

Тема 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

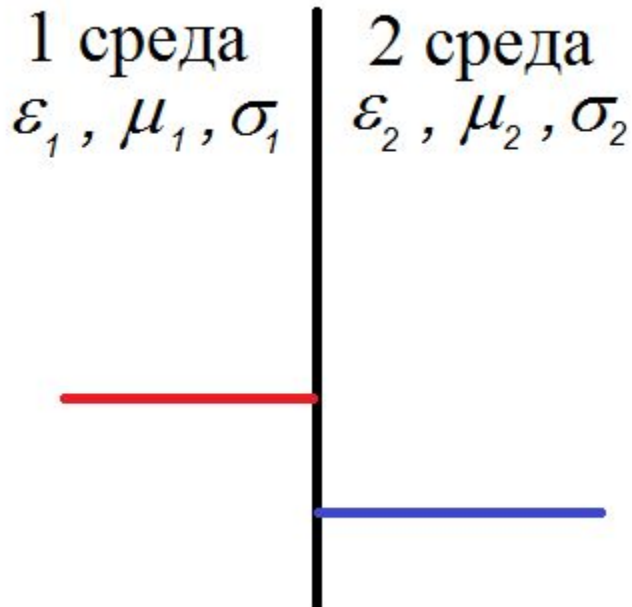
Лекция №2 (2). Основные теоремы электродинамики

1. Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения.
2. Основные теоремы электродинамики.
3. Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга.

1 Граничные условия на поверхности раздела реальных сред. Условия излучения

1 Необходимость введения граничных условий.

Параметры сред (ϵ, μ, σ) в заданном объеме могут изменяться произвольно. При переходе через некоторую поверхность (границу раздела сред) параметры изменяются скачком.



Уравнения Максвелла в дифференциальной форме на границе раздела теряют смысл (производная терпит разрыв). Граничные условия устраняют неопределенность.

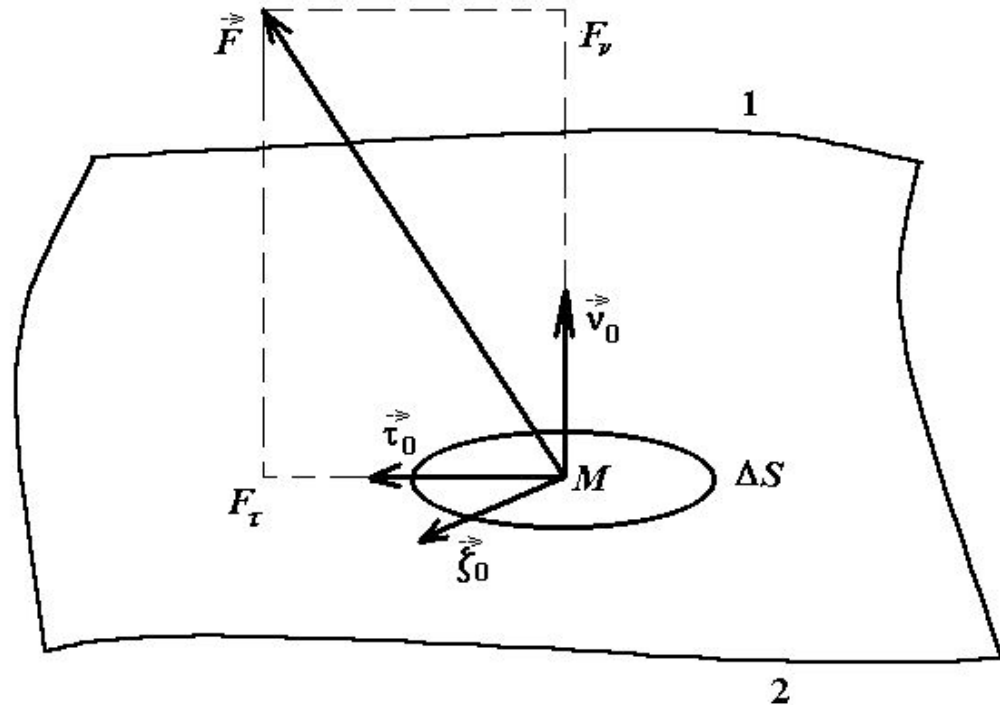
2 Типы граничных условий.

