Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. КИНЕМАТИКА

ЛЕКЦИЯ
СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кафедра теоретической механики

План лекции

Задача механики сводится только к тому, чтобы раскрыть происходящие явления, а не к тому, чтобы доискиваться их причин.

Густав Кирхгоф

Введение

- **Сферическое движение твердого тела**
- **Угловые скорость и ускорение при сферическом движении**
- **Скорость и ускорение точек при сферическом движении**
- **Произвольные движения твердого тела**
- **Сложное движение твердого тела**

Заключение

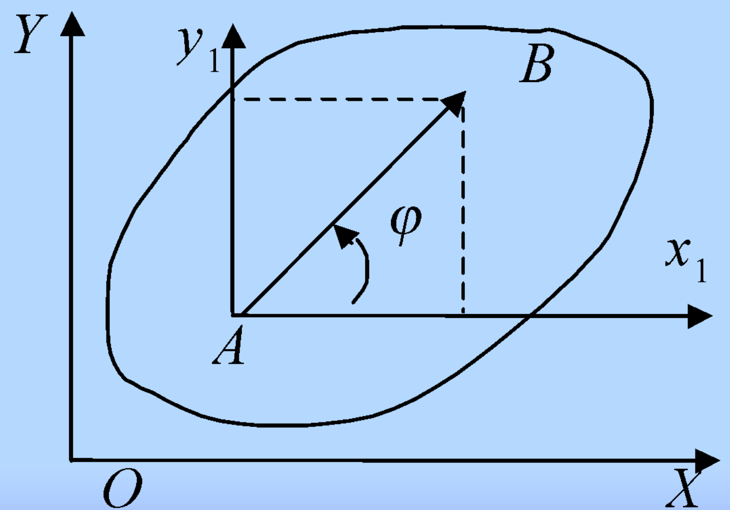
На предыдущих лекциях

Мы уже изучили:

- **Кинематику точки**
- **Простейшие движения твердого тела: поступательное и вращательное**
- **Плоское движение твердого тела.**

При этом мы представили его как сумму простейших движений. Сделали мы это с помощью введения вспомогательной системы координат

$$Ax_1y_1 :$$



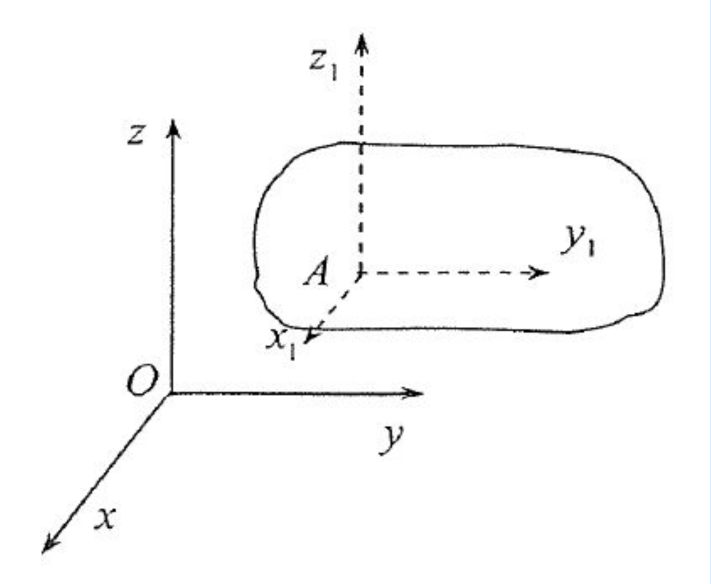
Введение

Пусть теперь тело совершает произвольное пространственное движение.

Для его изучения также возьмем одну точку A за полюс и введем вспомогательную систему координат

$Ax_1y_1z_1 : \ Ax_1 \parallel Ox, \ Ay_1 \parallel Oy, Az_1 \parallel Oz,$

В системе $Ax_1y_1z_1$ **точка A- неподвижна, т.е тело будет совершать движение с одной неподвижной точкой. Такое движение называется сферическим.**

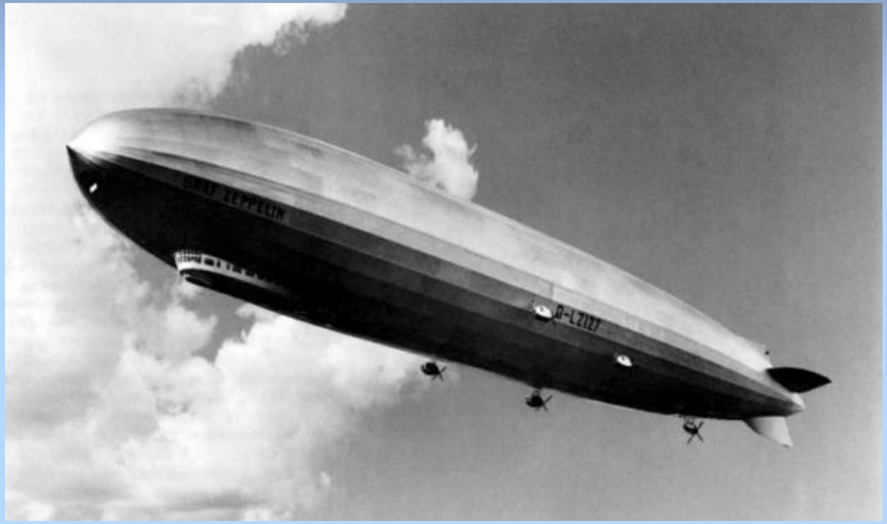


Произвольное движение представляется в виде суммы двух движений: Поступательного вместе с полюсом A и сферического вокруг полюса A.

