Лекция № 4. (27.02.15)
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

- 1. Момент силы. Момент пары сил.
- 2. Момент импульса. Уравнение моментов.
- 3. Проекция вектора момента импульса на ось *Z*.
- 4. Динамика вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.
- 5. Момент инерции. Момент импульса вращающегося тела.

- 6. Основное уравнение динамики вращательного движения.
- 7. Закон сохранения момента импульса.
- 8. Закон сохранения проекции вектора момента импульса.
- 9. Моменты инерции однородных тел.
- 10. Теорема Штейнера.

...омент пары сил.

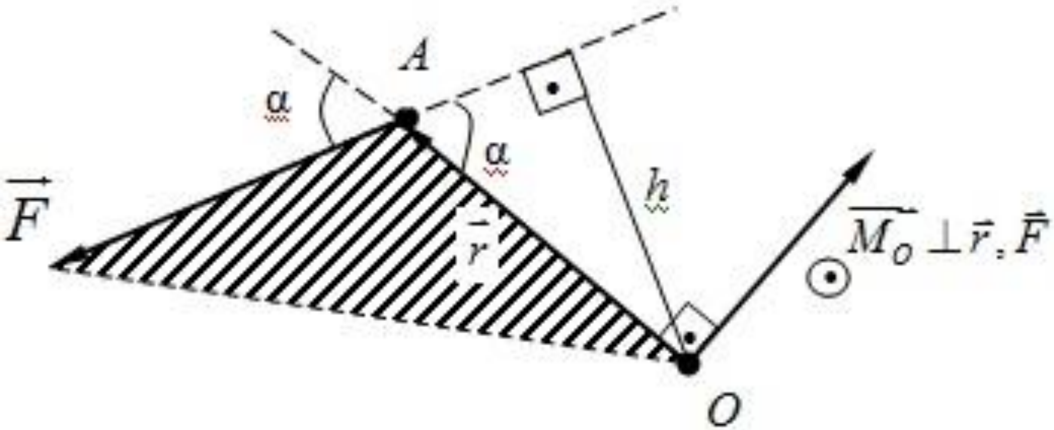


Рис. 4.1.

Моментом силы $\overrightarrow{M_0}$ **относительно точки *O* называется векторное произведение вектора $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$:**

$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \textbf{(4.1)}$$

Модуль момента силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку *A*, относительно центра *O* определяется

$$M_O = Fr\sin(\widehat{\vec{r},\vec{F}}) = Fh, \qquad \textbf{(4.2)}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий центр *O* с материальной точкой *A*, к которой приложена сила $\vec{F}$; *h* – *плечо силы* $\vec{F}$: кратчайшее расстояние (длина проведенного перпендикуляра) от центра *O* до линии действия силы $\vec{F}$ (рис. 4.1).

1. Момент силы. Момент пары сил.

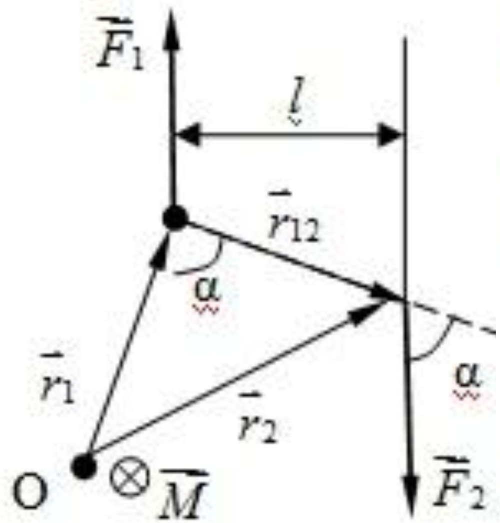


Рис. 4.2.

Пара сил **– две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равные по модулю, направленные вдоль параллельных прямых в противоположные стороны (рис. 4.2). Расстояние l между прямыми, вдоль которых действуют силы, называется *плечом пары*.**

Суммарный момент этих сил, относительно произвольной точки *O*:

$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -\vec{r}_1 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \quad \textbf{(4.3)}$$

Учтем, что $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Обозначим через $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Тогда:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2 = \vec{M}. \quad \textbf{(4.4)}$$

Из формулы (4.4) $\Rightarrow$ суммарный момент пары сил не зависит от выбора точки *O*, относительно которой мы его рассчитываем, а его модуль определяется:

$$\left|\overrightarrow{M_O}\right| = Fr\sin\left(\underbrace{\vec{r}_{12}\hat{,}\vec{F}}_{\alpha}\right) = Fl, \quad \textbf{(4.5)}$$

где $l = r_{12}\sin\alpha$.

2. Момент импульса. Уравнение моментов.

