ГИДРОДИНАМИКА

- **Гидродинамика** (от гидро- и динамика), раздел гидравлики, в котором изучаются движение несжимаемых жидкостей и взаимодействие их с твёрдыми телами.

- ***Кинематика*** жидкости обычно в гидравлике рассматривается совместно с динамикой и отличается от нее изучением видов и кинематических характеристик движения жидкости без учета сил, под действием которых происходит движение, тогда как динамика жидкости изучает законы движения жидкости в зависимости от приложенных к ней сил.

- Гидродинамическое давление (p) – это внутреннее давление развивающееся при движении жидкости.

- Скорость движения жидкости в данной точке (u) – это скорость перемещения находящейся в данной точке частицы жидкости, определяемая длиной пути l, пройденного этой частицей за единицу времени t.

- Существует два способа изучения движения жидкости - Лагранжа и Л. Эйлера.
- **Способ Лагранжа** заключается в рассмотрении движения каждой частицы жидкости, т. е**.** ***траектории*** *их движения*. В начальный момент времени положение частицы определено начальными координатами ее полюса x_0, y_0, z_0. При движении частица перемещается и ее координаты изменяются, Движение жидкости определено, если для каждой частицы можно указать координаты x, y и z как функции начального положения (x_0, y_0, z_0) и времени t:
- $x=x(x_0, y_0, z_0, t);$
- $y=y(x_0, y_0, z_0, t);$
- $z=z(x_0, y_0, z_0, t).$
- Переменные x_0, y_0, z_0 и t называют **переменными Лагранжа.**

- **Способ Эйлера** заключается в рассмотрении движения жидкости в различных точках пространства в данный момент времени.
- Метод позволяет определить скорость движения жидкости в любой точке пространства в любой момент времени, т. е. характеризуется построением *поля скоростей* и поэтому широко применяется при изучении движения жидкости.
- В данный момент времени в каждой точке этой области, определяемой координатами *x, y, z* находится частица жидкости, имеющая некоторую скорость *u*, которая называется ***мгновенной местной скоростью.***
- Совокупность *мгновенных местных скоростей* представляет векторное поле, называемое ***полем скоростей.***
- *Поле скоростей* может изменяться во времени и по координатам:
- $u_x = u_x(x, y, z, t);$
- $u_y = u_y(x, y, z, t);$
- $u_z = u_z(x, y, z, t).$
- Переменные *x, y, z* и *t* называют ***переменными Эйлера.***
- Векторными линиями поля скоростей являются линии тока.

- По характеру изменения поля скоростей во времени движения жидкости делятся на ***установившиеся, неустановившиеся и квазистационарное.***

- ***Установившееся движение*** – движение, при котором, в любой точке потока жидкости скорость (и давление) с течением времени не изменяется, т. е. зависят только от координат точки
- $u_x = u_x(x, y, z).$
- ***Неустановившееся движение*** – движение, при котором в любой точке потока жидкости скорость с течением времени изменяется, т. е.
- $u_x = u_x(x, y, z, t).$
- ***Квазистационарное движение*** – движение, при котором изменчивость характеристик движения жидкости в течение выбранного промежутка времени не является существенной, т.е. ее влияние лежит в пределах допускаемой точности решения, и его можно рассматривать как установившееся.

- **Установившееся движение** жидкости подразделяется на ***равномерное*** и ***неравномерное***.
- ***Равномерным*** называется установившееся движение, при котором живые сечения вдоль потока не изменяются: в этом случае $w = const$; средние скорости по длине потока также не изменяются, т.е.

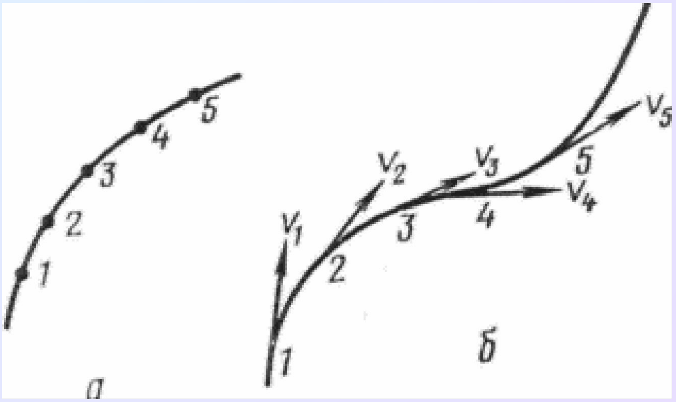
$$v = const$$

- Установившееся движение называется ***неравномерным***, когда распределение скоростей в различных поперечных сечениях неодинаково; при этом средняя скорость и площадь поперечного сечения потока могут быть и постоянными вдоль потока.

- Потоки жидкости по своему характеру подразделяются на ***напорные, безнапорные и гидравлические струи***.
- При ***напорном*** движении поток не имеет свободной поверхности, т. е. соприкасается с твердыми стенками со всех сторон.
- При ***безнапорном*** движении поток имеет свободную поверхность, т. е. он соприкасается с твердыми стенками лишь по части периметра.
- В ***гидравлических струях*** поток окружен со всех сторон свободной поверхностью.