Электромагнитные поля – векторные величины. Могут быть представлены в виде разложения в базис, в том числе и на границе раздела сред ($\Delta S \rightarrow 0$):

$$\vec{F} = \vec{\nu}_0 F_\nu + \vec{\tau}_0 F_\tau + \vec{\xi}_0 F_\xi$$

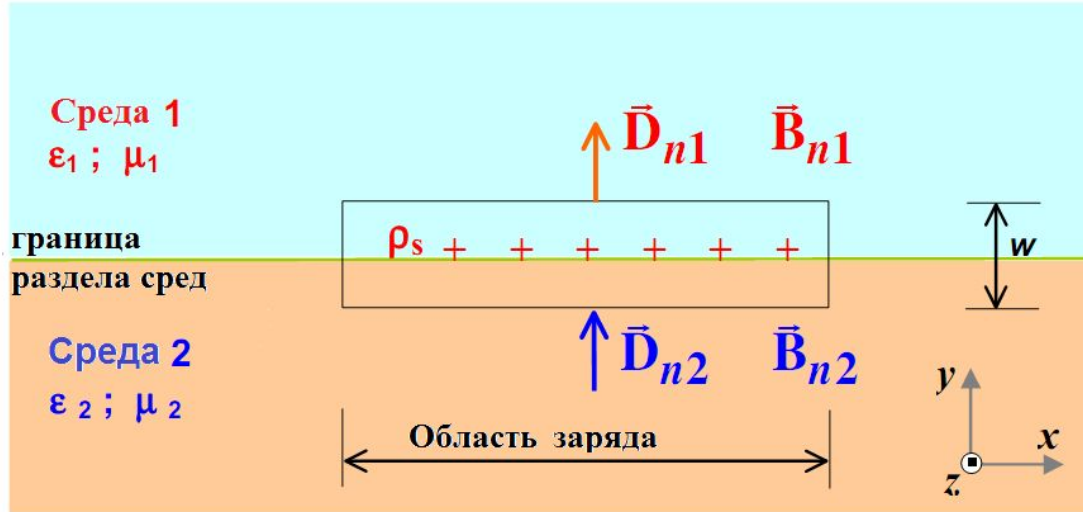
нормальная
компонента

тангенциальные
(касательные)
компоненты

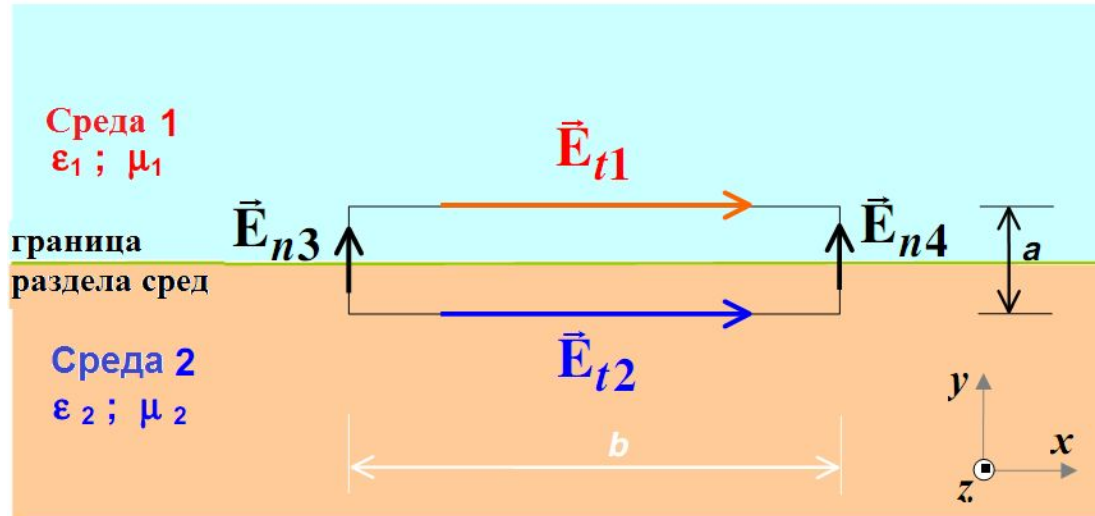


Граничные условия для электрического поля:

