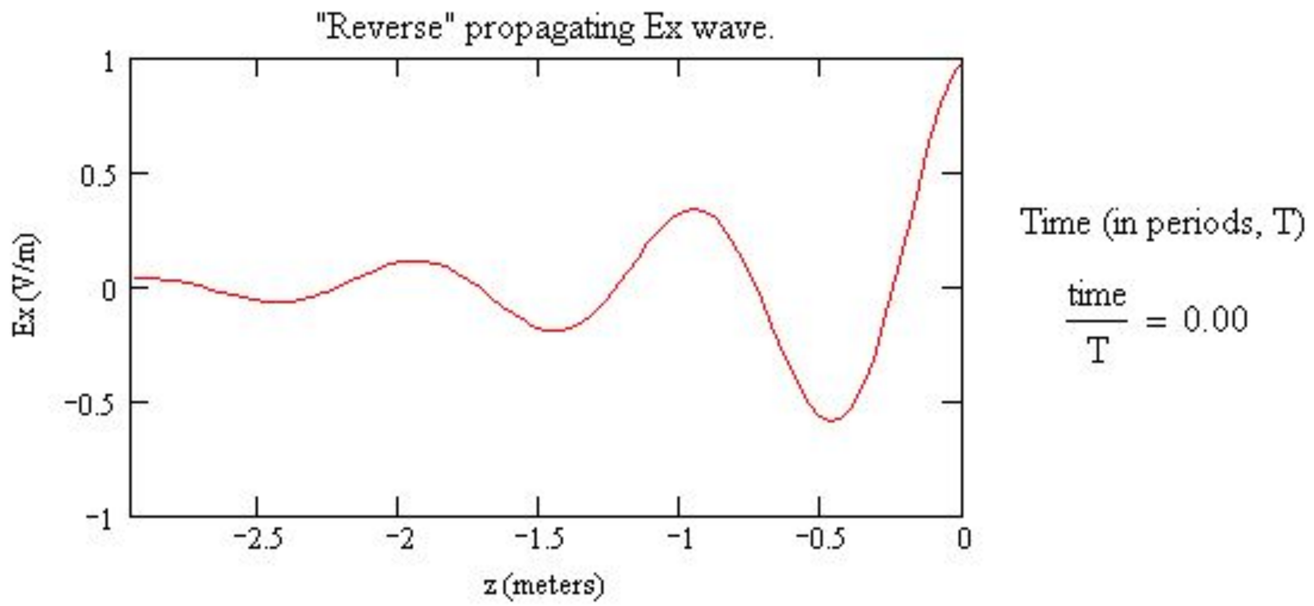
$$H_{пад} = \frac{M_1}{z_B} e^{-\alpha z} \qquad H_{отр} = \frac{M_2}{z_B} e^{\alpha z}$$

- Амплитуды волн затухают в направлении распространения.
- Падающая волна – в направлении оси Z
- Отраженная волна - в направлении -Z

Прямая волна



Обратная волна



Коэффициент затухания

- Быстрота затухания зависит от действительной составляющей коэффициента распространения Г.

$$\Gamma = (\alpha + j\beta) = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)}$$

Коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{\omega}{\upsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)^2 + 1} - 1\right)}$$

Он показывает уменьшение амплитуды волна при ее распространении

Затухание плоской волны

- При прохождении некоторого расстояния *l* амплитуда волны убывает:

$$\left|\frac{E_{пад}(z)}{E_{пад}(z+l)}\right| = e^{\alpha l}$$

- Ослабление, испытываемое плоской волной принято выражать в неперах или децибелах:

$$\ln\left|\frac{E_{пад}(z)}{E_{пад}(z+l)}\right| = \alpha l\ ,\ [Нп]\ ,$$

$$20\ln\left|\frac{E_{пад}(z)}{E_{пад}(z+l)}\right| = 8.69\,\alpha l\ ,\ [Дб]$$

Глубина проникновения поля

- Для среды с высокой проводимостью вводят понятие – <u>глубина проникновения поля.</u>
- Это расстояние, при прохождении которого электромагнитное поле ослабевает в e раз

$$\left|\frac{E_{пад}(z)}{E_{пад}(z+l_0)}\right| = e^{\alpha l_0} = e \Rightarrow \alpha l_0 = 1 \Rightarrow \boxed{l_0 = \frac{1}{\alpha}}$$

Волновое сопротивление

$$Z_в = \frac{E_{пад}}{H_{пад}} = \frac{E_{отр}}{H_{отр}} = \frac{j\omega\mu\mu_0}{Г} = z_в e^{j\xi_в}$$

- Волновое сопротивление имеет индуктивный характер. $H_{пад}$ и $H_{отр}$ отстают соответственно от $E_{пад}$ и $E_{отр}$ на угол $\xi_в$