Гидравлические характеристики движения жидкости

- ***Траектория движения частицы жидкости*** – это путь движения отдельной частицы жидкости в пространстве.
- При *установившемся* движении траектория движения частиц жидкости неизменна по времени.
- При *неустановившемся* движении траектория движения частиц непрерывно меняется по времени, т. к. происходит изменение скорости течения по величине и по направлению.
- ***Траектория движения*** изображает путь, который проходит частица жидкости за некоторый промежуток времени.



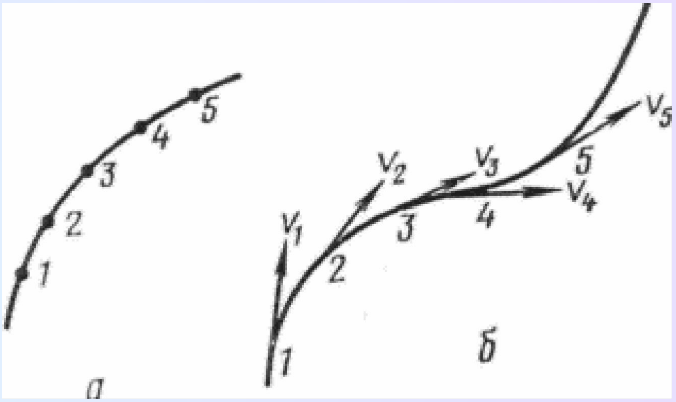
а – траектория движения частиц,
б – линии тока

Гидравлические характеристики движения жидкости

- ***Линия тока*** ***– это линия, проведенная через ряд точек в движущейся жидкости таким образом, что в каждой из этих точек векторы скорости в данный момент времени касательны к ней.***

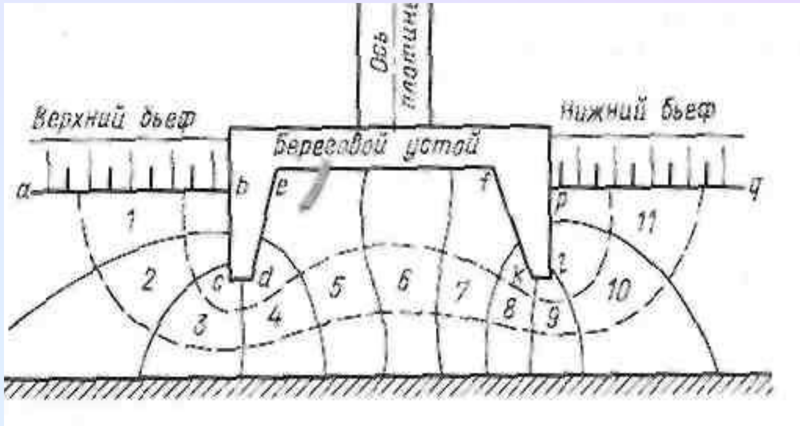
- ***Линия тока*** дает некоторую мгновенную характеристику потока, связывает различные частицы жидкости, лежащие на линии тока в данный момент, и показывает направление вектора скорости частиц в этот момент.

- При установившемся движении жидкости траектория движения частиц жидкости совпадает с линией тока.



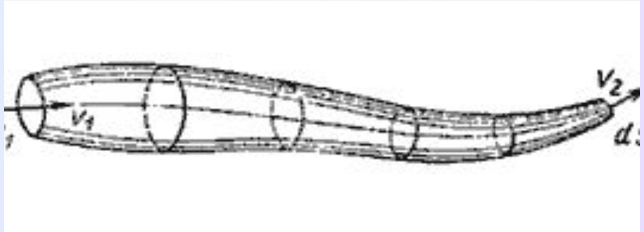
а – траектория движения частиц,
б – линии тока

- ***Линии равных напоров*** – линии перпендикулярные к линиям тока.
- Проекции линий равных напоров на горизонтальную плоскость представляют собой ***карту уровенной поверхности (изогипс, изопьез).***

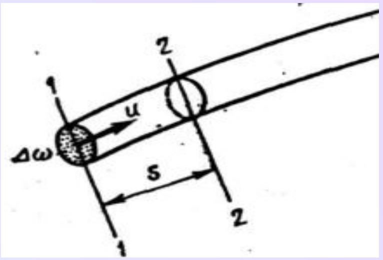


- ***Гидродинамическая сетка*** – система линий равных напоров и перпендикулярных к ним линий тока (рис.)

- ***Трубка тока*** – трубчатая непроницаемая поверхность, которая образуется если в движущейся жидкости взять бесконечно малый замкнутый контур и через все его точки провести линии тока.