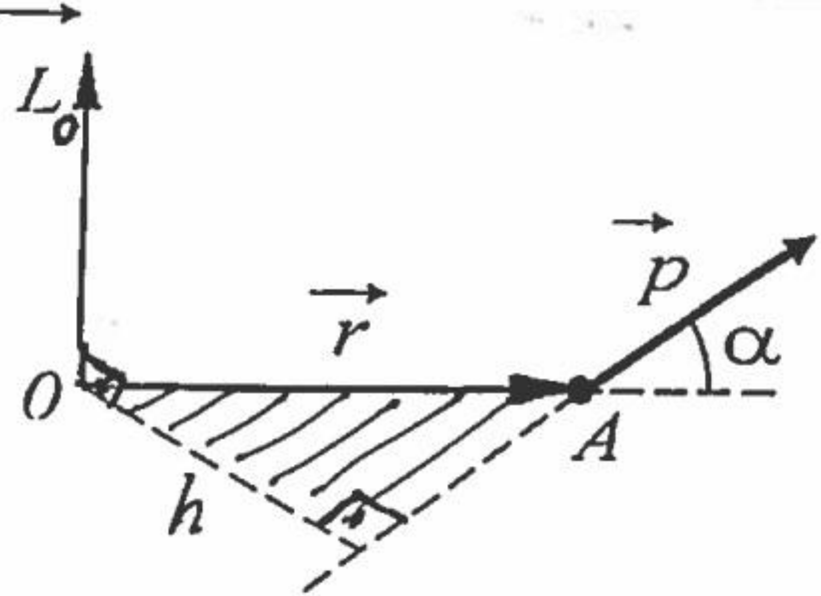


Рис. 4.3.

Момент импульса $\vec{L}_O$ **материальной точки относительно центра *O*:**

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad L_O = rm\upsilon \sin(\underbrace{\widehat{\vec{r}, m\vec{\upsilon}}}_{\alpha}) = m\upsilon h, \quad \textbf{(4.6)}$$

где *h* − плечо импульса $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ **материальной точки (рис. 4.3).**

2. Момент импульса. Уравнение моментов.

Продифференцируем по времени выражение для момента импульса $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}$

Имеем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}] + [\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}] \qquad (4.7)$$

1-ое слагаемое равно 0, так как 2 вектора умножаются векторно сами на себя, ибо

dr/dt = v, p = mv, т.е. [v, mv] =v mv sin0º = 0.

Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M} \qquad (4.8)$$

Полученное выражение

носит название *уравнение моментов*,

т.к. связывает между собой

момент силы и момент импульса!

$$d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{M} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{M}_{Oi}, \quad (4.9')$$

т.е. скорость изменения момента импульса системы материальных точек относительно точки *О* равна векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой же точки *О*.

3. Проекция вектора момента импульса на ось Z.

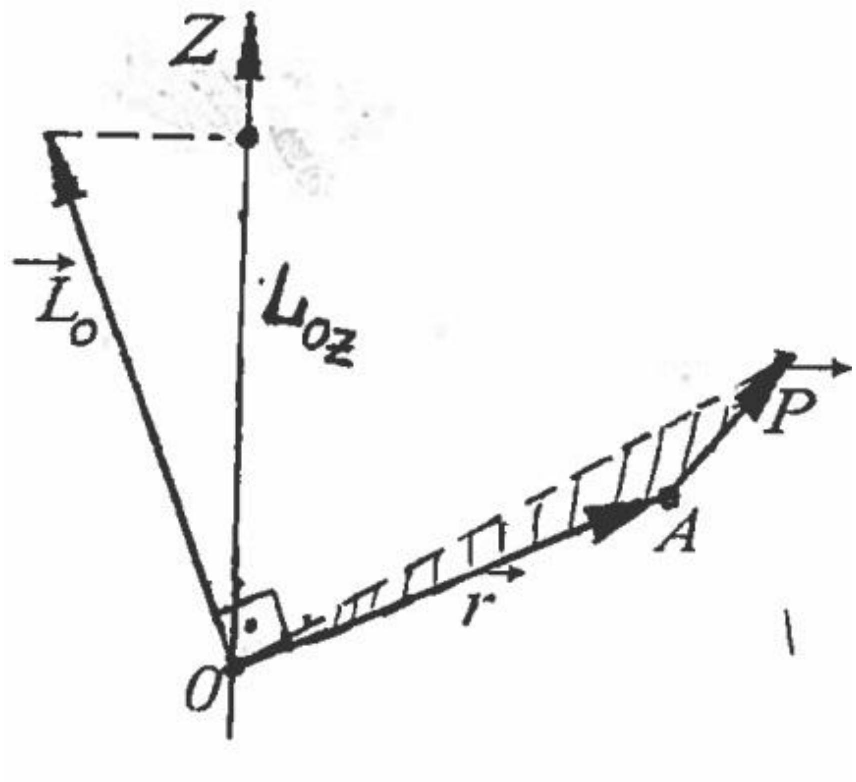


Рис. 4.3*.