Фазовая скорость

- Фазовой скоростью называется скорость перемещения плоскости равных фаз волны:

$$\upsilon_ф = \frac{dz}{dt}$$

Момент времени	Фаза
$t_1 \ , z_1$	$\omega t_1 - \beta z_1 + \psi_1$
$t_2 = t_1 + \Delta t$ $z_2 = z_1 + \Delta z$	$\omega(t_1 + \Delta t) - \beta(z_1 + \Delta z) + \psi_1$

$$\omega dt - \beta dz = 0$$

Фазовая скорость падающей волны $\upsilon_ф = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\omega}{\beta}$

Фазовая скорость

- Фазовой скоростью называется скорость перемещения плоскости равных фаз волны:

$$\upsilon_ф = \frac{dz}{dt}$$

Момент времени	Фаза
$t_1\ ,\ z_1$	$\omega t_1 - \beta z_1 + \psi_1$
$t_2 = t_1 + \Delta t$ $z_2 = z_1 + \Delta z$	$\omega(t_1 + \Delta t) - \beta(z_1 + \Delta z) + \psi_1$

$$\omega dt - \beta dz = 0$$

Фазовая скорость обратной волны $\upsilon_ф = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\beta}$

Фазовая скорость

$$\upsilon_{ф} = \frac{dz}{dt} = \pm\frac{\omega}{\beta}$$

- Фазовая скорость зависит от частоты.
- Такие среды называют <u>диспергирующими</u>

Длина волны

- Это расстояние, на котором фаза волны изменяется на 2π [рад] :

  Пусть $\lambda = z_1 - z_2$, **тогда**

  $$(\omega t_1 - \beta z_1 + \psi_1) - (\omega t_2 - \beta z_2 + \psi_2) = 2\pi$$

  или $\beta(z_1 - z_2) = 2\pi \Rightarrow \beta\lambda = 2\pi$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\upsilon_ф}{f}$$

ВЫВОД -1

1. В каждой точке поля мгновенное значение напряженности электрического поля равно <u>сумме</u> ординат падающей и отраженной волн.
2. В каждой точке поля мгновенное значение напряженности магнитного поля равно <u>разности</u> ординат падающей и отраженной волн.

ВЫВОД - 2

1. Направление вектора Е одинаково во всех точках поля и перпендикулярно к направлению вектора Н.
2. Оба вектора перпендикулярны к направлению распространения волны.
3. Плоские волны относятся к классу поперечных электромагнитных волн ТЕМ (Transverse Electro-Magnetic)

Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике

- Идеальным называют диэлектрик, у которого проводимость $\gamma = 0$
- Рассмотрим диэлектрик , у которого

$$\varepsilon = \text{const} \ , \quad \mu = 1$$

- Тогда коэффициент поглощения $\alpha = 0$
- Коэффициент распространения – мнимое число: $$\Gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0} = j\frac{\omega}{\upsilon}$$
- Коэффициент фазы $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0} = \dfrac{\omega}{\upsilon}$

Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике

- Волновое сопротивление – вещественное число:

$$Z_В = \frac{j\omega\mu_0}{Г} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = R_В = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \ [Ом]$$

- Уравнения плоской волны примут вид:

$$\dot{E}_m = E_{пад} + E_{отр} = \dot{M}_1 e^{-j\frac{\omega}{\upsilon}z} + \dot{M}_2 e^{j\frac{\omega}{\upsilon}z}$$

$$\dot{H}_m = H_{пад} - H_{отр} = \frac{\dot{M}_1}{R_в} e^{-j\frac{\omega}{\upsilon}z} - \frac{\dot{M}_2}{R_в} e^{j\frac{\omega}{\upsilon}z}$$

- Если среда не ограниченна в направлении z, то $M_2=0$ и существует только прямая волна.

Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике

- При z = 0 мгновенные значения векторов поля:

$$E = E_x = E_{x0}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}z\right),$$