- ***Элементарной струйкой*** называется часть жидкости, заключенная внутри трубки тока. Элементарная струйка характеризует состояние движения жидкости в данный момент времени *t*.
- При установившемся движении элементарная струйка имеет следующие свойства:
  - 1. форма и положение элементарной струйки с течением времени остаются неизменными, так как не изменяются линии тока;
  - 2. приток жидкости в элементарную струйку и отток из нее через боковую поверхность невозможен, так как по контуру элементарной струйки скорости направлены по касательной;
  - 3. скорость и гидродинамическое давление во всех точках поперечного сечения элементарной струйки можно считать одинаковым ввиду малости площади .



- ***Потоком жидкости*** называется совокупность движущихся с разными скоростями элементарных струек.

- К гидравлическим характеристикам движения жидкости относятся понятия *живого сечения, смоченного периметра, гидравлического радиуса, расхода жидкости и средней скорости.*

- *Живое сечение* (w) – это поперечное сечение потока, перпендикулярное ко всем линиям тока.
- *Например,* в круглой трубке диаметром d, в которой все поперечное сечение занято жидкостью, живое сечение – это площадь круга
-
- $$w = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ м}^2.$$

- ***Смоченный периметр*** – та часть периметра живого сечения, которая соприкасается с твердыми стенками, образуя смоченную поверхность. Например, для русла вся боковая поверхность потока, за исключением свободной поверхности которую жидкость имеет на границе с газообразной средой.
- Для круглой трубы, работающей полным сечением, смоченный периметр равен длине окружности, т. е..

$$\chi = \pi\ d,\ м$$

- Для круглой незаполненной трубы если угол в радианах,

$$\chi = \pi\ d\frac{\varphi}{360^{o}},$$

- или если угол φ в градусах

$$\chi = \pi d\ \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{d\varphi}{2}$$

- *Гидравлический радиус* (*R*) – отношение площади живого сечения к смоченному периметру. Например, для круглой трубы, работающей полным сечением, гидравлический радиус четверти ее диаметра, т. е.

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$$

- .

- ***Расход жидкости*** *(Q)* – это ее объем, протекающий в единицу времени через живое сечение потока. Расход для элементарной струйки
  - $dQ=udw,$
- где u – истинная скорость движения частиц жидкости, dw □□площадь сечения элементарной струйки.

- ***Средняя скорость*** – отношение расхода к площади живого сечения
  - $v=Q/w,$
- откуда
  - $Q=wv,$ м^3/с.

Уравнение неразрывности движения жидкости

- Возьмем сечение *1-1* с площадью и скоростью движения частиц жидкости u_1. Элементарный расход через сечение *1-1* равен

$$\Delta Q_1 = u_1 \Delta w_1$$

- Затем возьмем сечение *2-2* в этой же струйке с площадью сечения и скоростью *u1*. Элементарный расход через сечение *2-2* равен

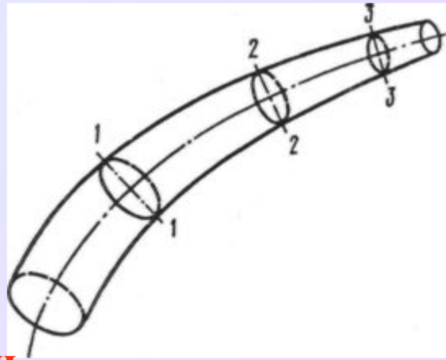
$$\Delta Q_2 = u_2 \Delta w_2$$

- Но по свойству элементарной струйки приток и отток жидкости через ее боковую поверхность невозможен; на участке *1-2,* который сохраняет неизменные размеры, не образуется пустот и не происходит переуплотнений; значит количества жидкости, протекающей в единицу времени через сечения *1-1* и *2-2*, должны быть одинаковы, т.е.
- принимая во внимание, что сечения *1-1* и *2-2* приняты произвольно, можно в общем случае для элементарной струйки написать

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \ldots = \Delta Q_n = \Delta Q = const$$

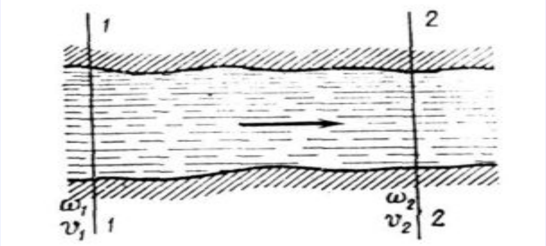
- или

$$u_1 \Delta w_1 = u_2 \Delta w_2 = \ldots = u_n \Delta w_n = \Delta Q = const$$



- - уравнение неразрывности (сплошности) для элементарной струйки - **элементарный расход жидкости при установившемся движении есть величина постоянная для всей элементарной струйки.**

- **Уравнение неразрывности при установившемся движении жидкости для потока жидкости.** Взяв в потоке два произвольных сечения *1-1* и *2-2* и представив живые сечения их состоящими из суммы элементарных струек, можно написать