Моментом импульса относительно неподвижной оси Z **называется проекция вектора $\vec{L}_O$, определенного относительно произвольной точки *O* данной оси*.***

4. Динамика вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

спроектировав все члены уравнения (4.9) на ось Oz:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \tag{4.10}$$

где L_z и M_z — проекции на ось Oz вращения тела векторов момента импульса тела и результирующего момента внешних сил относительно точки O. Они называются, соответственно, моментом импульса тела и результирующим моментом внешних сил относительно оси Oz.

Уравнение (4.10) выражает основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело.

Из этого закона следует, что основной динамической характеристикой тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, является момент импульса тела относительно этой оси.

4. Динамика вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Проекция результирующего вектора L_z **на некоторую неподвижную ось *Z* вращения равна**

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz}.$$

По определению векторного произведения, вектор $\mathbf{L}_i$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_i$ и $m_i\mathbf{v}_i$. Проекция L_{iz} равна площади S_i — проекции этого параллелограмма на плоскость, перпендикулярную к оси Oz вращения тела и проходящую через точку O (рис. 4.4):

$$L_{iz} = L_i \cos\gamma_i,$$

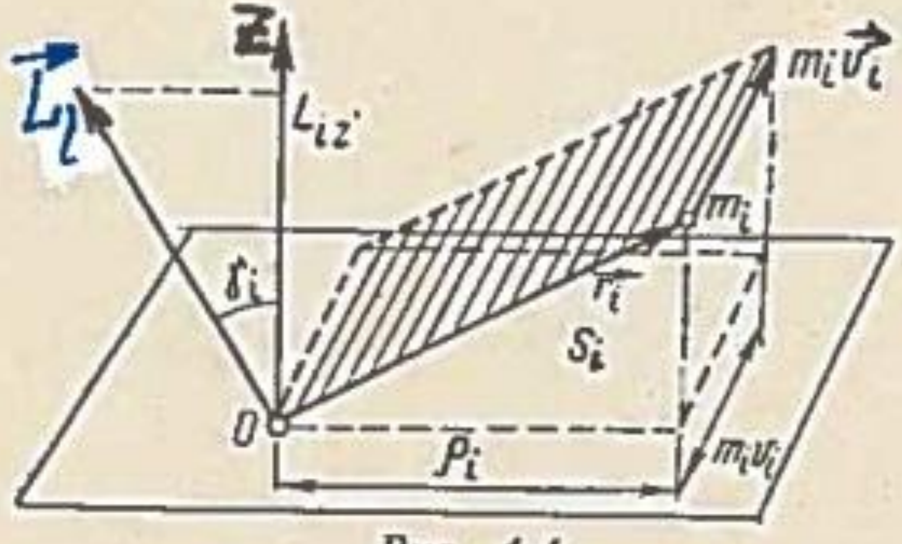


Рис. 4.4

4. Динамика вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Проекция параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_i$ и $m_i\mathbf{v}_i$, представляет собой прямоугольник со сторонами ϱ_i и $m_i v_i$. Таким образом,

$$L_{iz} = \varrho_i m_i v_i = \omega m_i \varrho_i^2,$$

так как скорость i-й точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω, равна $\omega\varrho_i$.

Момент импульса всего тела относительно оси вращения Oz

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i \varrho_i^2. \qquad (4.11)$$

5. Момент инерции. Момент импульса

Сумма произведений масс всех материальных точек тела на квадраты их расстояний до оси называется моментом инерции O тела относительно этой оси. Момент инерции относительно оси Oz равен:

$$J_z = \sum m_i \varrho_i^2. \tag{4.12}$$

Следовательно,

$$L_z = J_z \omega. \tag{4.13}$$

Момент импульса тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость вращения вокруг этой оси.

При вычислении момента инерции тела его разбивают на бесконечно большое число бесконечно малых элементов с массами dm. Поэтому в формуле (4.12) сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \varrho_i^2$ заменяют интегралом:

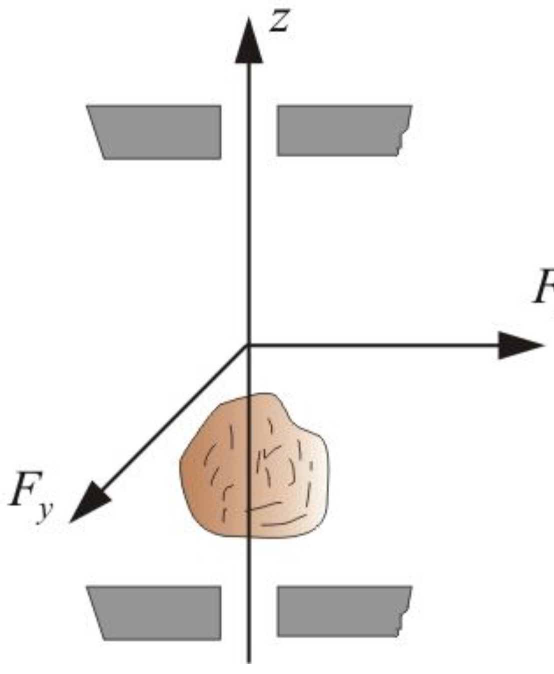
$$J_z = \int\limits_0^m \varrho^2 dm, \qquad (4.12')$$