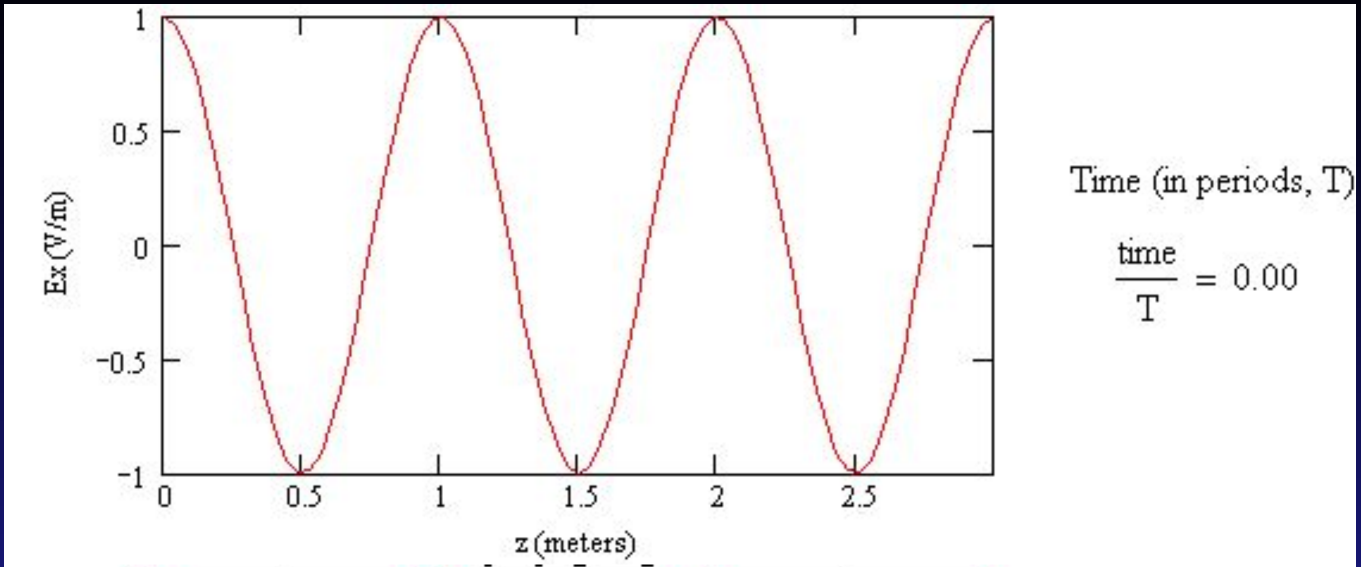
$$H = H_y = \frac{E}{R_B} = \frac{E_{x0}}{R_B}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}z\right)$$

- <u>Следовательно амплитуды векторов поля неизменны.</u> Волна распространяется без затухания, среда непоглощающая.

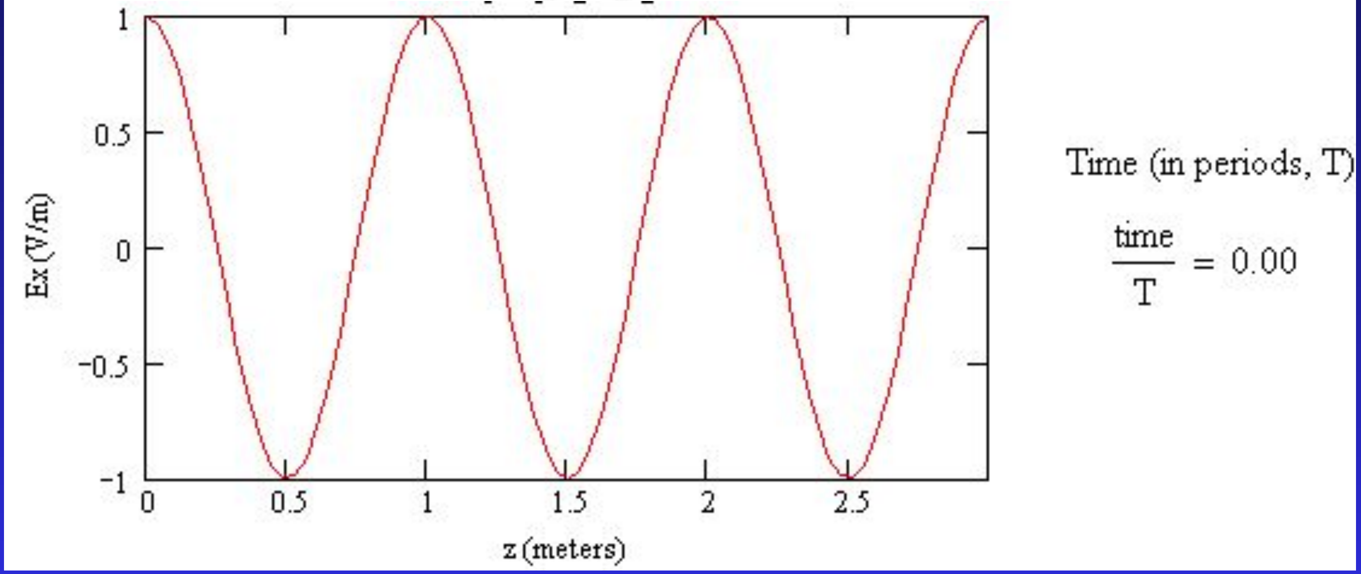
- Вектор Пойнтинга

$$\Pi = [\vec{E}\vec{H}] = \Pi_z = \frac{E_{x0}^2}{R_B}\sin^2\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}z\right)$$

Прямая волна



Обратная волна



Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике

- Так как волновое сопротивление – R_B вещественное число, то волны E и H совпадают по фазе.
- Фазовая скорость не зависит от частоты :

$$\upsilon_\Phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \upsilon$$