Квазікласичне наближення для рівняння Дірака зі скалярно-векторним зв'язком кулонівського типу

Виконала: студентка 4 курсу 1 групи напряму підготовки "Математика" 6.040201 Гобан О.І.

Керівник доц. Рейтій О.К.

Задача про опис руху релятивістської частинки спіну ½ в ефективному полі, що складається з статичного скалярного і електричного зовнішніх полів, зводиться в нашій постановці до розв’язання рівняння Дірака зі змішаним скалярно-векторним зв’язком $(c = \hbar = 1)$

$$[\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta(m + S(\mathbf{r})) + V(\mathbf{r})]\Psi = E\Psi \qquad (1)$$

Тут $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ і β – стандартні матриці Дірака, $\hat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}_r$ – оператор імпульсу, E і m – повна енергія і маса спокою частинки, $S(r)$ – скалярний лоренц-потенціал, а потенціал $V(r)$ є нульовою компонентою 4-вектора A_μ: $\mathbf{A} = 0,\ V(r) = -eA_0(r), e > 0.$

Отримаємо формули квазікласичного наближення для рівняння Дірака:

$$\Psi = r^{-1}\begin{pmatrix} F(r)\Omega_{jlM}(\mathbf{n}) \\ iG(r)\Omega_{jlM}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}$$

переходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для радіальних хвильових функцій *F* і *G*.

$$\frac{dF}{dr} + \frac{\tilde{k}}{r}F - \frac{1}{\hbar}\left[\left(E - V(r)\right) + \left(m + S(r)\right)\right]G = 0, \qquad (3а)$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{\tilde{k}}{r}G + \frac{1}{\hbar}\left[\left(E - V(r)\right) - \left(m + S(r)\right)\right]F = 0. \qquad (3б)$$

Тут в явному вигляді відновлено залежність від сталої Планка $\hbar$ і використовуються наступні нові позначення:

$$\tilde{k} = \hbar k, \quad k = \begin{cases} -(l+1) \text{ для } j = l + 1/2 \ (l = 0,1,\dots) \\ l \qquad\quad\ \text{ для } j = l - 1/2 \ (l = 1,2,\dots), \end{cases}$$

Систему (3) можна звести до рівняння другого порядку

$$\chi' = \frac{1}{\hbar} D\chi, \quad \chi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -\dfrac{\tilde{k}}{r} & m + S(r) - E + V(r) \\ m + S(r) - E + V(r) & \dfrac{\tilde{k}}{r} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

будемо шукати розв'язок системи (5) у вигляді асимптотичного ряду за степенями $\hbar$:

$$\chi(r) = \exp\left\{ \int^{r} y(r')dr' \right\} \sum^{\infty} \hbar^n \varphi^{(n)}(r), \qquad (6)$$

$$y(r) = \hbar^{-1} y_{-1}(r) + y_0(r) + \hbar y_1(r) + \cdots, \qquad \varphi^{(n)}(r) = \begin{pmatrix} \varphi_F^{(n)}(r) \\ \varphi_G^{(n)}(r) \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

отримаємо нескінчену систему рекурентних рівнянь для невідомих скалярних і векторних функцій:

$$(D - y_{-1} I)\varphi^{(0)} = 0, \qquad (8)$$

$$(D - y_{-1} I)\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} + y_{n-k}\varphi^{(k)}, \qquad n = 0,1,2,..., \qquad (9)$$

Власні значення $y_{-1} \equiv \lambda_i$ будуть коренями характеристичного рівняння $\det(D - y_{-1} I) = 0$

$$y_{-1} \equiv \lambda_i = \pm q, \qquad q = \sqrt{(m + S(r))^2 - (E - V(r))^2 + \left(\frac{k}{r}\right)^2}. \qquad (10)$$

Тоді відповідно праві власні вектори в покомпонентній формі запису рівні:

$$\varphi_i = A_1 \begin{pmatrix} m + S + E - V \\ \lambda_i + kr^{-1} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \lambda_i - kr^{-1} \\ m + S - E + V \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

$$\breve{\varphi}_i = B_1(m+S-E+V, \lambda_i + kr^{-1}) = B_2(\lambda_i - kr^{-1}, m+S+E-V). \qquad (13)$$

$$\breve{\varphi}_i(D - y_{-1}I) = 0, \qquad (12)$$

- Далі треба сказати, що підбираючи множники i , розв’язок можна отримати у вигляді

$$\chi_i = (\breve{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2} \exp\left\{\int^r \lambda_i(r')dr'\right\}\varphi_i\,. \qquad (18)$$