- $$Q_1 = \sum_{w_1} u_1 \Delta w_1$$ – расход жидкости в сечении *1-1*;
- $$Q_2 = \sum_{w_2} u_2 \Delta w_2$$ – расход жидкости в сечении *2-2*.
- Но поскольку скорости касательны к боковой поверхности потока, то в отсек между сечениями *1-1* и *2-2* через боковую поверхность ***движения жидкости не происходит;*** не изменяется и объем отсека. Следовательно, в участок через сечение *1-1* поступает столько же жидкости, сколько за то же время выходит . Но так как сечения *1-1* и *2-2* взяты произвольно, то можно написать, что

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = Q = const$$

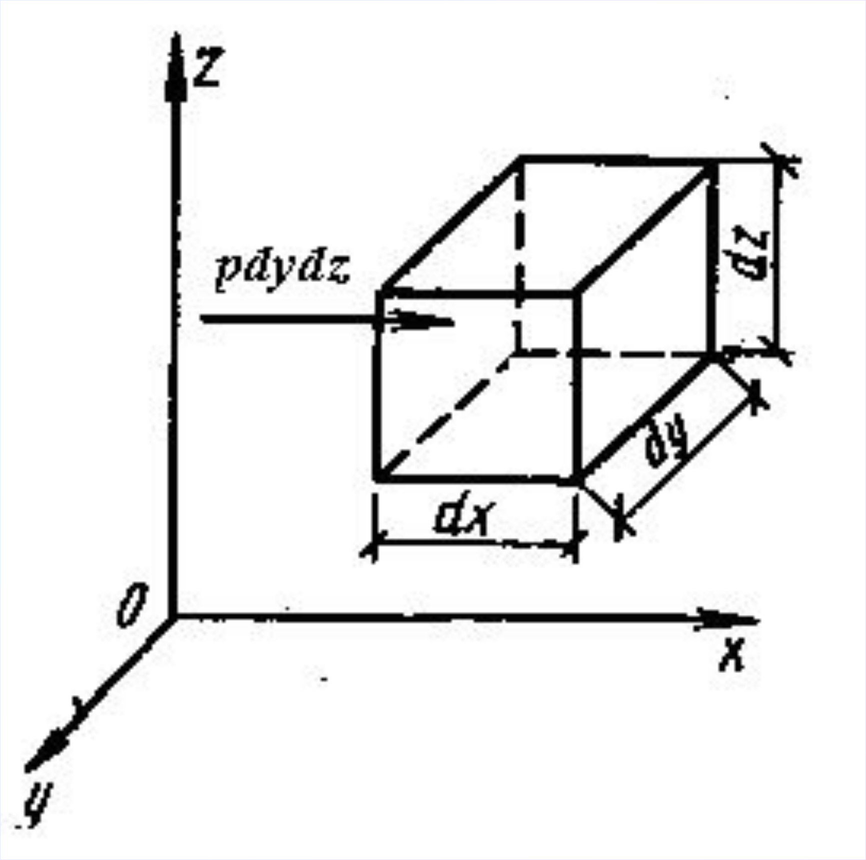
- **или, выражая расход жидкости в сечениях через среднюю скорость *v*, получим**

$$v_1 w_1 = v_2 w_2 = \ldots = v_n w_n = Q = const$$

- *-уравнение неразрывности для потока жидкости*: расход жидкости через любое сечение потока при установившемся движении есть величина постоянная.
- .

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

- Уравнение Даниила Бернулли, полученное в 1738 г., является фундаментальным уравнением гидродинамики, дает связь между давлением *P*, средней скоростью υ и пьезометрической высотой *z* в различных сечениях потока и выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости.



- Выделим внутри жидкости бесконечно малую частицу в виде параллелепипеда. Рассмотрим уравнение движения частицы жидкости вдоль оси *0–X*. На эту частицу будут действовать ***силы давления***
- слева – $pdydz$,
- справа – $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz$
- и массовая сила – $\rho dxdydzX$.
- Если к действующим на частицу движущейся жидкости силам добавить силы инерции с обратным знаком, то на основании постулата Даламбера можно рассматривать эту частицу как находящуюся в покое.
- Составляющая сил инерции по координатной оси *O-X* будет равна:
- $\rho dxdydz \quad \frac{du_x}{dt}$
- Эта же составляющая, отнесенная к единице массы, т.е. деленная на $\rho dxdydz$ определяется по оси *O-X* следующим значением: $-1 \quad \frac{du_x}{dt}$

.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

- Добавляя к уравнениям равновесия покоящейся жидкости силы инерции, получаем дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости (уравнения Эйлера) в проекциях по направлению осей *O-X, O- Y, O-Z:*

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{du_x}{dt}\ ; \qquad Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{du_y}{dt}\ ; \qquad Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{du_z}{dt}\ .$$

- Умножим слагаемые уравнений соответственно на *dx, dy, dz* и сложим их**:**

$$\overbrace{\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)}^{=d\Pi}-\frac{1}{\rho}\overbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)}^{=dp}=\frac{du_x}{dt}dx+\frac{du_y}{dt}dy+\frac{du_z}{dt}dz$$