- для нормальных компонент: $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{v}_0 = \rho$



- для тангенциальных компонент: $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}_0 = 0$ $[\vec{v}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0$



Граничные условия для магнитного поля:

- для нормальных компонент:

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{v}_0 = 0$$

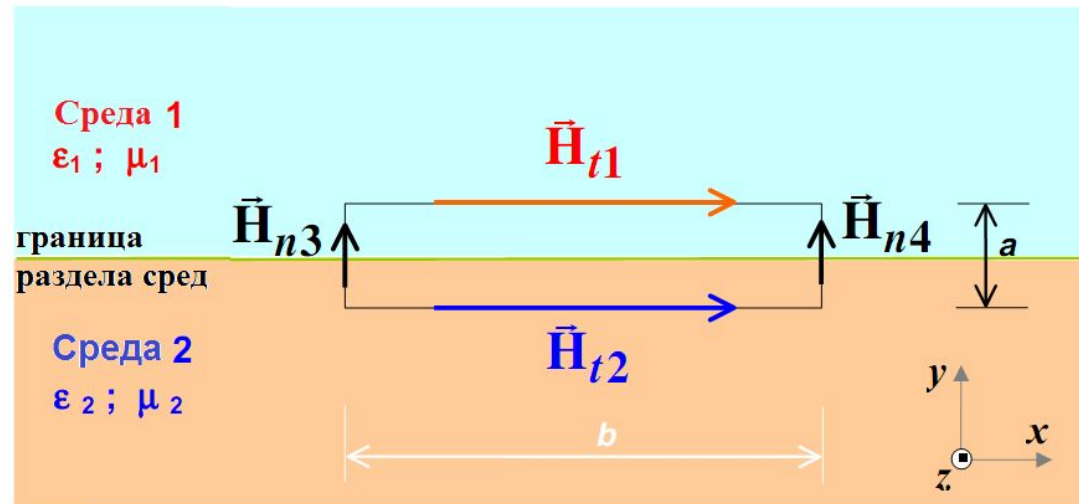
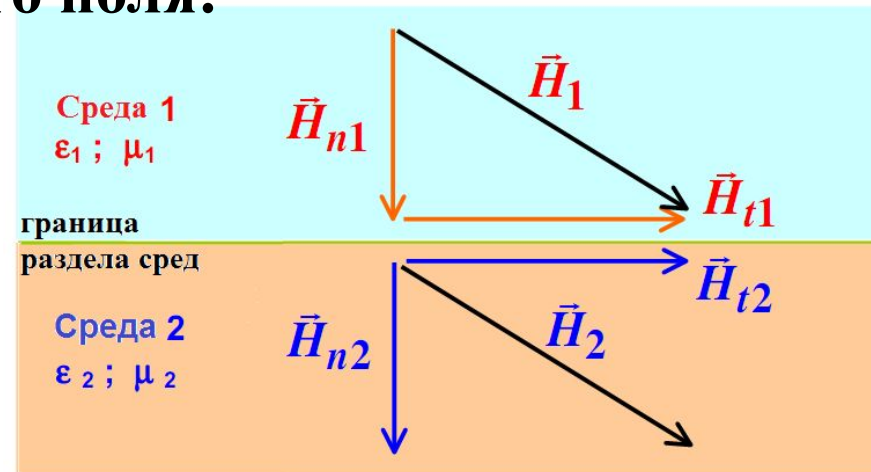
- для тангенциальных компонент:

$$[\vec{v}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{\eta}$$

где $\vec{\eta} = \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow 0} i_0 \frac{\vec{\Delta l}}{\Delta \vec{x}}$ -