ефективний потенціал (ЕП) для радіального руху:

$$U(r,E) = \frac{E}{m}V + S + \frac{S^2 - V^2}{2m} + \frac{k^2}{2mr^2}.$$

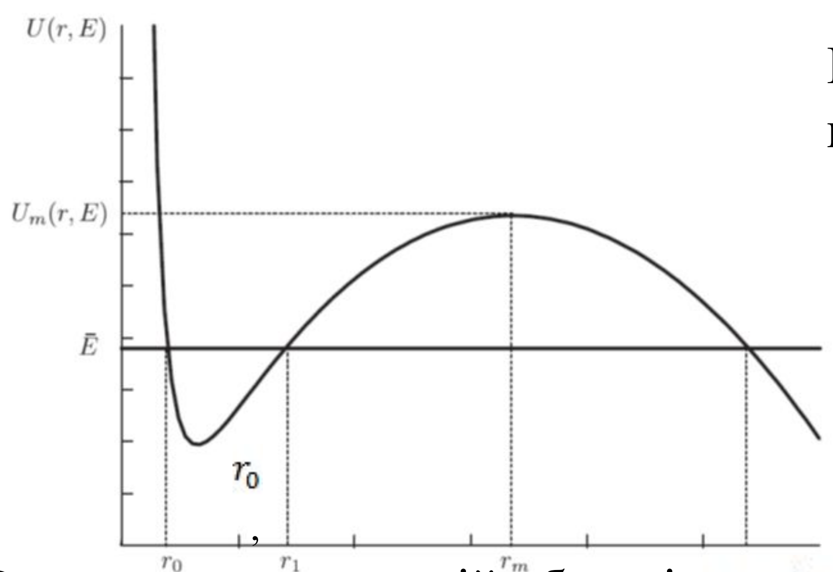

Рис. 1. Вигляд ефективного потенціалу $U(r, E)$ бар′єрного типу; $r_1 r_2$ – корені рівняння $q = 0$

І. В класично дозволеній області $r_0 < r < r_1$

$$F(r) = C_1^{\pm}\left[\frac{E - V + m + S}{p(r)}\right]^{1/2}\cos\theta_1, G(r) = C_1^{\pm}\left[\frac{E - V - m - S}{p(r)}\right]^{\frac{1}{2}}\cos\theta_2 . \quad (25)$$

$$p(r) = \left[(E - V(r)^2) - \left(m + S(r)\right)^2 - \left(\frac{k^2}{r}\right)\right]^{1/2} \quad (26)$$

$$\theta_1(r) = \int_{r_1}^{r}\left(p + \frac{kw}{pr}\right)dr + \frac{\pi}{4}, \quad \theta_2(r) = \int_{r_1}^{r}\left(p + \frac{k\tilde{w}}{pr}\right)dr + \frac{\pi}{4}, \quad (27)$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{V' - S'}{m + S + E - V} - \frac{1}{r}\right), \quad \tilde{w} = \frac{1}{2}\left(\frac{V' + S'}{m + S - E + V} + \frac{1}{r}\right). \quad (28)$$

$$\int^{r_1} (F^2 + G^2)dr = 1.$$

$$|C_1^{\pm}| = \left\{\int_{r_0}^{r_1} \frac{E - V(r)}{p(r)} dr\right\}^{-1/2} = \left(\frac{2}{T}\right)^{1/2}. \qquad (29)$$

II. В підбар'єрній області

$$r_1 < r < r_2$$

$$\chi = \binom{F}{G} =$$

$$= \frac{C_2^+}{\sqrt{qQ}} \exp\left\{-\int^{r} \left[q + \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2qQ}\right] dr\right\} \binom{-Q}{m+S-E+V}. \quad (30)$$

$$\chi = \frac{C_2^-}{\sqrt{qQ}} \exp\left\{-\int_{r_2}^{r} \left[q - \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2qQ}\right] dr\right\} \binom{m+S+E-V}{-Q}. \quad (31)$$

III. В «зовнішній» класично дозволеній області

$$r > r_2$$

$$\chi = \frac{C_3^+}{\sqrt{pP}} \exp\left\{\int_{r_2}^{r} \left[ip + \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP}\right] dr\right\} \binom{iP}{m+S-E+V}. \quad (32)$$

$$\chi = \frac{C_3^-}{\sqrt{pP}} \exp\left\{\int_{r_2}^{r} \left[ip - \frac{(m+S)V' + (E-V)S'}{2pP}\right] dr\right\} \binom{m+S+E-V}{iP}. \quad (33)$$

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(p+\frac{kw}{pr}\right)dr=\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n_r=0,1,2\ldots, \qquad (35)$$

Практична частина

$$V(r)=-\frac{\xi}{r}, \qquad S(r)=-\frac{\xi'}{r}. \qquad (39)$$

$$\lambda=(m^2-E^2)^{1/2}, \qquad \gamma=(k^2-\xi^2+\xi'^2)^{1/2} \qquad (40)$$

$$p(r)=\frac{\lambda}{r}\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}, \qquad w(r)=-\frac{m+E}{2[\xi-\xi'+(m+E)r]}, \qquad (41)$$

$$r_{0,1}=\frac{1}{\lambda^2}\left[\xi E+\xi' m\pm\sqrt{(\xi E+\xi' m)^2-\lambda^2\gamma^2}\right] \qquad (42)$$