- Выражение *(Xdx. + Y dy + Zdz)* – это полный дифференциал некоторой функции *П*, т. е. *dП= Xdx + Y dy + Zdz,*
- Считая движение установившимся, *p=f(x, y, z)* можно записать:

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

- Так как $u_x = \frac{dx}{dt}$, то
- .

$$\frac{du_x}{dt}dx = \frac{du_x}{dt}u_x dt = u_x du_x = d\left(\frac{u_x^2}{2}\right)$$

- По аналогии с этим

$$\frac{du_y}{dt}dy = d\left(\frac{u_y^2}{2}\right)$$

$$\frac{du_z}{dt}dz = d\left(\frac{u_z^2}{2}\right)$$

- Подставив полученные выражения в уравнение получим
- $$d\Pi - \frac{1}{\rho}dp = \frac{1}{2}d\left(u^2\right)$$ или $$\frac{1}{\rho}dp + \frac{1}{2}d\left(u^2\right) - d\Pi = 0$$
- После интегрирования получим
- . $$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Pi = const$$
- Если движение жидкости происходит только под действием внешней силы тяжести, то $d\Pi = Zdz = -gdz$, откуда $\Pi = -gz$. Подставив это выражение в уравнение, получим

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = const$$

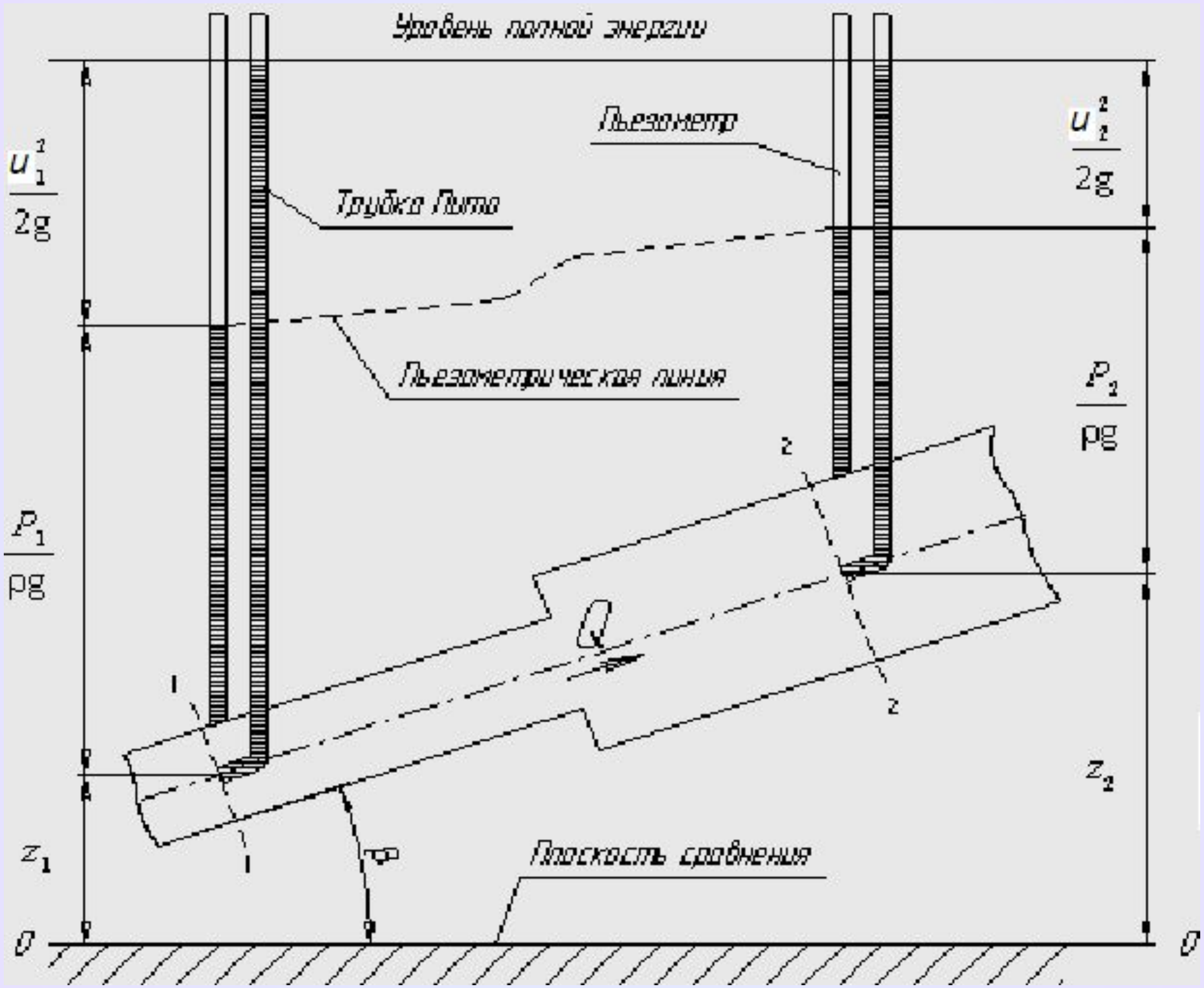
- Или после деления на g
- $$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = const = H$$,
- где H –гидродинамический напор, м