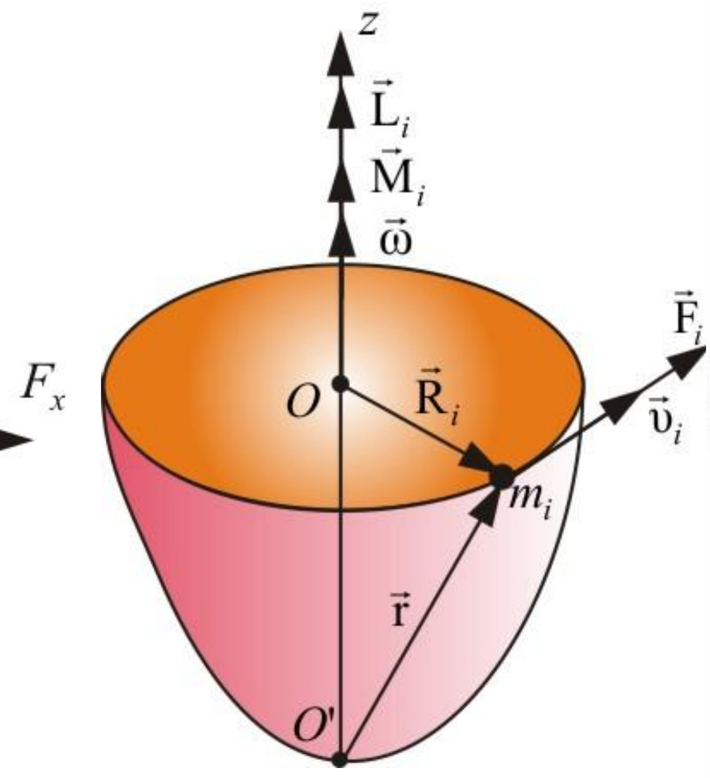
где ϱ — расстояние от элемента dm до оси Oz.

6. Основное уравнение динамики вращательного движения.

В случае тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (*z*) (рис. 4.5). составляющие $\vec{M}$ – момента внешних сил, направленные вдоль *x* и *y*, компенсируются *моментами сил реакции закрепления*.

Вращение вокруг оси *z* происходит только под действием $\vec{M}_z$





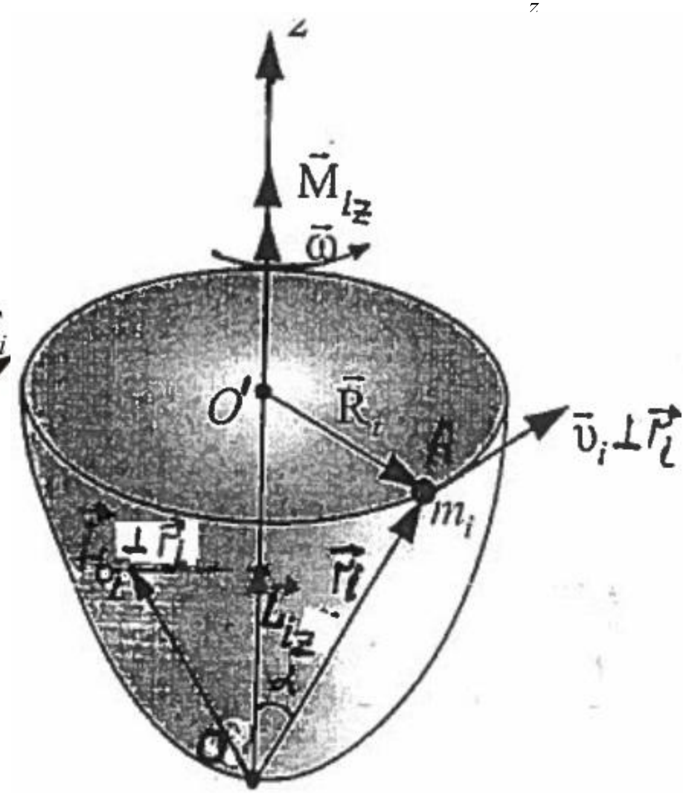
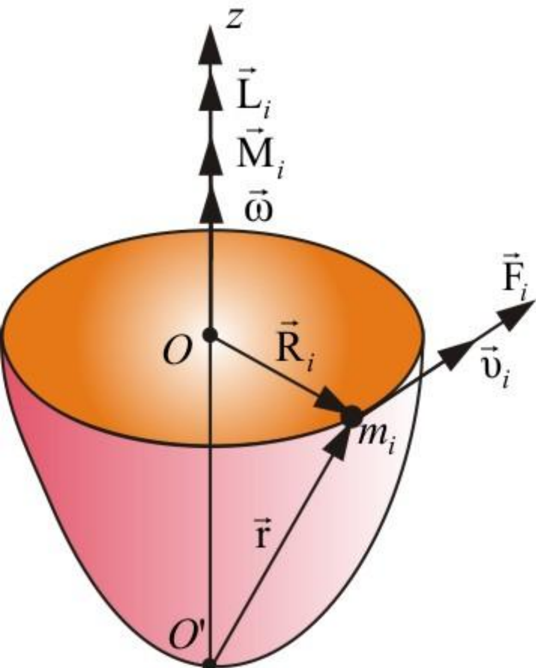


