ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 10:
МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ

1. Уравнения кинетостатики

Так же как и для одной материальной точки, дифференциальным уравнениям движения материальной системы можно придать форму уравнений статики. Этот метод часто применяется в инженерных расчетах, особенно **при определении дина-
динамических реакций опор твердого тела**.

активные силы реакция связей

$$m_k \mathbf{w}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k \iff \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{J}_k = 0$$

$\mathbf{J}_k = -m_k \mathbf{w}_k$ - сила инерции

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k = 0 \qquad \boxed{\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0}$$

3 уравнения

учитываются только внешние силы!

В каждый момент времени сумма главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{J}_k = 0 \qquad \boxed{\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^J = 0}$$

3 уравнения

учитываются только внешние силы!

В каждый момент времени сумма главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции движущейся материальной системы равна нулю

2. Уравнения кинетостатики

$$\boxed{\mathbf{F}+\mathbf{R}+\mathbf{J}=0}$$

$$\boxed{\mathbf{M}_O+\mathbf{M}_O^R+\mathbf{M}_O^J=0}$$

Движение твердого тела вполне определяется шестью уравнениями кинетостатики, точно так же как равновесие твердого тела вполне определяется соответствующими шестью уравнениями (тремя уравнениями проекций и тремя уравнениями моментов).

Если рассматривается система, состоящая из нескольких тел, то можно составить соответствующие уравнения кинетостатики для каждого тела в отдельности.

Применение метода кинетостатики для твердого тела требует прежде всего умения **вычислить главный вектор и главный момент его сил инерции**.

Зная их проекции на выбранные оси координат, следует

1) составить уравнения кинетостатики
2) определить из этих уравнений неизвестные величины.

3. УК=теоремы об изменении кол-ва и момента кол-ва дв-ия

количество движения системы

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k = -\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{w}_k = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C$$

$$\boxed{\mathbf{J} = -\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -M\mathbf{w}_C}$$

главный вектор всех сил инерции точек материальной системы равен производной по времени от количества движения материальной системы, умноженной на -1

$$\mathbf{M}_O^J = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{J}_k = -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{w}_k = -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k \qquad \mathbf{K}_O$$

$$\boxed{\mathbf{M}_O^J = -\frac{d\mathbf{K}_O}{dt}}$$

главный момент всех сил инерции равен производной по времени от момента количеств движения материальной системы, умноженной на -1.

4. Вычисление главного вектора сил инерции ТТ

$$\boxed{\mathbf{J} = -M\mathbf{w}_C}$$

Главный вектор сил инерции твердого тела равен силе инерции его центра масс, в предположении, что в нем сосредоточена масса всего тела

5. Вычисление главного момента сил инерции ТТ

$$\mathbf{M}_C^J = -\frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = -\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_C}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_C$$

Система координат Cxyz жестко связана с телом

$$M_{Cx}^J = -\frac{dK_{Cx}}{dt} - \left(\omega_y K_{Cz} - \omega_z K_{Cy}\right)$$

$$M_{Cy}^J = -\frac{dK_{Cy}}{dt} - \left(\omega_z K_{Cx} - \omega_x K_{Cz}\right)$$

$$M_{Cz}^J = -\frac{dK_{Cz}}{dt} - \left(\omega_x K_{Cy} - \omega_y K_{Cx}\right)$$

$$K_{Cx} = I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$K_{Cy} = I_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z$$

$$K_{Cz} = I_z - I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y$$

$$M_{Cx}^J = -I_x\varepsilon_x + I_{xy}\left(\varepsilon_y - \omega_x\omega_z\right) + I_{xz}\left(\varepsilon_z + \omega_x\omega_y\right) - I_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right) - \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z$$

$$M_{Cy}^J = -I_y\varepsilon_y + I_{yz}\left(\varepsilon_z - \omega_y\omega_x\right) + I_{yx}\left(\varepsilon_x + \omega_y\omega_z\right) - I_{xz}\left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right) - \left(I_x - I_z\right)\omega_z\omega_x$$

$$M_{Cz}^J = -I_z\varepsilon_z + I_{xz}\left(\varepsilon_x - \omega_y\omega_z\right) + I_{yz}\left(\varepsilon_y + \omega_x\omega_z\right) - I_{xy}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) - \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y$$

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x,\ \varepsilon_y = \dot{\omega}_y,\ \varepsilon_z = \dot{\omega}_z,$$

6. Частные случаи

1) Случай плоского движения твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии.