- Уравнение можно записать для двух сечений элементарной струйки 1-1 и 2-2 в виде равенства гидродинамических напоров в этих сечениях $H_1 = H_2$

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}}$$

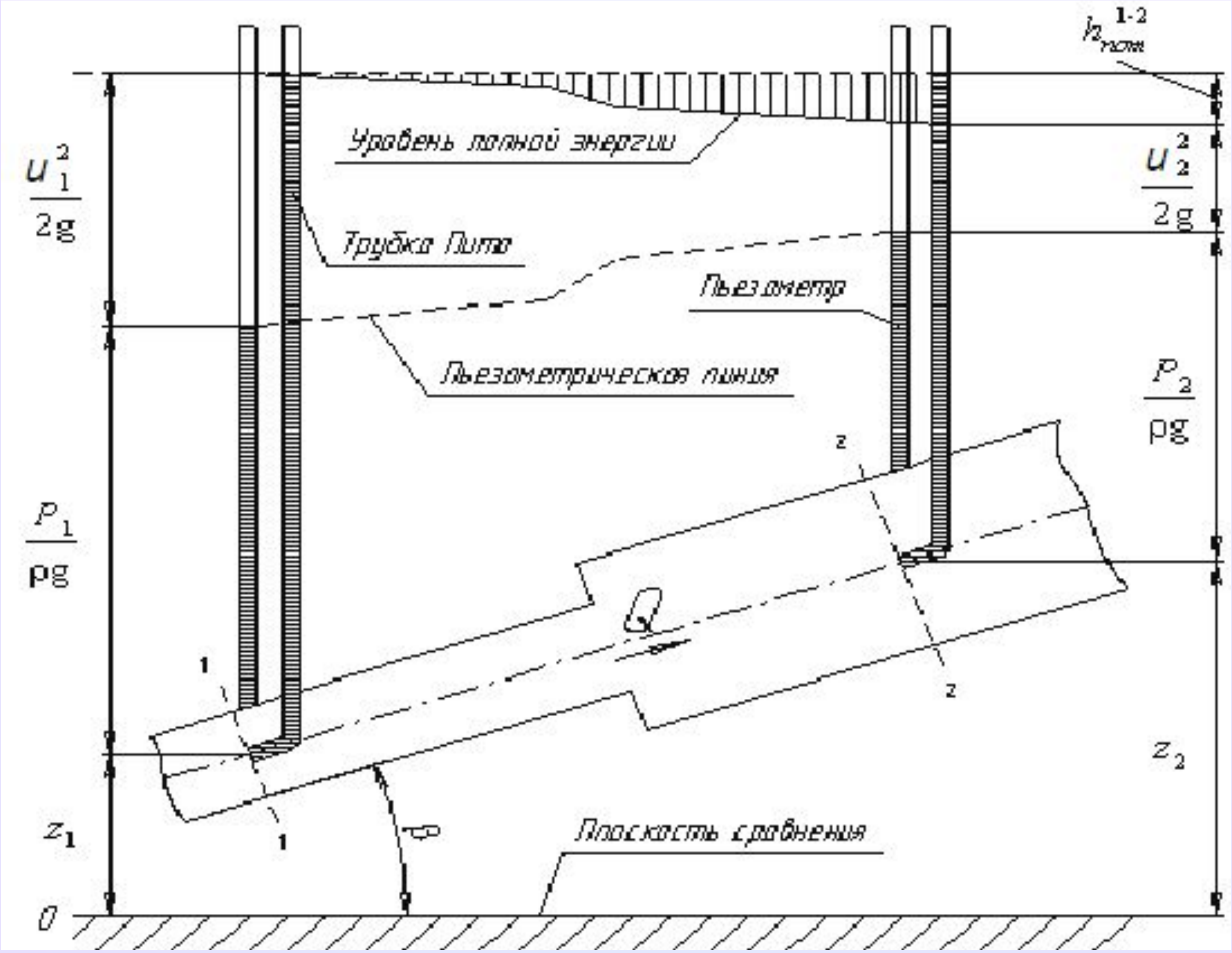
- Выражение называется ***уравнением Бернулли для элементарной струйки невязкой жидкости.***