поверхностный ток,
связанный с объемным
ТОКОМ соотношением

$$\vec{j}^{\text{Э.ВТ.}}(\vec{r}) = \vec{\eta}(\vec{\tau}, \vec{\zeta}) \delta(v - v')$$



Условия излучения: применяются для обеспечения единственности решения. (В общем случае решений дифференциальных уравнений – два. Одно не соответствует физическим понятиям).

Для свободного пространства используется **условие излучения Зоммерфельда:**

- 1) амплитуда поля на больших расстояниях от источника должно убывать, по крайней мере, как обратная от данного расстояния величина ($|\mathbf{A}| \sim 1/r$);
- 2) фаза поля должна быть такой же, как у уходящей на бесконечность волны ($\varphi \sim \exp(-ikr)$).

Для устранения неопределенности при изломах применяют **условие на ребре:** $\int (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV \rightarrow 0$ при $dV \rightarrow 0$.

Из условия V' следует, что в окрестности ребра ни одна из составляющих ЭМП не может возрастать быстрее $\rho^{-1+\alpha}$;

где ρ - расстояние от ребра; $0 < \alpha < 1$

2 Основные теоремы электродинамики

Используются для упрощения физической трактовки ряда явлений и при решении ряда задач.

1. Теорема единственности:

Электромагнитное поле в любой момент времени в любой точке объема определяется уравнениями Максвелла при заданных источниках однозначно, если

- в каждой точке объема даны начальные значения векторов напряженности электрического и магнитного полей;
- известны граничные значения касательных проекций одного из векторов в точках поверхности S для любого момента времени.

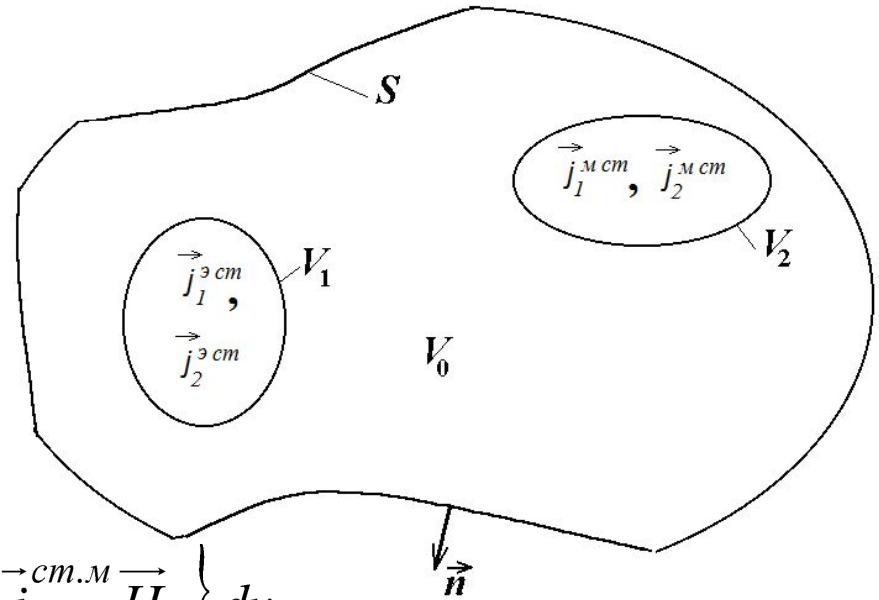
2. Лемма Лоренца: взаимодействие между полями в областях

- в дифференциальной форме

$$\operatorname{div}[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - \operatorname{div}[\vec{E}_2, \vec{H}_1] = \vec{j}_1^{\text{э см}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{м см}} \vec{H}_2 - \\ - \vec{j}_2^{\text{э см}} \vec{E}_1 + \vec{j}_2^{\text{м см}} \vec{H}_1$$