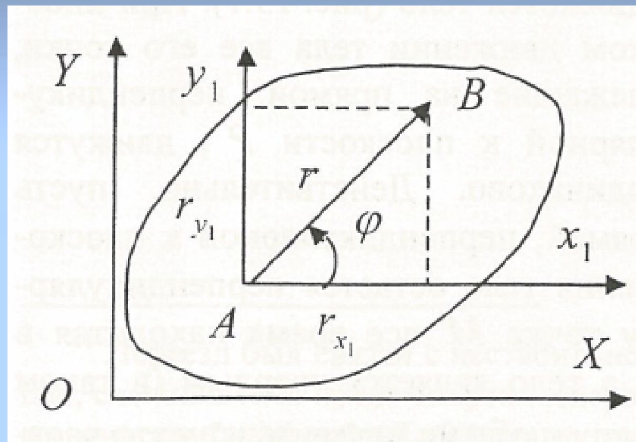
Цель лекции

Сначала изучить сферическое движение твердого тела, а потом уже и произвольное пространственное движение.

Практические примеры

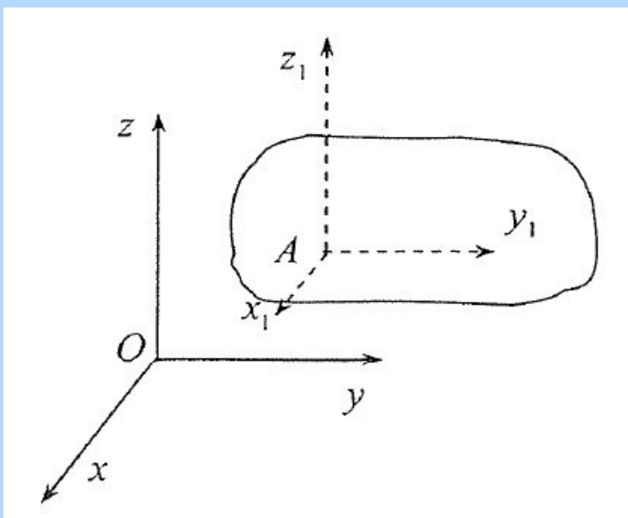


Задание движения твердого тела



Плоское движение

$$x_A = x_A(t)$$
$$y_A = y_A(t)$$
$$\varphi = \varphi(t)$$



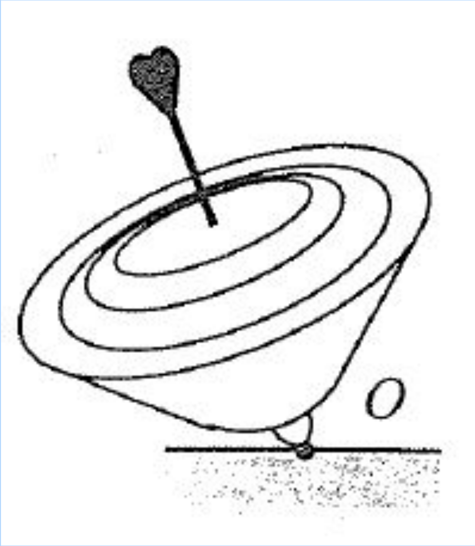
Поступательное движение

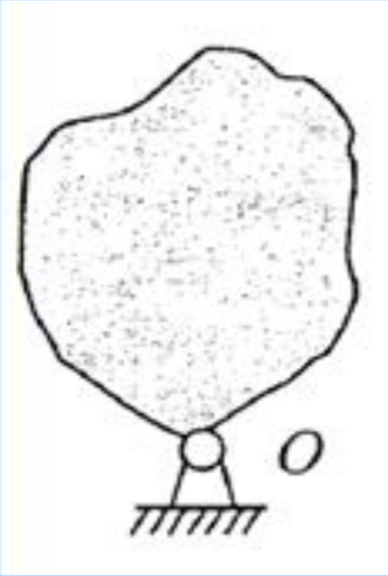
$$x_A = x_A(t)$$
$$y_A = y_A(t)$$
$$z_A = z_A(t)$$

Поступательное движение полностью определится движением полюса

Сферическое движение твердого тела

Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, называют *сферическим движением* или вращением вокруг неподвижной точки.