Рис. 4.5 **Рис. 4.6** **Рис. 4.6***



6. Основное уравнение динамики вращательного движения.

некоторое тело

округ оси *z* Получим

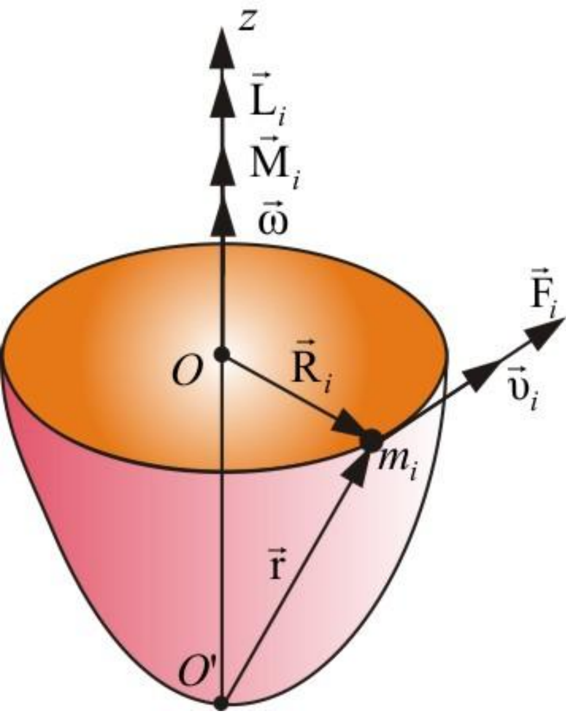
инамики для некоторой точки

m_i этого тела, находящегося на расстоянии R_i от оси вращения. Составляющие $\vec{M}_z$ и $\vec{L}_z$ направлены всегда вдоль оси вращения *z*, поэтому в дальнейшем опустим значок *z*.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i}$$

или

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\vec{R}_i, m_i\vec{\upsilon}_i] = \vec{M}_i}$$



как у всех точек $\vec{\omega}_i$

юльзуем $\vec{\omega}$

ор угловой скорости,

уль $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}.$

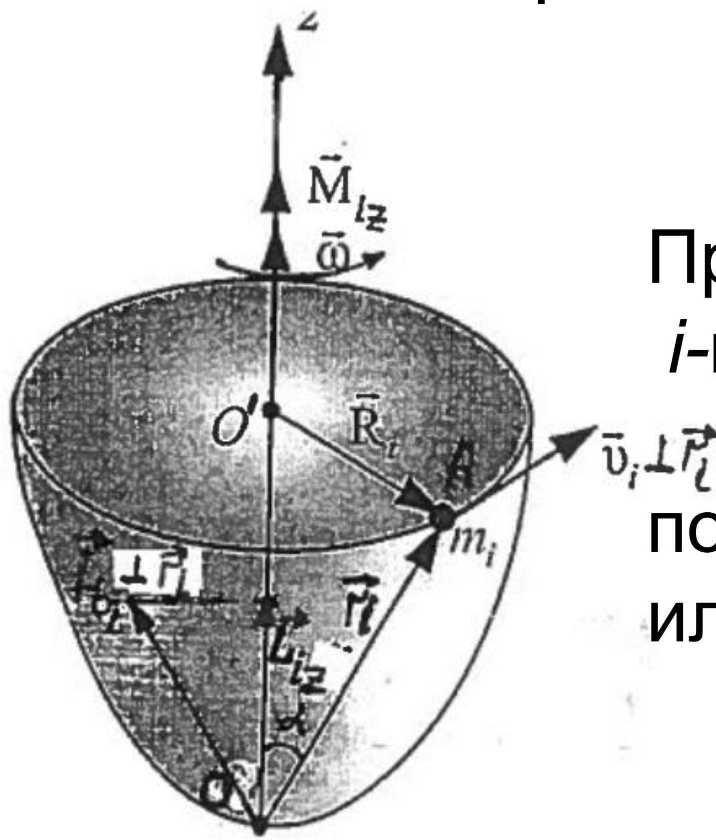
Тогда
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i R_i^2 \vec{\omega}\right) = \vec{M}_i}$$