Ось z перпендикулярна к плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью движения

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{M_{Cx}^J = M_{Cy}^J = 0, \quad M_{Cz}^J = -I_{Cz}\varepsilon_z}$$

2) Случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Выберем в качестве полюса произвольную точку на оси вращения, ось z совместим с осью вращения, а оси x и y скрепим с вращающимся телом.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{gathered} M_x^J = I_{xz}\varepsilon_z - I_{yz}\omega_z^2 \\ M_y^J = I_{yz}\varepsilon_z - I_{xz}\omega_z^2 \\ M_z^J = -I_z\varepsilon_z \end{gathered}}$$

$$M_{Cx}^J = -I_x\varepsilon_x + I_{xy}\left(\varepsilon_y - \omega_x\omega_z\right) + I_{xz}\left(\varepsilon_z + \omega_x\omega_y\right) - I_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right) - \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z$$

$$M_{Cy}^J = -I_y\varepsilon_y + I_{yz}\left(\varepsilon_z - \omega_y\omega_x\right) + I_{yx}\left(\varepsilon_x + \omega_y\omega_z\right) - I_{xz}\left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right) - \left(I_x - I_z\right)\omega_z\omega_x$$

$$M_{Cz}^J = -I_z\varepsilon_z + I_{xz}\left(\varepsilon_x - \omega_y\omega_z\right) + I_{yz}\left(\varepsilon_y + \omega_x\omega_z\right) - I_{xy}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) - \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y$$

7. Статические и добавочные динамические реакции

$$\mathbf{F}+\mathbf{R}+\mathbf{J}=0 \qquad \mathbf{M}_O+\mathbf{M}_O^R+\mathbf{M}_O^J=0$$

статические реакции

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}^{\text{ст}}+\mathbf{R}^{\text{д}} \qquad \mathbf{M}_O^R=\mathbf{M}_O^{R\text{ст}}+\mathbf{M}_O^{R\text{д}}$$

добавочные динамические реакции

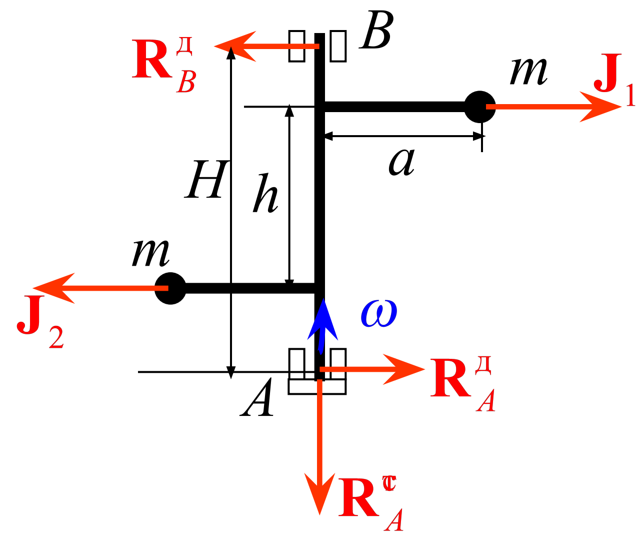
$$\boxed{\mathbf{F}+\mathbf{R}^{\text{ст}}=0 \qquad \mathbf{M}_O+\mathbf{M}_O^{R\text{ст}}=0}$$

уравнения для определения статических реакций

$$\boxed{\mathbf{R}^{\text{д}}+\mathbf{J}=0 \qquad \mathbf{M}_O^{R\text{д}}+\mathbf{M}_O^J=0}$$

уравнения для определения динамических реакций

8. Пример 1: определение добавочных динам. реакций



<u>Статические реакции</u>

$$\mathbf{R}_A^{ст} = 2m\mathbf{g} \qquad \mathbf{R}_B^{ст} = 0$$

<u>Дополнительные динамические реакции</u>

$$J_1 = J_2 = ma\omega^2$$

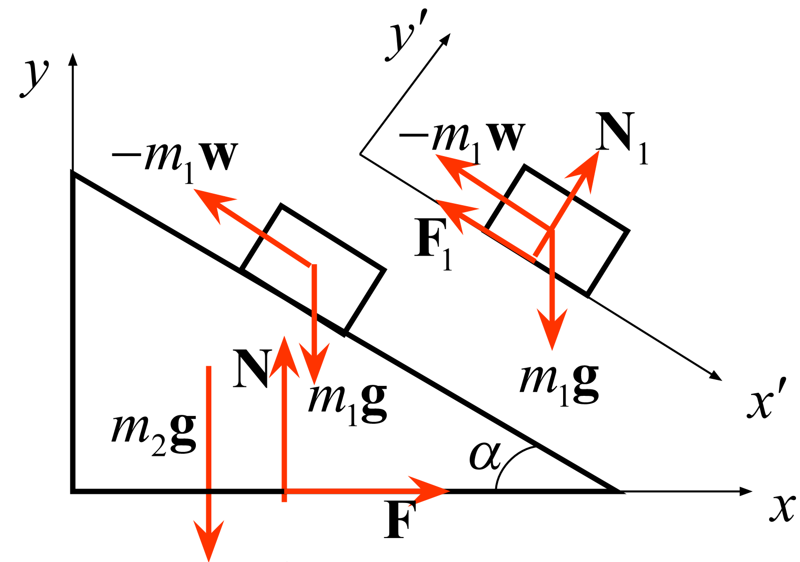
$$\mathbf{M}_O^J = ma\omega^2 h \qquad \mathbf{J} = 0$$