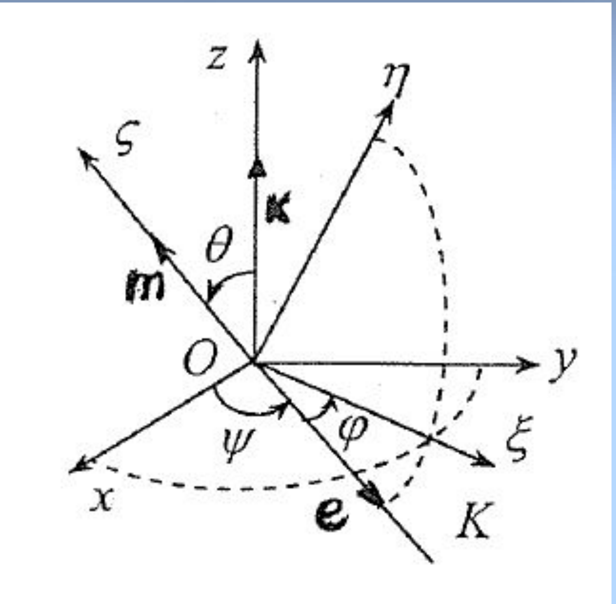


При сферическом движении любая точка тела будет находится на сфере с центром *O*.

Задание сферического движения твердого тела

$Oxyz$ - неподвижная система координат

$O\xi\eta\varsigma$ - подвижная система координат



три степени свободы

↓

три угла Эйлера

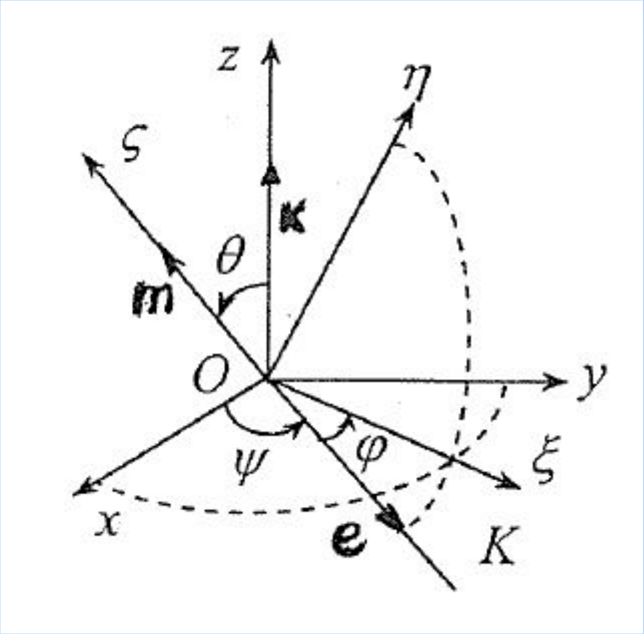
ψ - угол прецессии

θ - угол нутации

φ - угол собственного вращения

Построение подвижной системы координат

1. **Изобразить линию узлов *OK* (линию пересечения плоскостей** Oxy и $O\xi\eta$,
   т.е. повернуть *Ox* на угол ψ **вокруг оси *Oz***
2. **Повернуть *Oz* на угол** θ **вокруг оси *OK***
3. **Повернуть *OK* на угол** φ **вокруг оси** $O\xi$



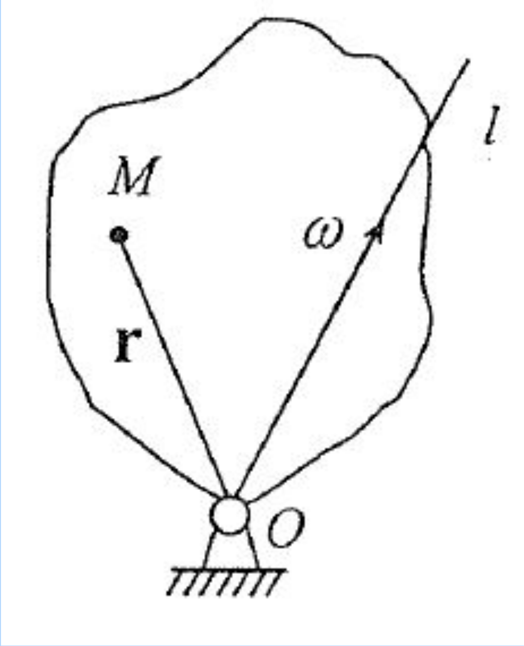
Закон сферического движения

$$\psi = \psi(t) \qquad \theta = \theta(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$$

Мгновенная ось вращения

Вспомним: МЦС для плоского движения.

Для сферического движения – роль МЦС играет мгновенная ось вращения – она проходит через точку О и скорости ее точек равны нулю.

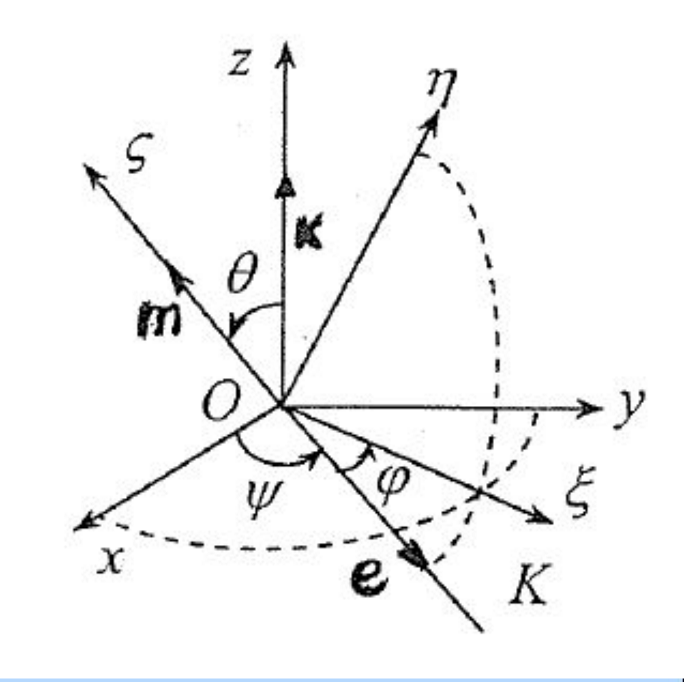


Утверждение (без доказательства). В каждый момент времени сферическое движение можно представить как вращение вокруг мгновенной оси вращения.

