Замедление нейтронов

Уравнение переноса в теории замеделния

Рябева Е.В.
2015

Уравнение переноса для плотности потока нейтронов $\Phi_0(E)$

Φ_0(E) – усредненная по пространству плотность потока.
Рассматриваем только **бесконечные однородные среды-** плотность потока не зависит от пространственных переменных

$$\boxed{\Sigma(E)\Phi_0(E) = \int_E^\infty \Sigma_S(E' \to E)\Phi_0(E')dE' + q_0(E).}$$

Уравнение представляет собой баланс нейтронов в единичном энергетическом интервале вблизи энергии *E*.
В левой части записано число нейтронов, покидающих этот интервал вследствие поглощения и рассеяния, а справа приведен прирост числа нейтронов, обусловленный рассеянием и внешним источником

Представим дифференциальное сечение упругого рассеяния при его изотропности в системе центра инерции следующим образом

$\Sigma_S(E' \to E) = \Sigma_S(E')g(E',E)$

где $g(E',E)$ – вероятность того, что нейтрон с энергией E' после столкновения приобретет энергию *E*

При изотропном рассеянии вероятность любой энергии ядра отдачи от 0 до αE одинакова. Следовательно, в результате одного упругого столкновения с ядром нейтрон может с одинаковой вероятностью иметь любое значение энергии от *E* до $(1-\alpha)E$

$$\boxed{g(E' \to E) = \begin{cases} 1/\alpha E', & \text{при } (1-\alpha)E < E < E; \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases}}$$

Плотность столкновений

Плотность столкновений – это число столкновений, испытываемых нейтроном *в течение 1 с* в 1 см^3 $\psi(E) = \Phi_0(E)\Sigma(E)$.

$$\boxed{\psi(E) = \int\limits_{E}^{E/(1-\alpha)} dE' \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E')} g(E' \to E)\psi(E') + q_0(E).}$$

Поясним написанные значения для пределов интегрирования:
E' - была энергия нейтрона до взаимодействия, максимальная потеря энергии составляет
$\alpha E''$: $E' - \alpha E' = E$.
$E' = E/(1-\alpha)$ – верхний предел, самое большое значение энергии нейтрона до столкновения, при котором после столкновения он может иметь энергию E'.

E'-энергия нейтрона до столкновения

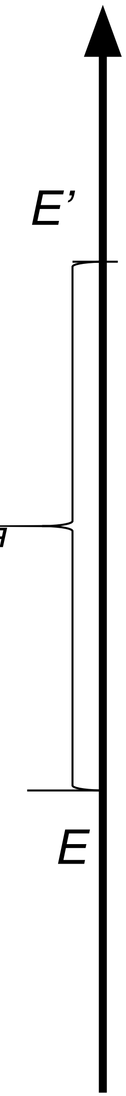
Какая она может быть?

Минимальная- E

Максимальная $E/(1-\alpha)$

$$\boxed{\begin{aligned} E' - \alpha E' &= E \\ E' &= \frac{E}{1-\alpha} \end{aligned}}$$

Максимальная потеря = α E'



E- энергия нейтрона после столкновения Нас интересуют нейтроны, которые будут после столкновения иметь энергию E

Плотность столкновений для среды, состоящей из ядер водорода

Запишем уравнение для плотности столкновений в среде, состоящей из ядер водорода. Для водорода α = 1.

1- α=0

$$\psi(E) = \int_{E}^{E/(1-\alpha)} dE' \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E')} g(E' \to E)\psi(E') + q_0(E).$$

$$g(E' \to E) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha E'} \text{ при } (1-\alpha)E' < E < E'; \\ 0 \text{ вне этого интервала.} \end{cases}$$

общий случай

$$E' \geq E$$

водород

$$g_{\mathrm{H}}(E' \to E) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha E'}\ \text{при}\ \frac{1}{E'} & E \leq E' \\ 0 \text{ при } & E > E'. \end{cases}$$

$$\psi_{\mathrm{H}}(E) = \int_{E}^{\infty} \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E')} \frac{\psi_{\mathrm{H}}(E')}{E'} dE' + q_0(E).$$

E

В случае моноэнергетического источника $q_0(E) = q_0\delta(E - E_0)$, верхний предел интегрирования следует заменить на E_0.