Схема к выводу уравнения Бернулли для идеальной жидкости



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$$

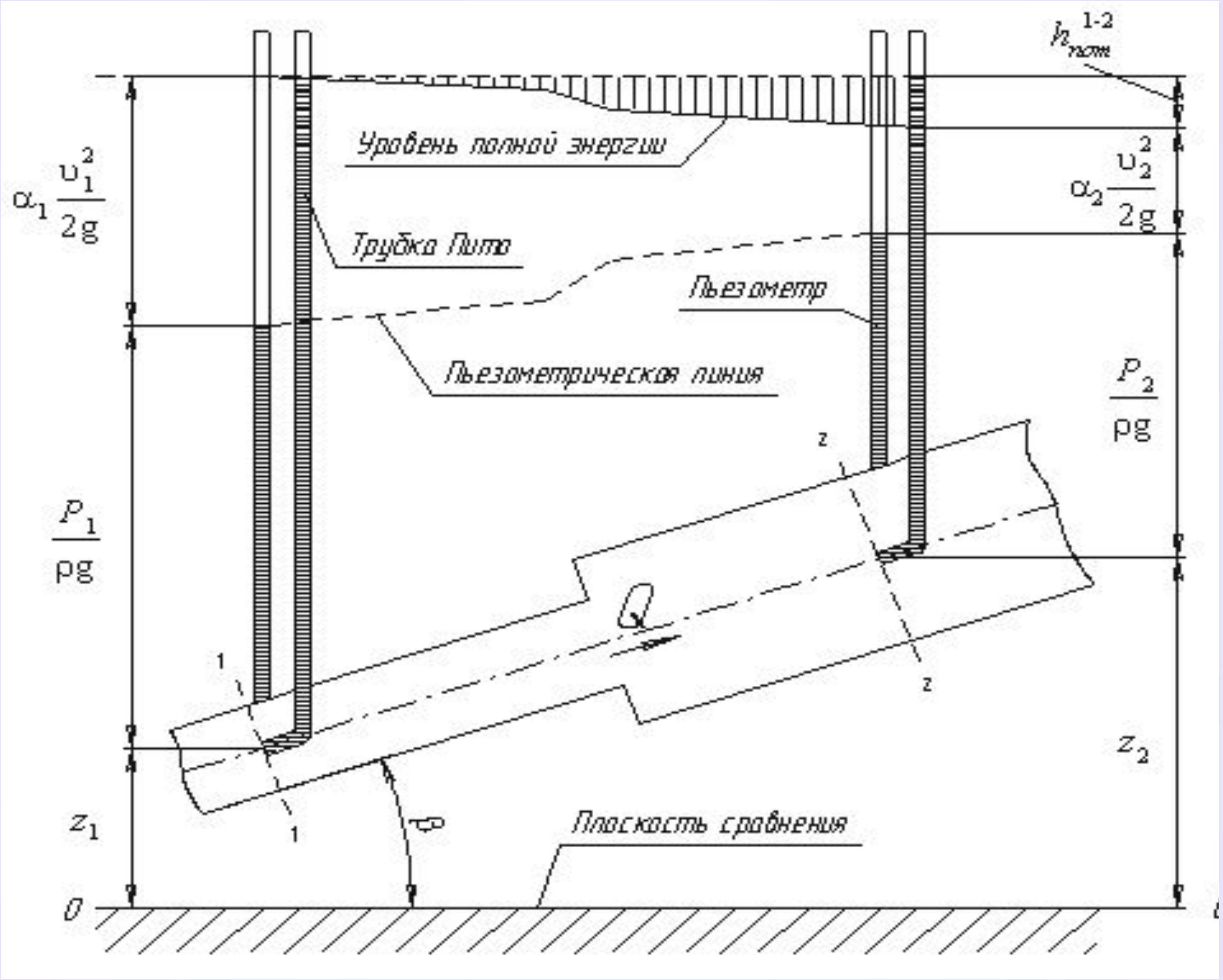
Схема к выводу уравнения Бернулли для реальной жидкости



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w$$

$h_w = H_1 - H_2$

Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha\ v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha\ v_2^2}{2g} + h_w$$

- Для приведения результатов расчетов по средней скорости в соответствие с действительными скоростями, вводится коэффициент Кориолиса , характеризующий неравномерное распределение скоростей в живом сечении потока, представляющий собой отношение кинетической энергии, подсчитанной по истинным скоростям сечения, к той же энергии, вычисленной по средней скорости в этом же сечении потока

$$\alpha = \int_w u^3 \frac{dw}{v^3 w} \approx 1 + 3\int_w (u - v)^2 \frac{dw}{v^2 w}$$

- где u и v – соответственно истинная скорость и средняя местная скорость в любой точке живого сечения w.