Задание угловой скорости тела

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{e} + \dot{\varphi}\mathbf{m}$$

- угловая скорость, направлена вдоль мгновенной оси вращения



$\mathbf{m}, \mathbf{e}, \mathbf{k}$ - единичные векторы осей $O\varsigma, OK, Oz$

$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi}\mathbf{k}$ - угловая скорость прецессии

$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta}\mathbf{e}$ - угловая скорости нутации

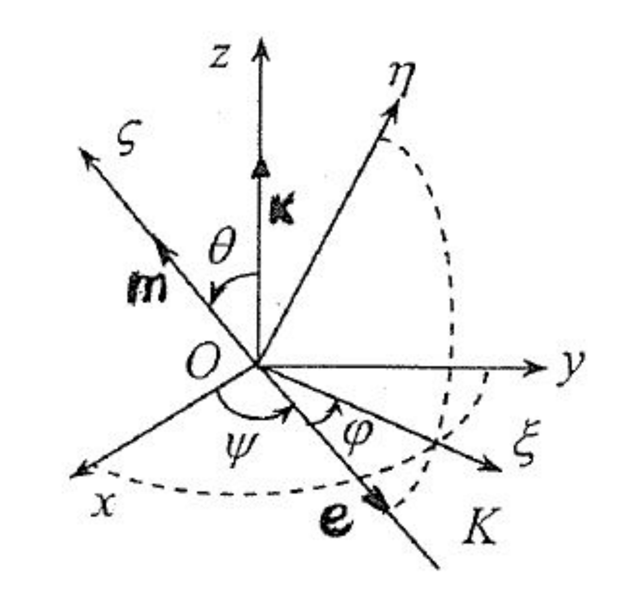
$\boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\varphi}\mathbf{m}$ - угловая скорости собственного вращения

Проекции угловой скорости на подвижные оси

$$\omega_\xi = \omega_{1\xi} + \omega_{2\xi} + \omega_{3\xi},$$

$$\omega_\eta = \omega_{1\eta} + \omega_{2\eta} + \omega_{3\eta},$$

$$\omega_\varsigma = \omega_{1\varsigma} + \omega_{2\varsigma} + \omega_{3\varsigma}.$$



$$\omega_{1\xi} = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi, \omega_{2\xi} = \dot\theta \cos\theta, \omega_{3\xi} = 0$$

$$\omega_{1\eta} = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi, \ \omega_{2\eta} = -\dot\theta \sin\varphi, \ \omega_{3\eta} = 0$$

$$\omega_{1\varsigma} = \dot\psi \cos\theta, \quad \omega_{2\varsigma} = 0, \quad \omega_{3\varsigma} = \dot\varphi$$

$$\omega_\xi = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\theta,$$

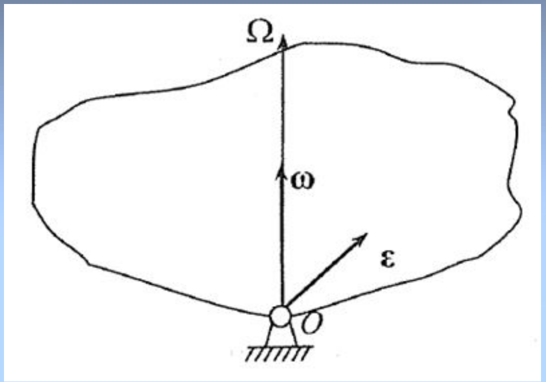
$$\omega_\eta = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi,$$

$$\omega_\varsigma = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta$$

кинематические уравнения Эйлера.

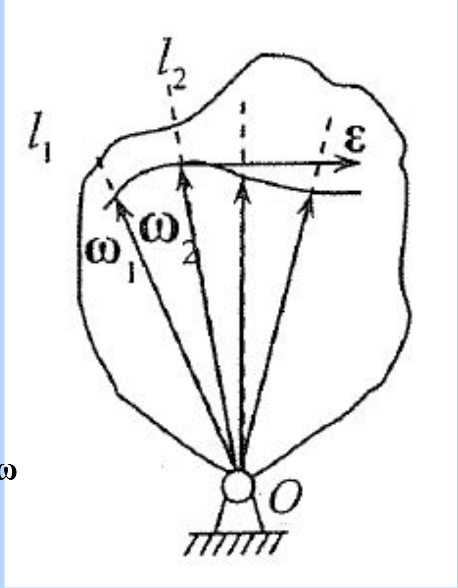
Нахождение углового ускорения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega \mathbf{l}) = \frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \dot{\omega}\mathbf{l} + \omega(\omega \times \mathbf{l})$$