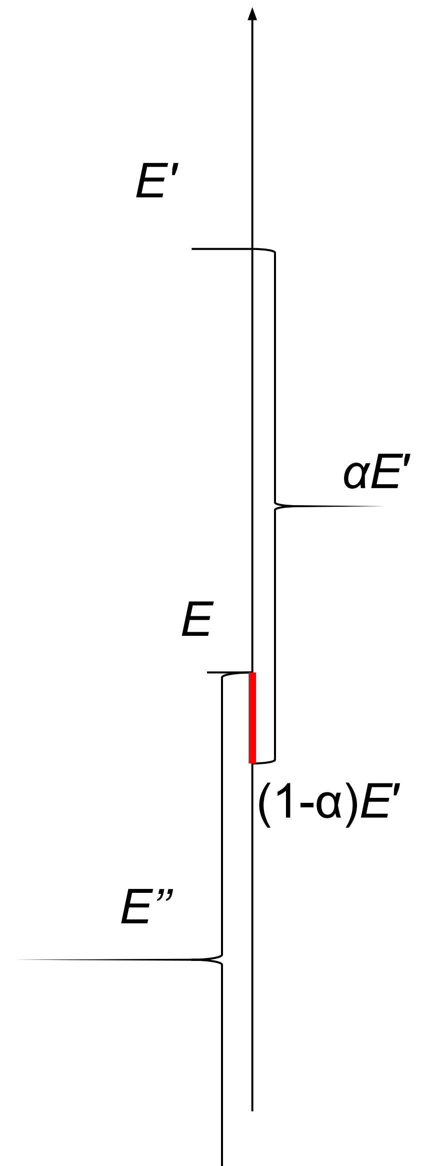
Если в спектре источника $q_0(E)$ максимальная энергия равна Emax, то верхний предел интегрирования следует заменить на Emax

Плотность замедления.

Плотность замедления q(E) – число нейтронов в 1 см3, замедляющихся ежесекундно ниже энергии E.

Введем понятие *G* - вероятность того, что нейтрон с начальной энергией $E' > E$ окажется после столкновения в области энергии $E'' \le E$. Такая вероятность определяется соотношением

$$\boxed{G(E', E) = \int_{(1-\alpha)E'}^{E} g(E' \to E'')dE'' = \int_{(1-\alpha)E'}^{E} \frac{dE''}{\alpha E'} = \frac{E-(1-\alpha)E'}{\alpha E'}.}$$



какие пределы интегрирования возможны здесь?
После столкновения нейтрон, имевший до столкновения энергию *E'* , будет иметь энергию *E''*, при этом необходимо, чтобы $E'' < E$,

максимальное значение энергии после столкновения – верхний предел интегрирования *E*.
После столкновения нейтрон потеряет максимально возможное количество энергии αE', и соответственно останется с минимально возможным значением энергии после столкновения –- (1-α)*E'* - это и есть нижний предел интегрирования.

Согласно определению плотности замедления
Плотность замедления *q*(*E*) – число нейтронов в 1 см3, замедляющихся *ежесекундно* ниже энергии *E*.

$$\boxed{q(E) = \int_{E}^{E/(1-\alpha)} \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E')} \psi(E') G(E', E) dE' =}$$

$$\boxed{= \int_{E}^{E/(1-\alpha)} \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E')} \psi(E') \frac{E-(1-\alpha)E'}{\alpha E'} dE'.}$$

В среде, состоящей из ядер водорода

α = 1, и тогда

$$G(E',E) = \frac{E-(1-\alpha)E'}{\alpha E'} = \frac{E}{E'}$$

$$q_{\mathrm{H}}(E) = E\int_E^{\infty} \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E)}\,\psi_{\mathrm{H}}(E')\,dE',$$

Плотность замедления

Плотность столкновений

$$\psi_{\mathrm{H}}(E) = \int_E^{\infty} \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E')}\frac{\psi_{\mathrm{H}}(E')}{E'}dE' + q_0(E) = \frac{q_{\mathrm{H}}(\;\;)}{\;} + q_0(E)$$

Как изменяется плотность замедления?