Физический смысл и графическая интерпретация уравнения Д. Бернулли

- Уравнение Бернулли можно записать в следующем виде:
- $$H_1 = H_2 + h_{w_{1-2}} = H$$
- т. е. геометрический смысл уравнения Бернулли заключается в том, что при установившемся движении сумма четырех высот в каждом живом сечении потока есть величина постоянная и равна полной высоте - напору *H*.

$$z + \frac{\alpha v^2}{(2g)} + \frac{p}{\gamma} + h_w = H$$

- Если соединить уровни жидкости в пьезометрах, то получим пьезометрическую линию. Сумму $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ называют *пьезометрическим (потенциальным) напором.*
- Падение пьезометрической линии на единицу длины потока называют *пьезометрическим уклоном Ip,* который выражают следующей зависимостью:

$$I_p = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)}{l}$$

- где *L* – длина потока между сечениями 1–1 и 2–2.
- Пьезометрический уклон может быть как положительным, так и отрицательным.
- Если соединить уровни жидкости в скоростных трубках, то получим линию полного напора. Падение линии полного напора на единицу длины называют *гидравлическим уклоном I и выражают зависимостью:*

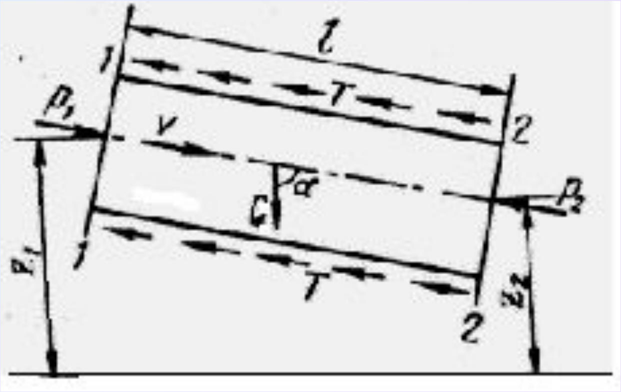
$$I = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)}{l} = \frac{H_1 - H_2}{l} = \frac{h_w}{l}$$

- Физический смысл уравнения Бернулли заключается в том, что с энергетической точки зрения оно представляет тот или иной вид удельной энергии, т. е. энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости.
- Полная удельная энергия потока состоит из **удельной энергии положения z, удельной энергии давления *p/γ* и удельной кинетической энергии** $\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ **, которая уменьшается по длине потока в направлении движения из-за преодоления сил трения.**

- Таким образом, уравнение Бернулли представляет собой сумму потенциальной $\left(z+\frac{p}{\gamma},\right)$ и кинетической $\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ удельных энергий и выражает частный случай общего закона сохранения энергии в природе.

Основное уравнение равномерного движения жидкости

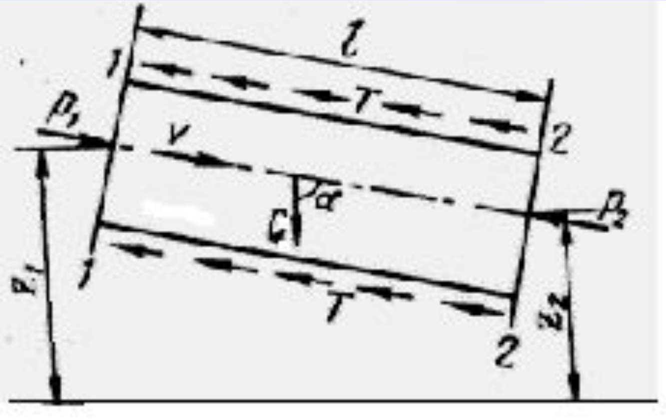
- Рассмотрим часть равномерно движущегося потока (рис.) при допущении одинаковой скорости движения частиц по всему живому сечению. Это допущение упрощает решение поставленной задачи, дает возможность учесть только сопротивления трения потока о стенки трубы или русла и не учитывать сопротивления трения между частицами движущейся жидкости. В данном случае потери напора вызываются лишь гидравлическими сопротивлениями по длине потока, т. е. *hw=hл*.
- Запишем уравнение Бернулли для двух сечений 1–1 и 2–2 выделенного из потока участка относительно плоскости сравнения 0–0:



- $$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{л} \quad ,$$
- или с учетом равенства скоростей
- $$h = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \quad ,$$
- т. е. при равномерном движении потока потери напора по длине равны разности удельных потенциальных энергий.

- Для вычисления этой разности рассмотрим действие внешних сил на выделенную часть потока и составим сумму проекций всех действующих сил на ось потока:
- $P_1 – P_2 – G\sin\alpha – T$
- где P_1 и P_2 – силы давления, соответственно на сечения 1–1 и 2–2 G – сила тяжести выделенной части потока; T – сила трения потока о стенки трубы или русла.
- Подставив значения слагаемых уравнения, получим

$$p_1 w - p_2 w - \gamma w l\left(\frac{z_2 - z_1}{l}\right) - \tau \ \chi l = 0$$



$$R = \frac{\omega}{\chi}$$

- Разделив полученное уравнение на $\gamma\omega$, будем иметь

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \frac{\tau\ l}{\gamma R}$$

- Т.к. левая часть уравнения равна *hл*, то окончательно получим

- $h_л = \dfrac{\tau\ l}{\gamma R}$ или $\dfrac{\tau}{\gamma} = IR$.

- Это основное **уравнение равномерного движения жидкости,** которое показывает, что напряжение силы трения, отнесенное к единице веса жидкости, равно произведению гидравлического радиуса на гидравлический уклон потока.