$\dot{\omega}\mathbf{l}$ **-изменение угловой скорости по величине**

$\omega(\omega \times \mathbf{l})$**-изменение угловой скорости по направлению**

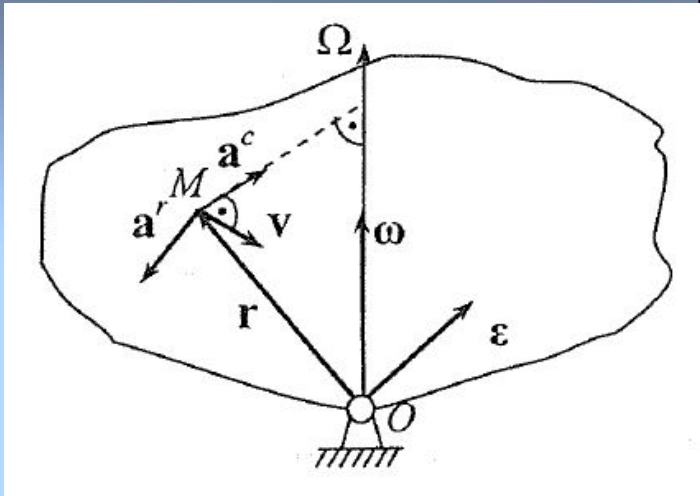


$\boldsymbol{\varepsilon}$ **-направлен по касательной к годографу** $\boldsymbol{\omega}$

Направления $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ в общем случае не совпадают!

Нахождение скорости и ускорения точек

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} =$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$\mathbf{a}^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ **- вращательное ускорение**

$\mathbf{a}^c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ **-осестремительное ускорение (направлено к мгновенной оси вращения)**

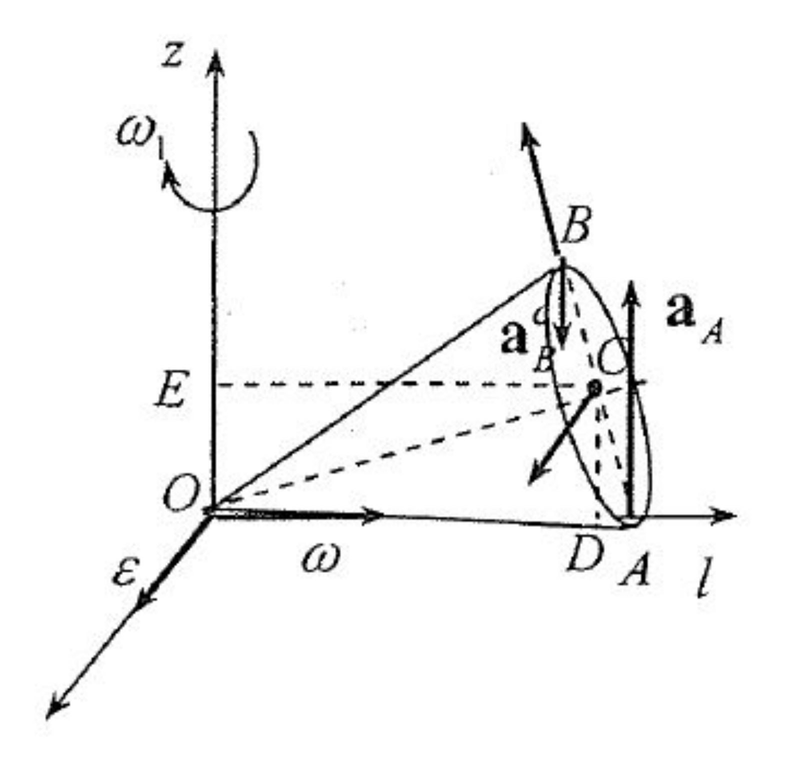
$$a = \sqrt{\left(a^c\right)^2 + \left(a^r\right)^2 + 2a^c a^r \cos\left(\mathbf{a}^c \mathbf{a}^r\right)}$$

Итог: Обе задачи кинематики для сферического движения твердого тела нами решены.

Пример

Дано: V_C, высота и радиус основания конуса

Найти: $\boldsymbol{\omega}$ $\boldsymbol{\varepsilon}$ $\mathbf{v}_A$ $\mathbf{v}_B$ $\mathbf{a}_A$ $\mathbf{a}_B$



Решение

$$\omega = \mathrm{v_c}/CD,\ \mathbf{v}_A = 0,\ \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OB}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A{}^c + \mathbf{a}_A{}^r, \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B{}^c + \mathbf{a}_B{}^r$$