$$q_H(E) = E[\psi_H(E) - q_0(E)]$$

$$\frac{dq_H}{dE} = \frac{d}{dE}\left[E\int_E^{\infty}\frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')}\frac{\psi_H(E')}{E'}dE'\right] = \frac{dE}{dE}\int_E^{\infty}\frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')}\frac{\psi_H(E')}{E'}dE' + E\frac{d}{dE}\left[\int_E^{\infty}\frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')}\frac{\psi_H(E')}{E'}dE'\right] =$$

$$= \psi_H(E) - q_0(E) + E\left[\frac{d}{dE}\begin{pmatrix}\text{первообразная}\\ \text{выражения при E'=}\infty\\ \text{не зависит от E}\end{pmatrix}\right] - \frac{d}{dE}\left[\begin{matrix}\text{первообразная}\\ \text{в выражении при E'=E} \rightarrow \end{matrix}\left(\frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma(E)}\frac{\psi_H(E)}{E}\right)\right] =$$

$$= \psi_H(E) - q_0(E) + 0 - E\frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma(E)}\frac{\psi_H(E)}{E} = \psi_H(E)\left[1 - \frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma(E)}\right] - q_0(E) =$$

$$= \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)}\psi_H(E) - q_0(E)$$

$$\frac{dq_H}{dE} = \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)}\psi_H(E) - q_0(E)$$

Замедление в водороде в отсутствие поглощения

Σa = 0

Плотность замедления

$$q_H(E) = \int_E^\infty \frac{\Sigma_S(E')}{\Sigma(E)} \psi_H(E')\,dE' = E\int_E^\infty \psi_H(E')\,dE',$$

Плотность столкновений

$$\psi_H(E) = \frac{q_H(E)}{E} + q_0(E),$$

$$q_H(E) = \int_E^\infty \frac{\frac{q_H(E')}{E'} + q_0(E')}{E'}\,dE'.$$

$$\frac{dq_H}{dE} = \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)}\frac{q_H(E)}{E} - \frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma(E)} q_0(E) = q_0(E)$$

$$q_H(E) = \int_E^{E\max} q_0(E')\,dE'$$

$$q_H(E) = \int_{E}^{E\max} q_0(E')dE'$$

В случае моноэнергетического источника с энергией *E*0 число нейтронов, испускаемых в 1 см3 в 1 с с энергией *E*:

$q_0(E) = q_0\delta(E-E0)$,

$q(E) = q_0$ для всех энергий ($E<=E_0$).

Физический смысл этого уравнения: для непоглощающего замедлителя плотность замедления нейтронов при энергии *E* равна числу нейтронов источника с энергиями выше *E*, генерируемых *в 1 см3 в 1 с*.

в случае моноэнергетического источника нейтронов в водороде при пренебрежении поглощением плотность столкновений

$$\psi_{\mathrm{H}}(E) = \frac{q_{\mathrm{H}}(E)}{E} + q_0(E) = \frac{q_0}{E} + q_0\delta(E-E_0),$$

плотность потока нейтронов, усредненная по объему среды

$$\Phi_0^H(E) = \frac{\psi_H(E)}{\Sigma} = \frac{q_0}{\Sigma_s^{\mathrm{H}}(E)\cdot E} + \frac{q_0\delta(E-E_0)}{\Sigma_s(E)}.$$

при всех энергиях, меньших энергии нейтронов источника

$$\Phi_0(E) = \frac{q_0}{\Sigma_s(E)\cdot E}.$$

Сечение рассеяния нейтронов в водороде постоянно в области энергий от **1 эВ до 10 кэВ**, а сечение поглощения при этом мало, поток замедляющихся нейтронов в этой области следует закону **1/*E***

Замедление в водороде с учетом поглощения

Для моноэнергетического источника при $E < E0$

$$\boxed{\frac{dq}{dE}=\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)}\frac{q(E)}{E},}\qquad \boxed{\frac{d\ln q}{dE}=\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)}\frac{1}{E},}$$

$$\boxed{\ln\frac{q(E)}{q(E_0)}=\int_E^{E_0}\frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')}\frac{dE'}{E'}\rightarrow q(E)=q(E_0)\exp\left[-\int_E^{E_0}\frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')}\frac{dE}{E'}\right].}$$