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i останутся неизменными. Тогда:

$$\boxed{m_i R_i^2 \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_i.}$$

6. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Обозначим *I_i* – ***момент инерции*** *точки* находящейся на расстоянии *R* от оси вращения:



$$\boxed{I_i = m_i R_i^2.} \quad (4.13)$$

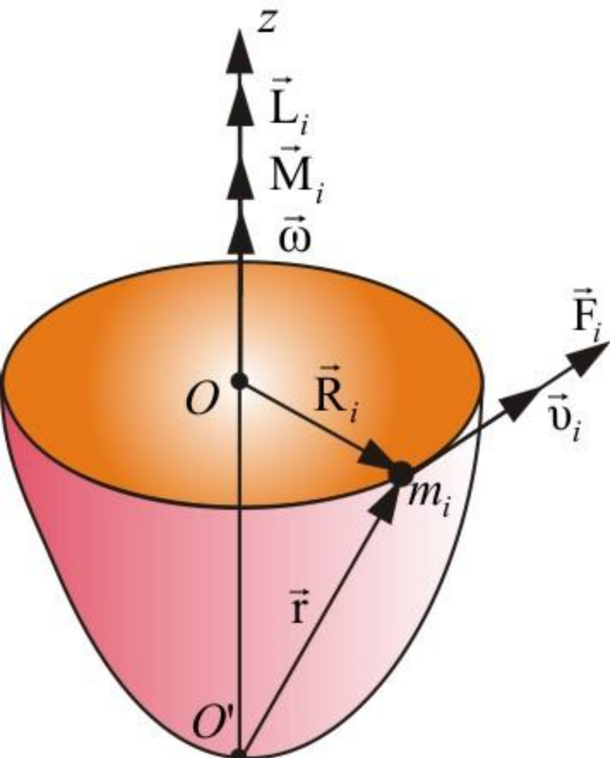
Просуммировав (4.13) по всем *i*-ым точкам,

получим

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \quad (4.14)$$

или

$$\boxed{I\vec{\varepsilon} = \vec{M}} \quad (4.15)$$



$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (4.16)$$

$\vec{L}$ – ***момент импульса***

щегося вокруг оси *z*

ним: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ для

ого движения).

$\vec{L}$ и $\vec{M}$ динамические характеристики вращательного движения направленные всегда вдоль оси вращения. Причем, $\vec{L}$ определяется направлением вращения, как и $\vec{\omega}$,а $\vec{M}$ – зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

Повторим основные характеристики вращательного движения

Эти формулы получены для **одной точки** *вращающегося твердого тела*

$$\vec{L}_i\Big| = J_{iz}\omega$$ **Момент импульса**

$$\vec{M}_i\Big| = J_{iz}\varepsilon$$ **Момент силы**

$$J_{iz} = m_i r_i^2$$ **Момент инерции**

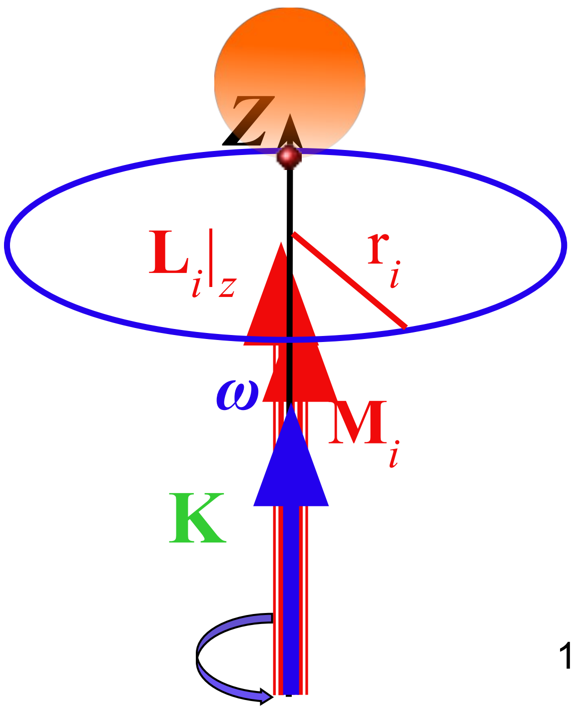
Суммируя по **всему телу**, *получим*

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\Big| = J_z\omega$$ **Момент импульса твердого тела**

$$\boxed{M_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i\Big| = J_z\varepsilon}$$ **Момент силы твердого тела**

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} J_{iz}$$ **Момент инерции твердого тела**

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела



7. Закон сохранения момента импульса.