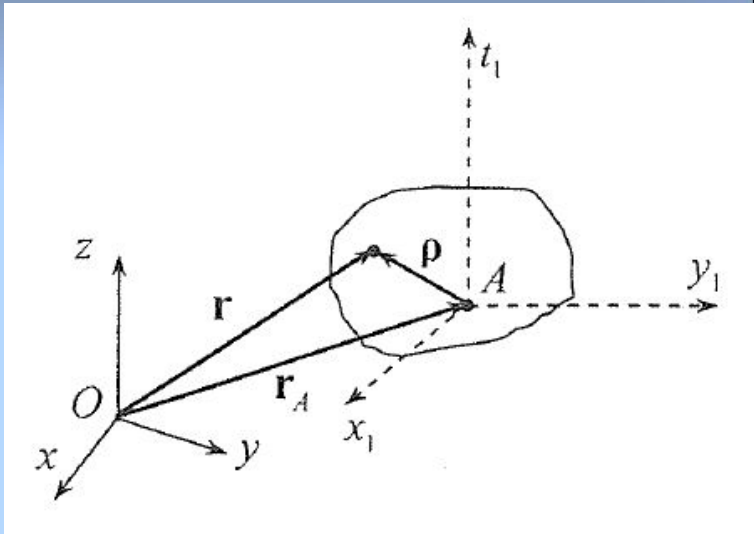
$$\mathbf{a}_A{}^c = 0, \qquad \mathbf{a}_B{}^c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B$$

$$\mathbf{a}_A{}^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{OA}, \qquad \mathbf{a}_B{}^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{OB}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega \mathbf{l}) = \omega \frac{d\mathbf{l}}{dt}; \qquad \varepsilon = \omega\omega_1; \omega_1 = \mathrm{v_c}/CE$$

Произвольное движение твердого тела

Шесть степеней свободы



$$\mathbf{r}_M(t) = \mathbf{r}_A(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$$

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), z_A = z_A(t)$$

$$\psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t),\ \varphi = \varphi(t)$$

Произвольное движение представляется в виде суммы двух движений: Поступательного вместе с полюсом А и сферического вокруг полюса А.

Скорости и ускорения точки при произвольном движении

$$\mathbf{v}_M = \frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

Скорость любой точки произвольно двигающегося тела равна сумме скорости полюса и скорости сферического движения тела вокруг полюса.

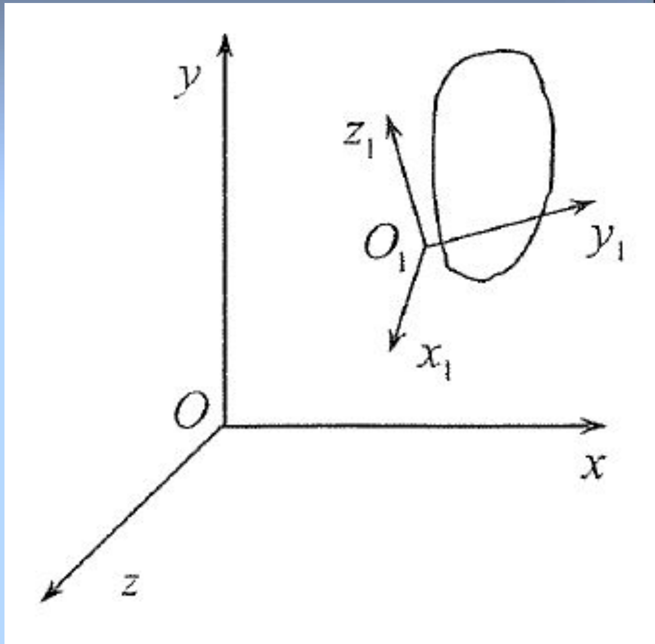
$$\mathbf{a}_M = \frac{d\mathbf{v}_M}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}\right)$$

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$$

Ускорение любой точки при произвольном движении твердого тела равно сумме ускорения полюса и вращательного и осестремительного ускорений точки при ее сферическом движении вокруг полюса.

Сложное движение твердого тела

Если тело движется относительно подвижных осей, а эти оси совершают движение по отношению к неподвижным осям, то результирующие движение тела называется *сложным*.



Движение тела относительно неподвижной системы называют *абсолютным*, его движение относительно подвижной системы– *относительным*, а движение вместе с подвижной системой отсчета – *переносным*.

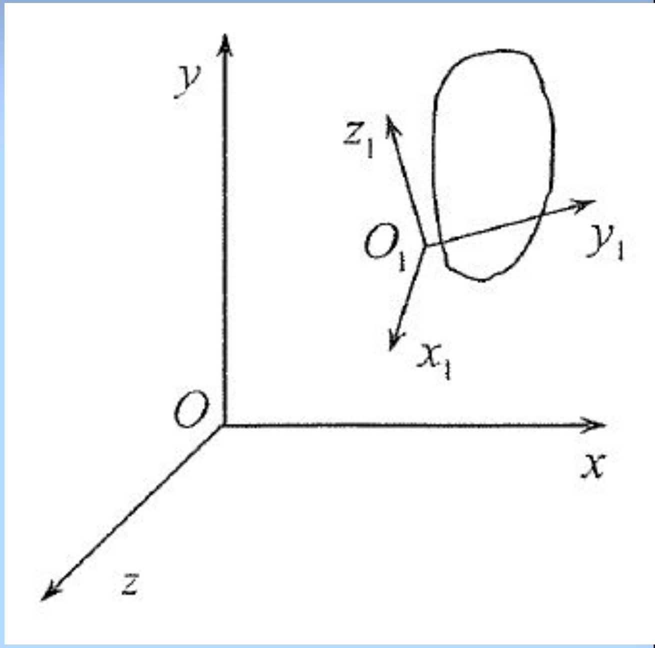
При поступательном движении

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$$

Частные случаи сложного движения твердого тела

1. Сложение поступательных движений

Пусть тело движется поступательно относительно системы $O_1x_1y_1z_1$ **со скоростью** $\mathbf{v}_r$