обозначили

$$\boxed{q(E_0)=q_0\frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)}}$$

$$\boxed{q(E)=\frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)}q_0\exp\left[-\int_E^{E_0}\frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')}\frac{dE}{E'}\right].}$$

$$\boxed{p(E)=\frac{q(E)}{q(E_0)}=\frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)}\exp\left[-\int_E^{E_0}\frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')}\frac{dE'}{E'}\right]}$$

вероятность избежать резонансного захвата при замедлении нейтронов. представляет собой вероятность того, что нейтрон, испущенный с энергией $E0$, не будет поглощен в процессе замедления до энергии E. первый множитель описывает вероятность того, что нейтрон источника не будет поглощен при первом столкновении

Поскольку при $E > 1$ эВ для **водорода** $\Sigma a << \Sigma s$,
то $\Sigma s/\Sigma \approx 1$. Отсюда $p(E) \approx 1$

Замедление в среде,
в которой отношение сечения поглощения к сечению рассеяния постоянно и равно $\boxed{\dfrac{\Sigma_s}{\Sigma_a} = c}$

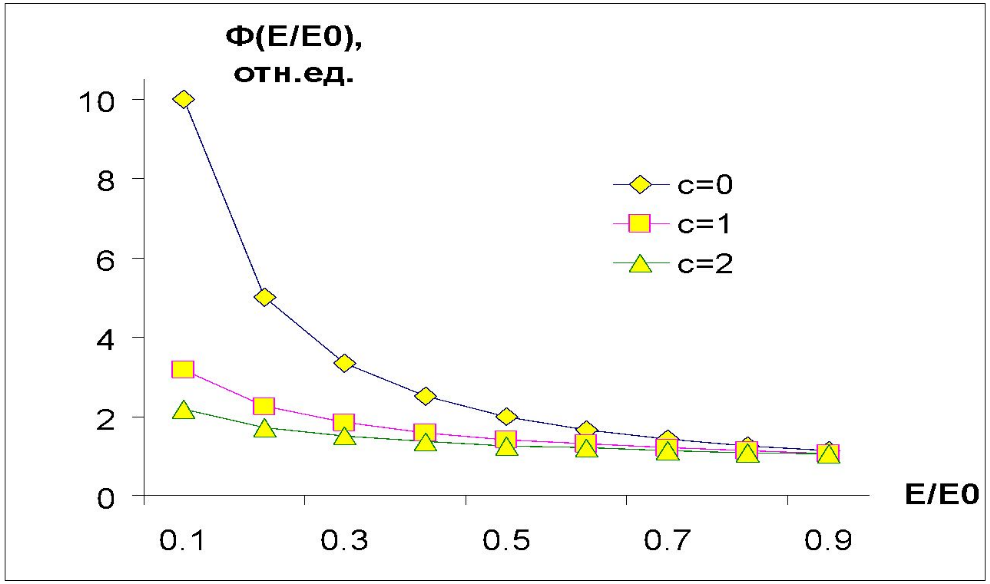
Пример: водород с тяжелым металлом

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_a+\Sigma_s} = \frac{1}{1+1/c} = \frac{c}{c+1}; \quad \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s+\Sigma_a} = \frac{d}{c+1},$$

$$q(E) = \frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)} q_0 \exp\left(-\int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\frac{dE'}{E'}\right) =$$

$$= \frac{c}{c+1} q_0 \exp\left(-\frac{1}{c+1}\int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'}\right) = \frac{c}{c+1} q_0 \left[\frac{E}{E_0}\right]^{\frac{c}{c+1}}.$$

$$E^{\frac{c}{c+1}-1} = E^{\frac{c-1-c}{c+1}} = E^{-\frac{1}{c+1}}.$$



Плотность потока замедляющихся нейтронов: c=0 - в водороде в отсутствие поглощения, c=1 и c=2- в смеси водорода с тяжелым поглотителем (отношение сечения поглощения к сечению рассеяния равно c)

$$\boxed{\Phi_0(E) = \frac{\psi(E)}{\Sigma} = \frac{q(E)}{\Sigma(E)E} = \frac{c}{c+1}\frac{q_0}{\Sigma\cdot E}\left[\frac{E}{E_0}\right]^{\frac{c}{c+1}}}$$