Для **замкнутой** системы тел момент внешних сил $\vec{M}$ ***всегда равен нулю***, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \mathrm{const}, \quad (4.17)$$

Закон сохранения момента импульса можно применять и к незамкнутой системе тел, если …………

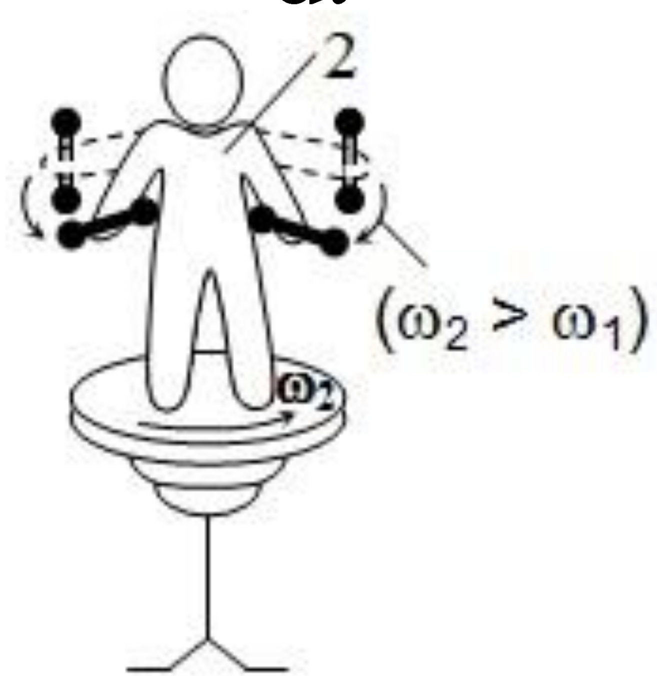
8. Закон сохранения проекции вектора момента импульса.

Для замкнутой системы тел, вращающихся вокруг оси *z*:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \equiv 0, \Rightarrow \vec{L}_z = \text{const} \quad (4.18)$$

или

$$I_z\vec{\omega} = \text{const} \quad (4.19)$$

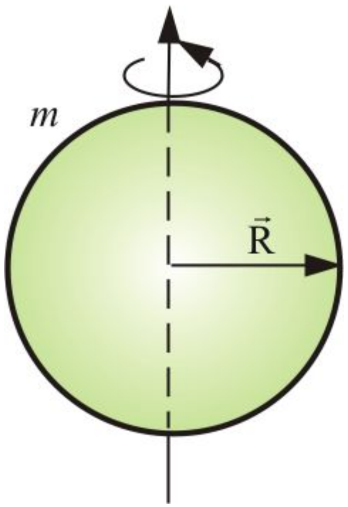


$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 \quad (4.20)$$

Скамья Жуковского

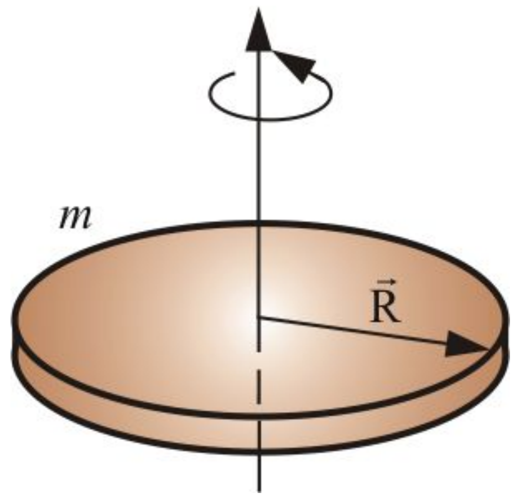
9. Моменты инерции однородных тел.

(шара, сферы, диска, обруча и стержня)