А система $O_1x_1y_1z_1$ **движется** $Oxyz$ **поступательно относительно со скоростью** $\mathbf{v}_e$

Тогда $$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$$

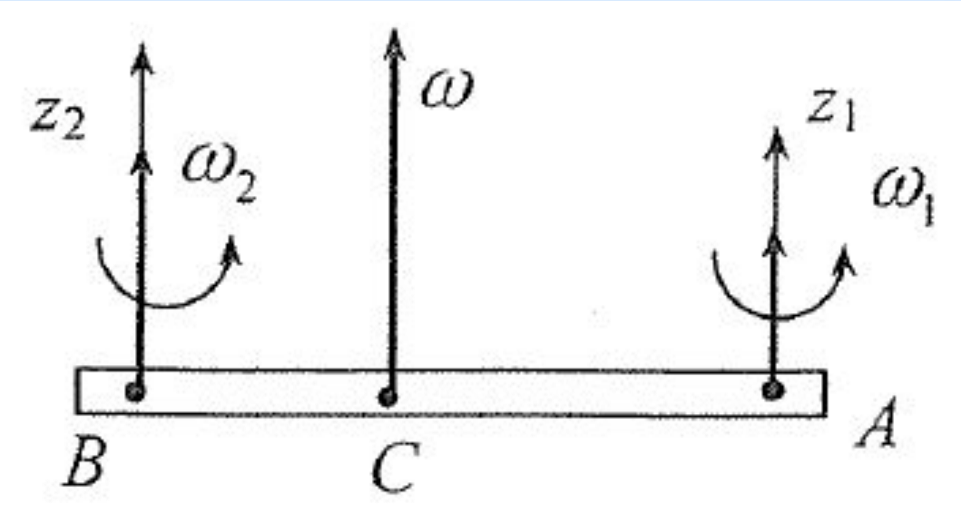
Частные случаи сложного движения твердого тела

2. Сложение вращений вокруг параллельных осей (вращения в одну сторону)

$$\omega_r = \omega_1; \omega_e = \omega_2$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{Ar} + \mathbf{v}_{Ae}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{Br} + \mathbf{v}_{Be}$$



$$\mathrm{v}_A = \omega_2 AB, \quad \mathrm{v}_B = \omega_1 AB$$

МЦС – C

$$\frac{\mathrm{v}_B}{BC} = \frac{\mathrm{v}_A}{AC} = \omega$$

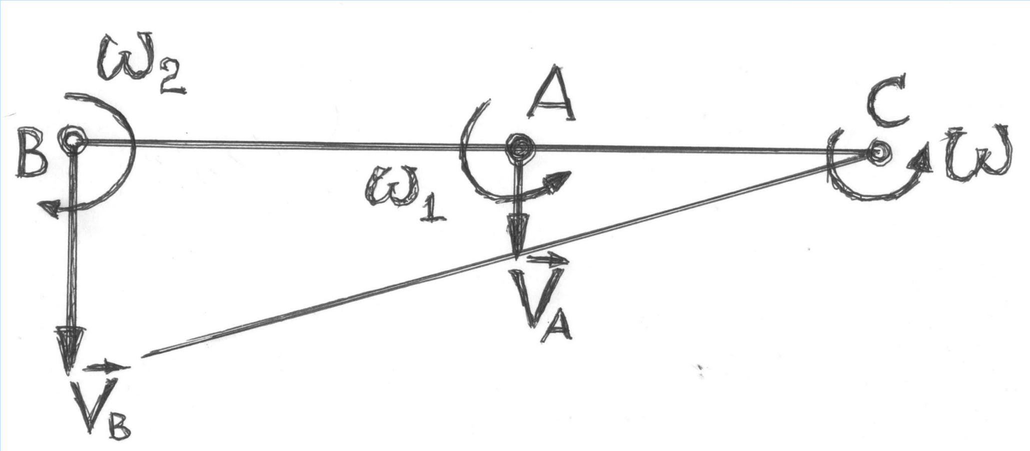
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad \omega_1 AC = \omega_2 BC$$

Результирующее движение – мгновенное вращение вокруг оси, параллельной данным, с угловой скоростью

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

3. Сложение вращений вокруг параллельных осей (вращения в разные стороны)

$$|\omega_1| \neq |\omega_2| \qquad |\omega_1| > |\omega_2|$$



МЦС – C

$$\omega_1 AC = \omega_2 BC$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

Результирующее движение – мгновенное вращение вокруг оси, параллельной данным, с угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$