- в интегральной форме

$$\oint_S \{ [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] \} d\vec{s} = \\ = \int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{\text{см.э}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{см.м}} \vec{H}_2 \right\} dv - \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{\text{см.э}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{см.м}} \vec{H}_1 \right\} dv$$



Следствия леммы Лоренца:

– принцип взаимности:

$$\int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{\text{ст.э}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{ст.м}} \vec{H}_2 \right\} dv = \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{\text{ст.э}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{ст.м}} \vec{H}_1 \right\} dv$$

Ограничение применимости – изотропные среды.

- **теорема эквивалентных токов.** Позволяет находить поле в любой точке пространства при известном решении задачи дифракции по полю вспомогательного диполя и известном распределении полей на поверхности S :

для электрического источника

$$\vec{a}\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_B^{\text{э}} - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_B^{\text{э}} \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_B^{\text{э}} + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_B^{\text{э}} \right\} ds$$

для магнитного источника

$$\vec{b}\vec{H}(\vec{r}) = \int_V \left(\vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_B^{\text{м}} - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_B^{\text{м}} \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_B^{\text{м}} + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_B^{\text{м}} \right\} ds$$

Эквивалентные токи:

$$\vec{J}^{\text{э}} = [\vec{n}, \vec{H}] \quad \vec{J}^{\text{м}} = -[\vec{n}, \vec{E}]$$

Электродинамика и РРВ. Сем.1. Лекция 2(2).

3 Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга

Сторонний источник – источник, который возбуждает ЭМП, но сам от него не зависит.

ЭМП является носителем энергии. В выделенном объеме энергия может изменяться во времени за счет двух процессов:

- превращения электромагнитной энергии в другие формы энергии (тепловая энергия, химическая энергия, кинетическая энергия ускоренных частиц и т.д.) и наоборот;
- вытекания и втекания электромагнитной энергии из данного объема через поверхность S , ограничивающую данный объем.

$$P + \frac{dw}{dt} + \oint = p_{\text{ст}}$$

где $p_{\text{ст}}$ – мощность поля, создаваемого сторонними источниками;

dw/dt – мощность, идущая на изменение энергии ЭМП;

\oint – мощность поля, выходящая через поверхность S .

Теорема Умова-Пойнтинга – уравнение баланса энергии.

- в дифференциальной форме:

$$\underbrace{\sigma \vec{E}^2}_{\text{нагрев вещества}} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\epsilon_0 \epsilon \frac{\vec{E}^2}{2} + \mu_0 \mu \frac{\vec{H}^2}{2} \right)}_{\text{колебательные процессы}} + \underbrace{\text{div}[\vec{E}, \vec{H}]}_{\text{проход энергии (излучение)}} = \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{ст}}}_{\text{энергия стороннего источника}}$$

- в интегральной форме:

$$\int_V \sigma \vec{E}^2 dv + \int_V \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv + \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} = - \int_V \vec{j}^{\text{э.см.}} \cdot \vec{E} dv$$

Определения:

- отдаваемая мощность: $P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv$

- мощность излучения: $\wp = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}$

- вектор Пойнтинга: $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]$

Физическая трактовка уравнения баланса энергии.

Первое слагаемое – работа, совершаемая ЭМП (в том числе и на нагрев вещества).

Второе слагаемое - колебательные процессы - связано с процессом перехода энергии электрического поля

$$W^{\text{э}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon \vec{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \vec{E} dv$$

в магнитное

$$W^{\text{м}} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu \vec{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dv \quad \text{и наоборот.}$$

Третье слагаемое описывает поток энергии или мощность излучения через замкнутую поверхность S .

Баланс считается *активным*, если преобладает отдача энергии во внешнее пространство $\wp > 0$.

Баланс считается *пассивным*, если преобладает поглощение энергии из внешнего пространства $\wp < 0$.

Баланс нейтрален, если $\wp = 0$.