В цих позначеннях умова квантування (35) має вигляд:

$$\mathrm{I}=\lambda\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}\,\frac{dr}{r}-$$

$$-\frac{\kappa(m+E)}{2\lambda}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{[\xi-\xi'(m+E)r]\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}}=\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\pi, \ (43)$$

$$\mathrm{I}_1 = \lambda \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}\,\frac{dr}{r}, \tag{44}$$

$$\mathrm{I}_2 = -\frac{\kappa(m+E)}{2\lambda} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{[\xi-\xi'+(m+E)r]\sqrt{(r-r_0)(r_1-r)}}. \tag{45}$$

$$\int \frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{-1}{(-a)^{1/2}} \arcsin \frac{(2ax+b)}{(b^2-4ac)^{1/2}} \quad \begin{bmatrix} a < 0 \\ b^2 > ac \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\int \frac{dx}{xX^{1/2}} = \frac{1}{(-c)^{1/2}} \arcsin \frac{bx+2c}{|x|(b^2-4ac)^{1/2}} \quad \begin{bmatrix} c < 0 \\ 4ac > b^2 \end{bmatrix}, \tag{47}$$

де $X = ax^2 + bx + c$

$$\mathrm{I}_1 = \frac{\pi}{2}\left\{\lambda r_0 \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_0}} - 1\right)^2\right\}. \quad \mathrm{I}_2 = -\sqrt{\frac{m+E}{m-E}}\frac{\kappa}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\xi-\xi')(m+E)(r_0+r_1)+r_0r_1(m+E)^2}},$$

$$\mathbf{I} = \frac{\pi}{2}\left[\lambda r_0 \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_0}} - 1\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\sqrt{\frac{m+E}{m-E}}\frac{\kappa}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\xi-\xi')(m+E)(r_0+r_1)+r_0r_1(m+E)^2}}\right] = \left(n_r + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Після спрощення це дає рівняння для визначення власних значень енергії:

$$\frac{\xi E + \xi' m}{\sqrt{m^2 - E^2}} - \gamma - \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,\kappa = n_r + \frac{1}{2}. \qquad (54)$$

$$E = m\left\{\frac{\xi\xi'}{\xi^2 + (N+\gamma)^2} \mp \left[\frac{\xi\xi'}{\xi^2 + (N+\gamma)^2} - \frac{\xi'^2 - (N+\gamma)^2}{\xi^2 + (N+\gamma)^2}\right]^{1/2}\right\} (55)$$

Проаналізуємо результати, які випливають із (55) в деяких найбільш важливих випадках.

А. Розглянемо спочатку положення, коли зовнішнє електростатичне поле вимкнено ($\xi = 0)$ таким чином, вираз для дискретних рівнів енергії

(55) приймає вигляд:

$$E_{\pm} = m\sqrt{1 - \frac{\xi'^2}{(n - |k| + \gamma)^2}}, \qquad (56)$$

де тепер $\gamma = \sqrt{k^2 + \xi'^2}.$

Ця формула показує, що рівняння Дірака зі скалярним зв'язком при $S(r) = -\xi'/r$ має дві симетрично розташовані(відносно нульового рівня $E = 0$ вітки енергетичного спектру масивних ферміонів у відповідності з двома можливими значеннями квадратного кореня (56). Додатній знак кореня у у формулі (56) відповідає спектру енергії частинок, а від'ємний – спектру енергії енергії античастинок, які взятої зі знаком мінус.

Б. Розглянемо тепер, що відбувається, коли виключено зовнішнє скалярне поле. Поклавши в (55) $\xi' = 0$, отримаємо відому формулу Зоммерфельда для для тонкої структури рівнів водневоподібного атома:

$$E_{nj} = m\left[1 + \frac{\xi^2}{(n - |k| + \gamma)^2}\right]^{-1/2}. \tag{57}$$

$\gamma = \sqrt{k^2 + \xi^2},$ $\xi = Z\alpha = Z/137$, Z – заряд ядра, а α – стала тонкої структури.

ВИСНОВКИ

1.Побудовано рекурентну схема знаходження ВКБ-розкладів для розв’язання рівняння Дірака в зовнішньому центрально-симетричному полі зі скалярно-векторною лоренцовою структурою потенціалів взаємодії.
2.Отримано квазікласичні формули для радіальних функцій в класично дозволеній та забороненій областях, знайдено умови їх зшивання при переході через точки повороту.
3.Проведено узагальнення правила квантування Бора-Зоммерфельда у релятивістському випадку, коли частинка зі спіном ½ взаємодіє зі скалярним і електростатичним зовнішніми полями одночасно. В квазікласичному наближенні отримано загальні вирази для ширини квазістаціонарних рівнів, відоме раніше лише для електростатичних потенціалів бар’єрного типу (формула Гамова).
4.Отримане правило квантування застосовано до скалярного і векторного потенціалів кулонівського типу, що дозволило розрахувати енергетичний спектр частинки в такому полі. Формула для енергії співпадає з результатом, отриманим точним інтегруванням системи радіальних рівнянь Дірака.

Дякую за увагу.