Силы инерции составляют пару сил.
Она может быть уравновешена только другой парой сил.

$$R_B^{д} = R_A^{д} = \frac{h}{H} ma\omega^2$$

9. Пример 2: несколько тел

Груз скользит вниз по наклонной эстакаде, свободно лежащей на земле. Коэффициенты трения скольжения между грузом и эстакадой, эстакадой и землей равны f,f_0 соответственно. При каких условиях эстакада не начнет движение?



<u>Движение груза</u>

$$\left.\begin{aligned} & m_1 g\sin\alpha - F_1 - m_1 w = 0 \\ & m_1 g\cos\alpha - N_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m_1 w = m_1 g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$$

<u>Эстакада + груз</u>

$$\left.\begin{aligned} & F - m_1 w\cos\alpha = 0 \\ & N - m_1 g - m_2 g + m_1 w\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & F = m_1 g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)\cos\alpha \\ & N = m_1 g + m_2 g - m_1 g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)\sin\alpha = \\ & = m_2 g + m_1 g\left(\cos\alpha + f\sin\alpha\right)\cos\alpha \end{aligned}$$

$$F < f_0 N \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_0 > \frac{m_1\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)\cos\alpha}{m_2 + m_1\left(\cos\alpha + f\sin\alpha\right)\cos\alpha}}$$

10. Пример 3

<u>Геометрия:</u> С движется по окружности радиуса l с центром в точке О

$$\mathbf{F}+\mathbf{R}+\mathbf{J}=0 \Rightarrow \begin{cases} N_2 = ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ N_1 = mg - ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

$$M_{Cz} + M_{Cz}^R - I_{Cz}\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = l\left(N_1\sin\theta + N_2\cos\theta\right)$$

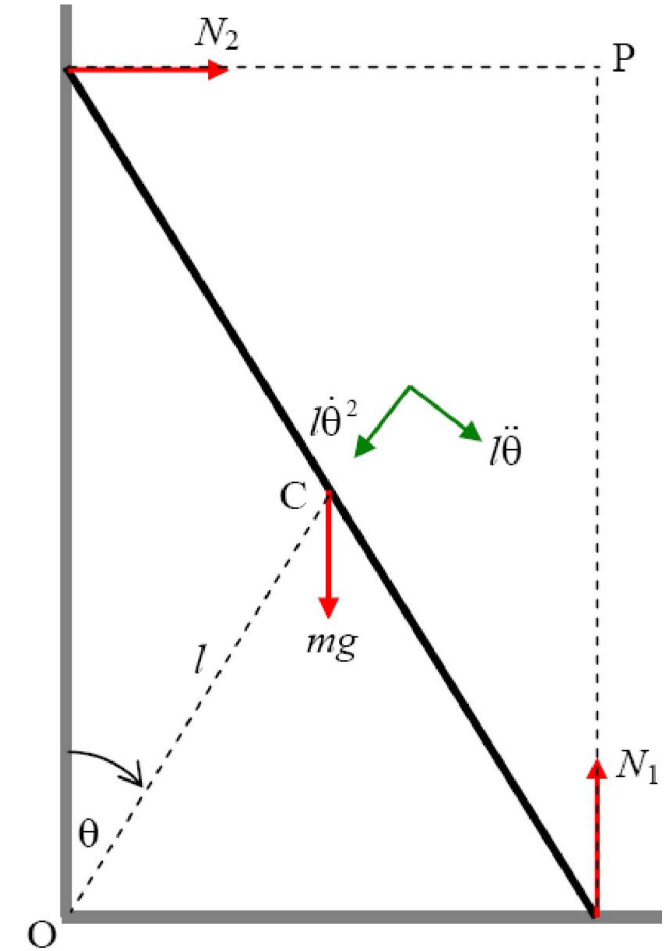
$$N_1\sin\theta + N_2\cos\theta = mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta \qquad \Big|\dot{\theta}$$

$$\frac{2}{3}ml^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -mgl\frac{d\cos\theta}{dt} \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)$$

$$N_2 = \frac{3}{4}mg\sin\theta\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}mg\left(1 - 6\cos\theta_0\cos\theta + 9\cos\theta\right)$$



$$N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$