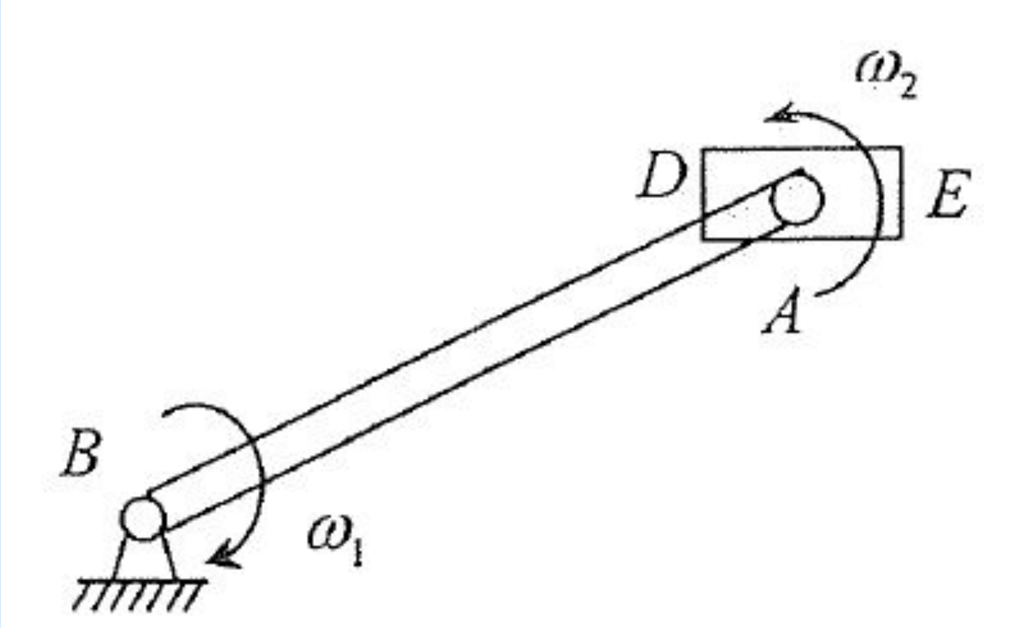
Частные случаи сложного движения твердого тела

4. Пара вращений

(вращения в разные стороны, при этом $\omega_1 = -\omega_2$)

$$\omega_r = \omega_2 ; \omega_e = \omega_1$$

МЦС не существует



$$v = v_A = v_B = \omega AB$$

$$|\omega| = |\omega_1| = |\omega_2|$$

Результирующее движение является мгновенно поступательным.

Пример: Движение педали велосипеда DE

4. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

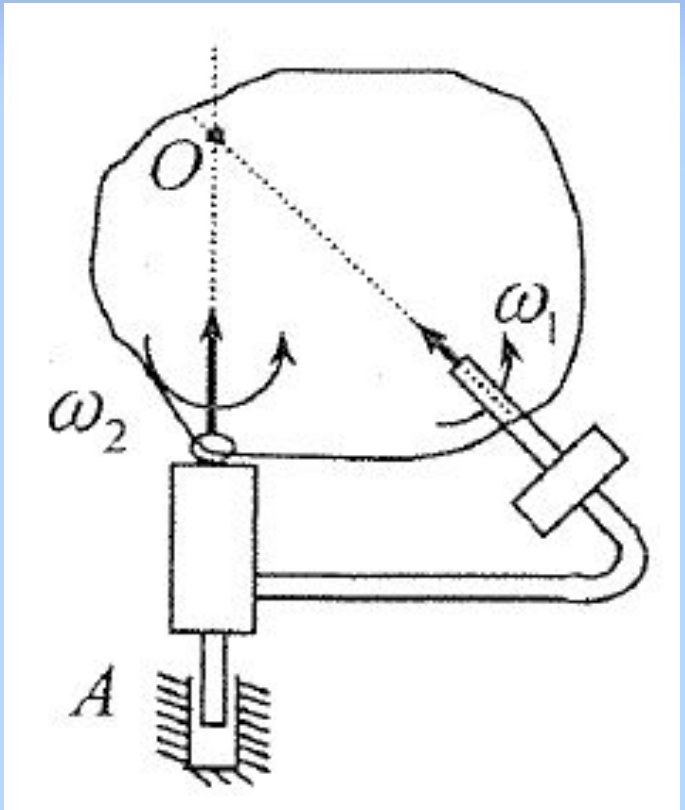
$$\omega_r = \omega_1 \qquad \omega_e = \omega_2$$

$$\mathbf{v}_O = 0 \Rightarrow \text{абсолютное движение} - \text{сферическое}$$

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_{Mr} + \mathbf{v}_{Me}$$

$$\mathbf{v}_{Mr} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{v}_{Me} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}_M = \left(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2\right) \times \mathbf{r}$$



Результирующее движение – мгновенное вращение вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$$

Заключение

1. Рассмотрено сферическое движение твердого тела.
2. Выведены формулы для определения угловой скорости и углового ускорения.
3. Определены скорости и ускорения отдельных точек .
4. Произвольное движение твердого тела представлено как сумма поступательного вместе с полюсом и сферического вокруг полюса.
5. Рассмотрены частные случаи сложного движения твердого тела.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется сферическим ?
2. Приведите примеры сферического движения.
3. Как определяются углы Эйлера ?
4. Задание сферического движения посредствам углов Эйлера единственное возможное или нет ?
5. Что называется мгновенной осью вращения ?
6. Совпадает ли направление угловой скорости и углового ускорения тела, совершающего сферическое движение ?
7. Каким образом можно представить произвольное движение твердого тела?
8. Сложное движение – это какой-то особый вид движения ? Если да, то какой ?