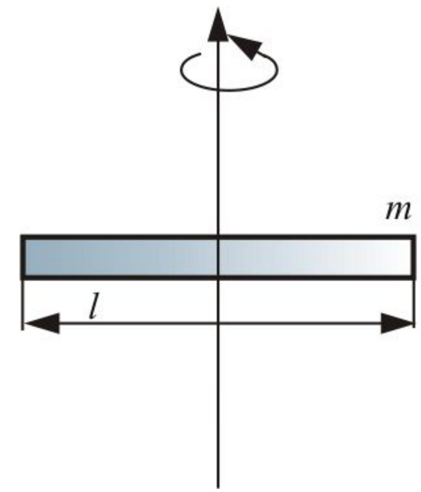
Шар

$$I_c = 2/5 \cdot m \cdot R^2;$$



Диск

$$I_c = 1/2 \cdot m \cdot R^2;$$



Стержень

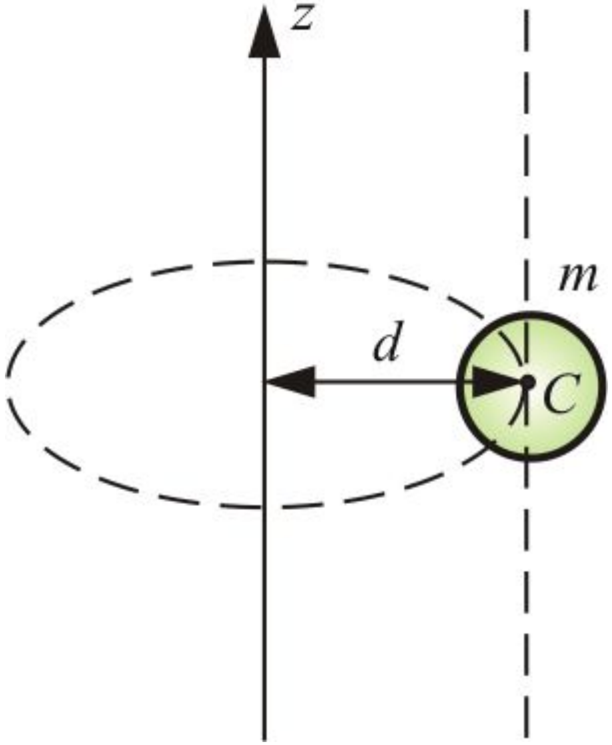
$$I_c = \frac{1}{12} m l^2$$

Сфера

$$I_c = 2/3 \cdot m \cdot R^2;$$

Обруч

$$I_c = m \cdot R^2$$

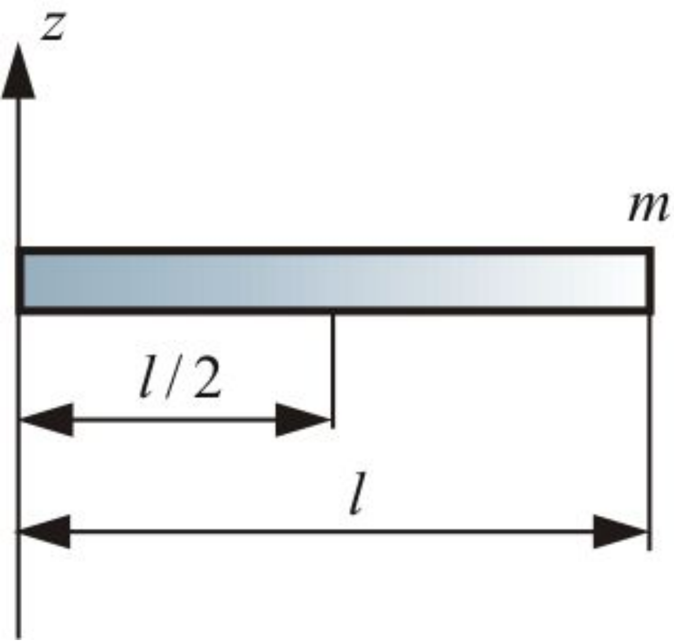


10. Теорема Штейнера

$$\boxed{I = I_c + md^2} \tag{4.21}$$

Момент инерции тела I **относительно любой оси вращения равен моменту его инерции** I_c **относительно параллельной оси, проходящей через центр масс С тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.**

10. Теорема Штейнера



Пример: стержень массой *m*, длиной *l*, вращается вокруг оси, проходящей <u>через конец</u> стержня (рис).

$$I_c = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_z = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m l + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2.$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

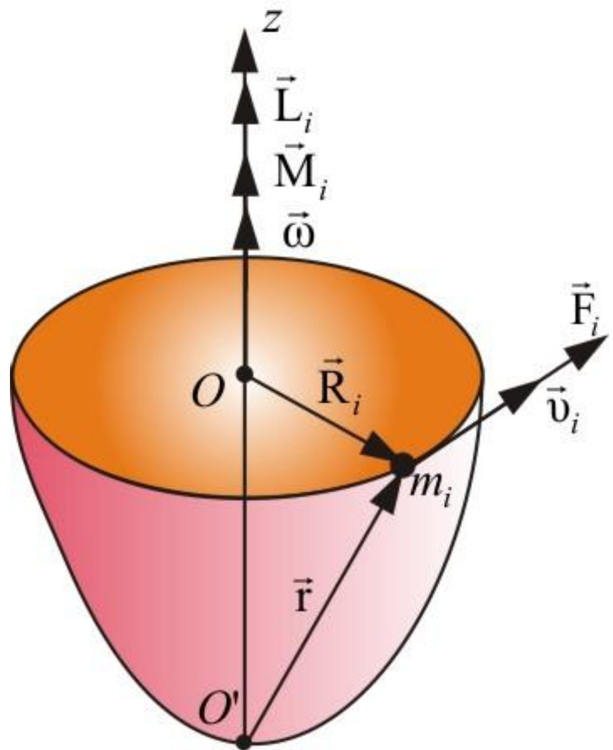
$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

$$m\vec{\upsilon} = \text{const}$$

$$A = FS$$

$$N = Fv$$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + mgh = \text{const}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$I\vec{\omega} = \text{const}$$

$$A = M\phi$$

$$N = Mw$$

$$\frac{I\omega^2}{2} + mgh = \text{const}$$

Если изучение физики порождает: беспокойство, замешательство, страх, уныние или негодование, то это привычное с детства отношение к возникшим трудностям !!!

Надо *незамедлительно* заменить на прямо противоположное и проблема начнет решаться быстро и легко…

Лекция окончена!!!